



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  — некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партией перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0, \text{ где } x_1 \in \mathbb{R} \text{ и } x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$D > 0 \Rightarrow D = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 \Rightarrow 36 - 4t^2 > 0$$

$$36 > 4t^2 \Rightarrow t^2 < 9$$

При произв. параметре  $t > 0 \Rightarrow$  по т. Виета

$$\text{произв. корней} = \text{свободному члену} \Rightarrow 9t^2 - 9 > 0$$

$$\Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow 1 < |t| < 3 \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

При таком  $t$   $D > 0$  и  $9t^2 - 9 > 0 \Rightarrow$  уел. рад.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19\rho^4 =$$

$$= (a^2 + ab + 3a) + (b^2 + ab + 3b) = a(3 + a + b) + b(3 + a + b)$$

$$= (a + b)(3 + a + b) = 19\rho^4$$

$$\rho \text{ и } 19 - \text{прост. числа.} \Rightarrow a + b = 19^n \cdot \rho^m$$

$$3 + a + b = 19^{n'} \cdot \rho^{m'} \Rightarrow n + m = 1; n' + m' = 4$$

$$\text{Если } n \neq 0 \text{ и } m \neq 0 \Rightarrow (3a + b) - (a + b) \mid \rho \Rightarrow 3 \mid \rho$$

$$\Rightarrow \rho = 3, \text{ но ни } 1 \text{ из свобод. слагаем } 19 \text{ и } 3 \Rightarrow$$

$$\text{они } \nmid 57 \Rightarrow \text{они } \geq 57 \Rightarrow \text{гр. слагаем } \leq 3^3, \text{ или ост.}$$

$$\text{тогда } 3\rho, \text{ но } 57 - 3 > 22 \Rightarrow n = 0 \text{ или } m = 0$$

$$\Rightarrow \text{какая-то свобод.} = \rho^4, \text{ а гр. } 19, \text{ или } 19\rho^4 > 113.$$

$$\text{Если } a + b = 19 \Rightarrow a + b + 3 = \rho^4 = 22, \text{ но } \sqrt[4]{22} \notin \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a + b = \rho^4 \Rightarrow a + b + 3 = 19 \Rightarrow a + b = 16, \Rightarrow \rho = 2.$$

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ a - b = 12 \end{cases} \quad 2a = 28 \Rightarrow a = 14$$

$$b = 16 - a = 2. \quad \Rightarrow \underline{a = 14, b = 2}$$









На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 2AC \Rightarrow 4AC^2 + AC^2 - 2 \cdot 2AC \cdot AC \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 6^2$$

$$8AC^2 = 6^2 \Rightarrow 2AB^2 = 6^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{6^2}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

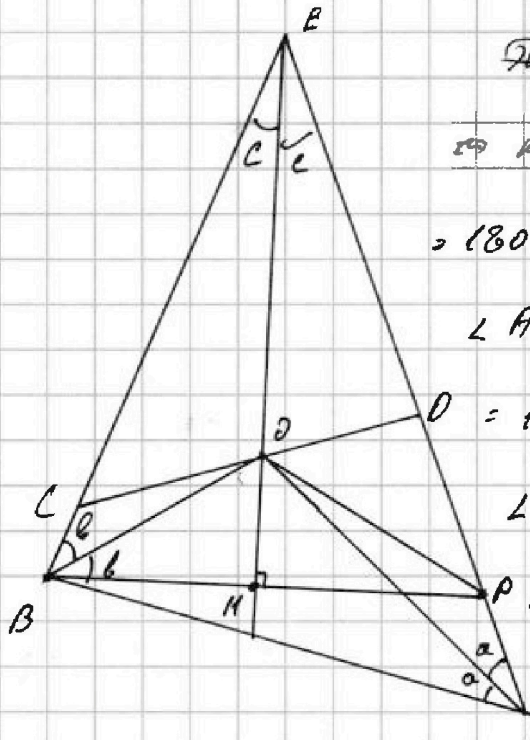


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что  $\angle FAB < \angle EBA$

то так  $\triangle BEP$  - равнос.  $\Rightarrow \angle ABE < \angle ADC$

$= 180^\circ$ ;  $\angle BAD + \angle BED = 180^\circ$ , то

$\angle ADC + \angle CDE = 180^\circ$  и  $\angle ECD + \angle BCD$

$= 180^\circ$ , так как они смежные.  $\Rightarrow$

$\angle EBA = \angle BDC$ ;  $\angle ECD = \angle BAB$ .

$AD$  - биссектр.  $\angle BAD$ ;  $BD$  - биссектр.

$\angle EBA$ , так  $O$  - центр впис.

Проведем  $BP \perp EO$   $\Rightarrow \triangle BEP$  - равнос., так  $EO$  - и бисс.

и высота  $\Rightarrow \triangle BOP$  - равнос., так для него  $EO$  -

и бисс. и  $BP$  мед. и высота.  $\Rightarrow \angle OBP = \angle OPB$

$\angle BOH = \angle COH - \angle COB = \angle EOP - \angle ECD + \angle EBO =$

$= \angle BEO + \angle CBO + \angle EBO - \angle ECD = c + b = \angle POH$

$\Rightarrow \angle POD = \angle HOP - \angle POH = \angle EDC + \angle BEO - \angle POH =$

$= 2b - b - c + c = b \Rightarrow \angle EPO = \angle DOP + \angle OPD \Rightarrow$

$\angle OPD = 2b - b = b \Rightarrow OP = DP$ . так  $\triangle BEP$  - равнос.

$\Rightarrow EB = EP = ED + DP = 12 \Rightarrow b$  в любом случае  $ED + DP = 12$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если в каждую деревню из любой можно попасть  
из любой.  $\Rightarrow$  это граф с 1 или 2 циклами и

без циклов, т.е. можно получить одинаковые

циклы несколько раз и поочередно новые маршруты

$\Rightarrow$  это дерево. В дереве на  $n$  верш. ровно

$n-1$  дорога, т.е. дорог будет. Верш. с степ.

верш.  $= 1$  и можно её уда и соедин. с ост. верш.

и дорог. на 1  $\Rightarrow$  в конце мы придем к графу

$\Rightarrow$  пусть всего  $n$  городов.  $\Rightarrow$  число дорог

$$= n-1 \text{ и } 2 \frac{5+6+7+8+(n-4)}{2} = 2$$

$$2n-2 = 23+n \Rightarrow \boxed{n=25}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Если } \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{|x - y - 1|} = 2$$

$$\text{Или } \sqrt{-101} = \emptyset \Rightarrow |x - y - 1| \leq 1, \text{ т.к. } x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{целым. } \Rightarrow |x - y - 1| = 0 \text{ или } |x - y - 1| = 1.$$

$$\text{Если } |x - y - 1| = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y + 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y + 2 - 2y - y^2 + 2y - 1 - y^2} + \sqrt{1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2y^2 - 2y + 1} = 1 \Rightarrow -2y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\Rightarrow -2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ или } -2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

~~$$\text{Или } x = 0 \text{ и } y = -1; x = 1 \text{ и } y = 0$$~~

~~$$\text{Если } \Rightarrow x = 0 \text{ и } y = -1; x = 1 \text{ и } y = 0$$~~

$$\text{Если } |x - y - 1| = 1 \Rightarrow |x - y - 1| = \pm 1$$

$$\text{Если } x - y - 1 = -1 \Rightarrow x = y, \text{ но тогда}$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = -2x^2 < 0 \Rightarrow \text{какого-либо значения. Сумма}$$

$$\Rightarrow x - y - 1 = +1 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2y + 4 - 2y - y^2 - 4y - 4 - y^2} + \sqrt{1 - 1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2 - 4y} = 2 \Rightarrow -2y^2 - 4y = 4$$

$$y^2 + 2y + 2 = 0 \Rightarrow \text{по н. формуле } y = -1 \text{ (и } (y+1)^2 = -1 \Rightarrow$$

$$y = \emptyset \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ и } y = -1; x = 1 \text{ и } y = 0}$$

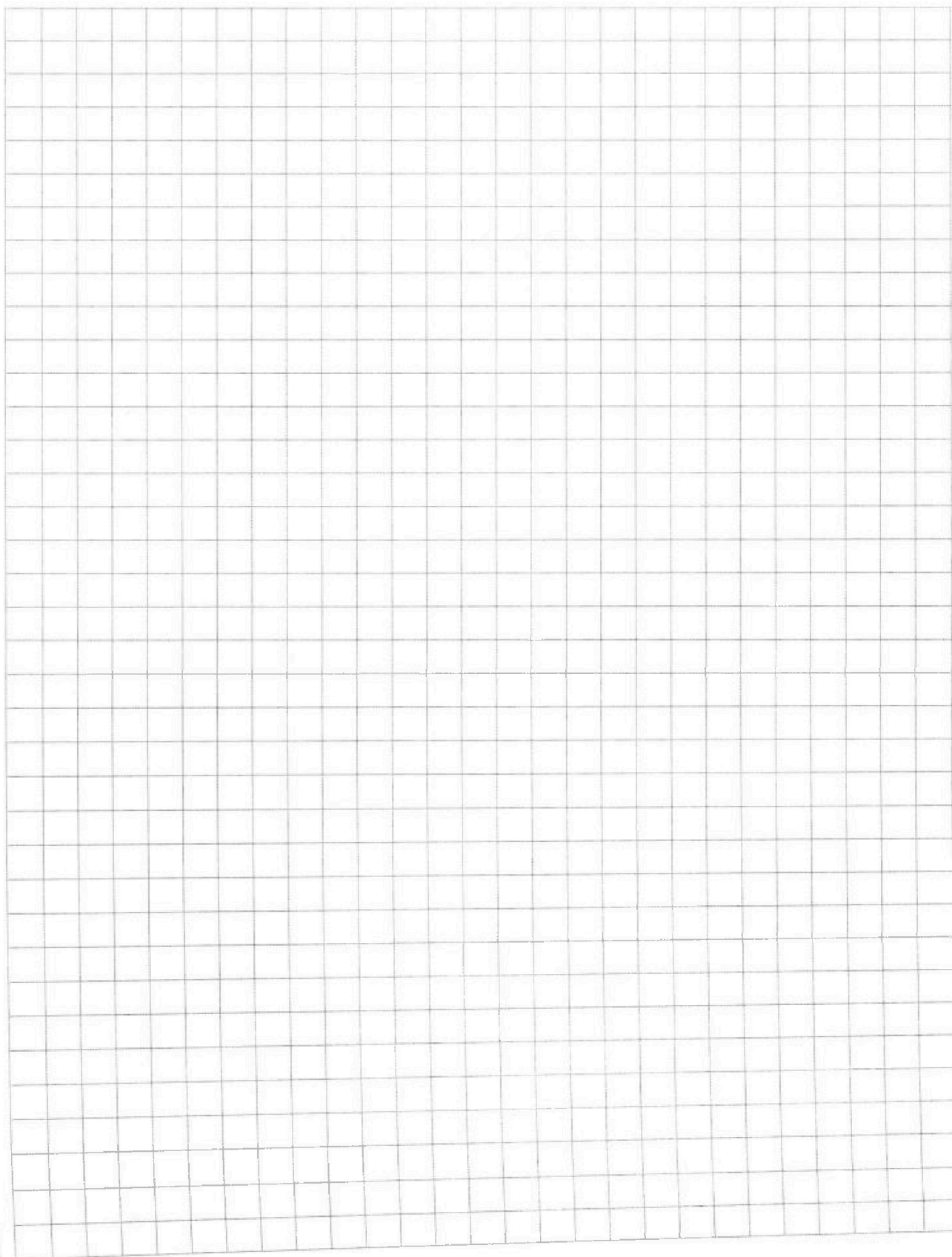


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





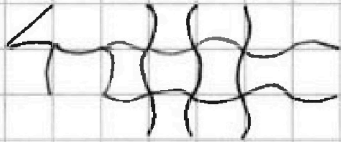
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пл-17



$$|x - y - 1| = 0$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 1$$

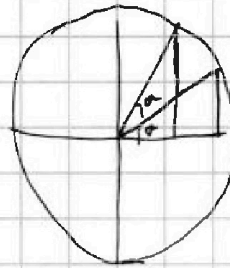
$$x = y + 1$$

$$2y + 2 - 2y - y^2 + 2y + 1 - y^2 = 1$$

$$2y = 2y^2 \quad y = y^2$$

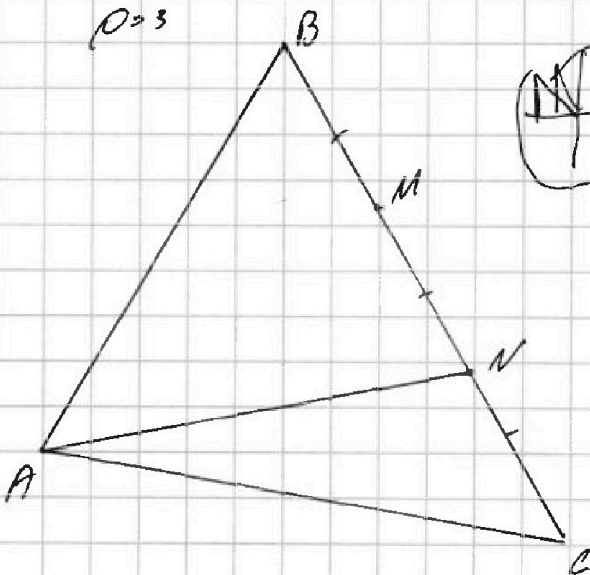
$$(x_1 - x)(x_2 - x) = 0$$

$$x_1 x_2 - x(x_1 + x_2) + x^2$$



САН

$\rho = 3$



$$(a - b)^2 + 4ab + 3a + 3b$$

$$4ab + 3a + 3b + 12^2$$

$$a(4b + 3) + 3b + 12^2$$

2

$$a(3 + a + b) + b(3 + a + b)$$

$$(a + b)(3 + a + b) = \rho \rho^2$$

$12^2 \quad \rho^2$



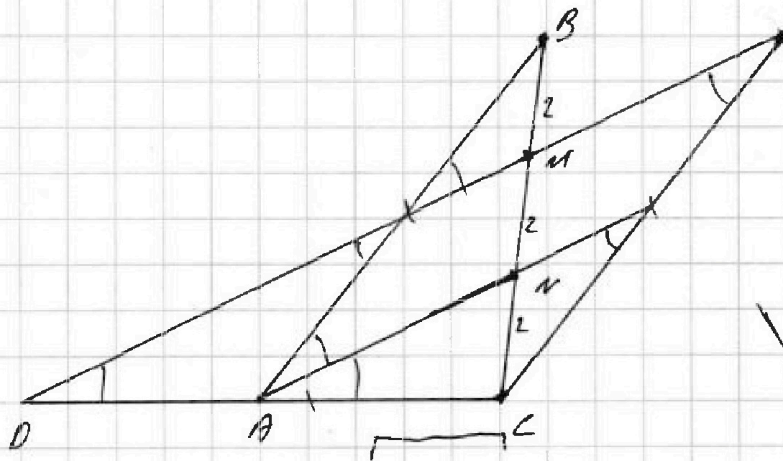
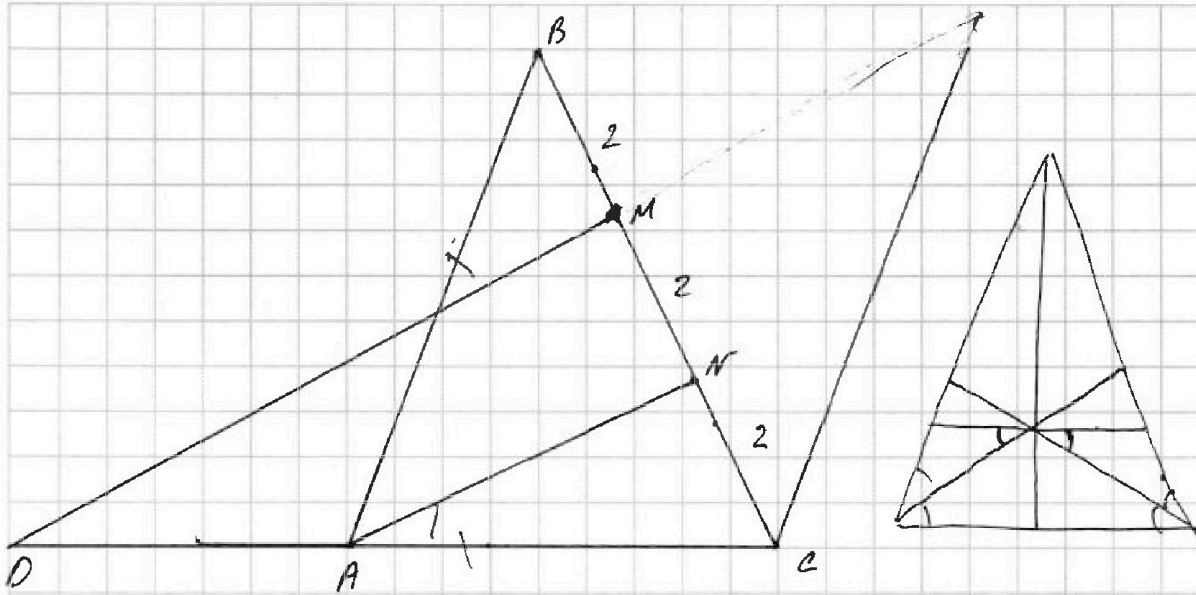


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$8 + 4 + 5 + 8$$

21

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
^	^	^		
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11-10
^	^	^	^	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \quad 2 \cdot 8 \cdot 2$$

$$11 \cdot 10 \cdot$$

$$11! = 8$$

$$11 - 4$$

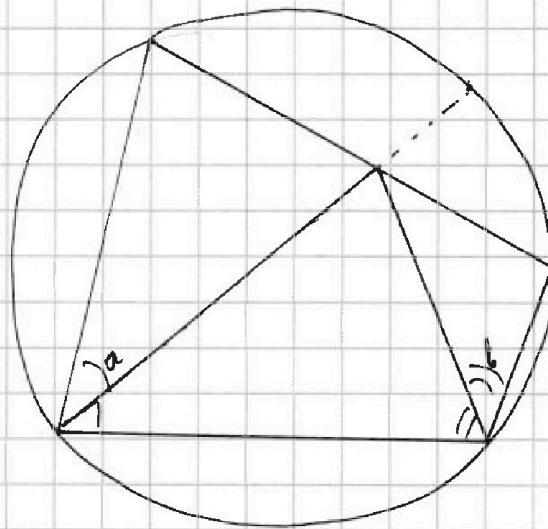
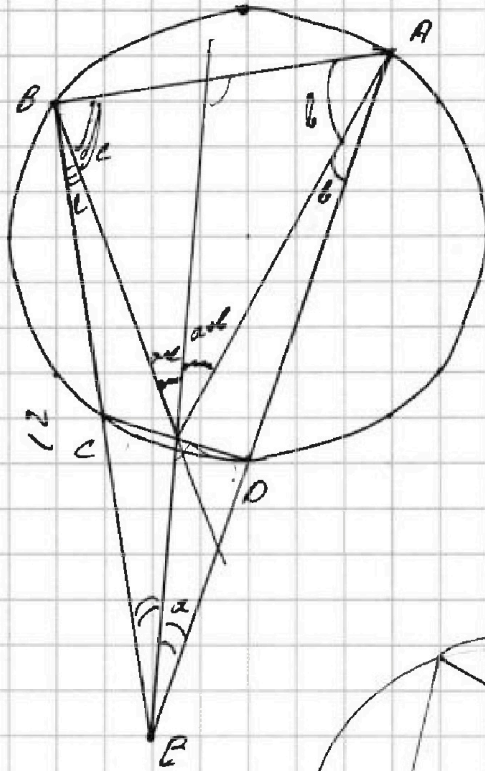


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



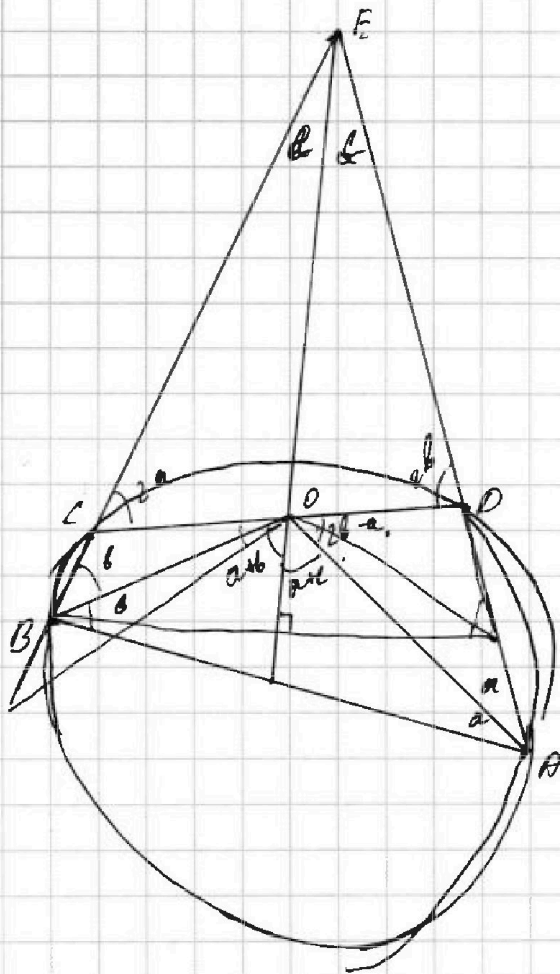


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$360 - (90 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + 180 - \alpha)$$

$$b + c - a$$

$$b + a - c$$

$$2b + a + c$$

