



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 12 - 12x$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_8 = -6x^2$$

Пусть d - разность прогрессии

$$\text{тогда } \frac{a_8 - a_2}{6} = d$$

$$d = \frac{-6x^2 + 12x - 12}{6} = -x^2 + 2x - 2$$

$$a_2 + 2d = a_4$$

$$12 - 12x + 2(-x^2 + 2x - 2) = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$12 - 12x - 2x^2 + 4x - 4 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

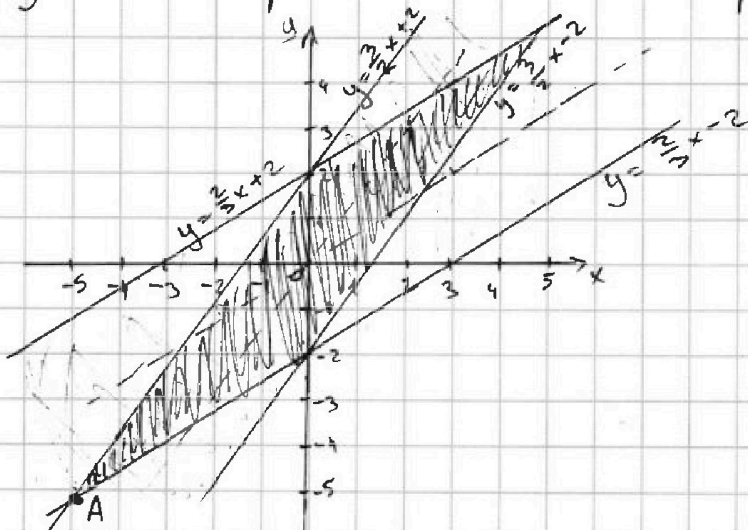
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 & (1) \\ |3x - 2y| \leq 4 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad |2x - 3y| \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y \leq 6, y \leq \frac{2}{3}x \\ -(2x - 3y) \leq 6, y > \frac{2}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x - 2, y \leq \frac{2}{3}x \\ y \leq \frac{2}{3}x + 2, y > \frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$(2) \quad |3x - 2y| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y \leq 4, y \leq \frac{3}{2}x \\ -(3x - 2y) \leq 4, y > \frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x - 2, y \leq \frac{3}{2}x \\ y \leq \frac{3}{2}x + 2, y > \frac{3}{2}x \end{cases}$$

Изобразим область решения систем на коорд. плоскости:



Заметим, что $10x + 5y = \min$ при $x = \min, y = \min$

В точке A значения x, y минимальны \Rightarrow значение $10x + 5y = \min$
Найдем координаты точки A:

$$\frac{3}{2}x + 2 = \frac{2}{3}x - 2$$

$$x = -4,8$$

$$y = \frac{3}{2}x + 2 = -5,2$$

$$10x + 5y = 10(-4,8) + 5(-5,2) = -74$$

Ответ: -74



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

$$A, B \text{ равны } 15q^2 \text{ и } 17p^2 \Rightarrow A, B \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m-2n-2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \Rightarrow m-2n, m-2n+13 \in \mathbb{N}$$

$$1) \begin{cases} A = 17p^2 \\ B = 15q^2 \end{cases}$$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

Защиты, то $m-2n$ и $m-2n+13$ — разной четности \Rightarrow
 $\Rightarrow 17p^2$ — четное $\Rightarrow p^2 : 2 \Rightarrow p = 2$ (т.к. p — простое)

$$m-2n < m-2n+13 \Rightarrow \begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = 4 \end{cases} \text{ — не возм.}$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} m-2n = 4 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases}$$

$$B = mn(m-2n-2) = mn(4-2) = 2mn = 15q^2 \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q = 2 \text{ (т.к. } q \text{ — простое)}$$

$$\text{получаем: } \begin{cases} 2mn = 60 \\ m-2n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mn = 30 \\ m = 4+2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 + 2n - 15 = 0 \\ m = 4+2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ m = 10 \\ n = -5 \\ m = -6 \end{cases} \text{ — не подходит}$$

$$2) \begin{cases} A = 15q^2 \\ B = 17p^2 \end{cases} \\ (m-2n)(m-2n+13) = 15q^2$$

$$m-2n, m-2n+13 \text{ разной четности } \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q = 2$$

$$\text{Всуда } (m-2n)(m-2n+13) = 60$$

$$(m-2n)^2 + 13(m-2n) - 60 = 0$$

$$D = 169 + 240 = 409 \neq k^2 \Rightarrow \text{нет решений в натуральных числах}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, 2 случая невозможны
Ответ: $m = 10$; $n = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) по т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC =$$

$$= 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 360 + 24 = 384$$

$$BC = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$$

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего узлов клеток: 64

Кол-во способов выбрать 2 из них: C_{64}^2

При этом каждый несимметричный относительно центра вариант выбора узлов или углов по 4 раза (4 поворота на 90°), а каждый симметричный относительно центра — по 2 раза (т.к. повороты на 180° совпадают)

Кол-во способов выбрать 2 симметричных друг другу относительно центра узла: 32,
т.к. достаточно выбрать 1 узел в правой половине квадрата — 2 получатся симметрией из 1-го

тогда всего способов:

$$\frac{C_{64}^2 - 32}{4} + \frac{32}{2} = \frac{2C_{64}^2 + 32}{4} = \frac{64 \cdot 63 + 32}{4} = 1016$$

Ответ: 1016

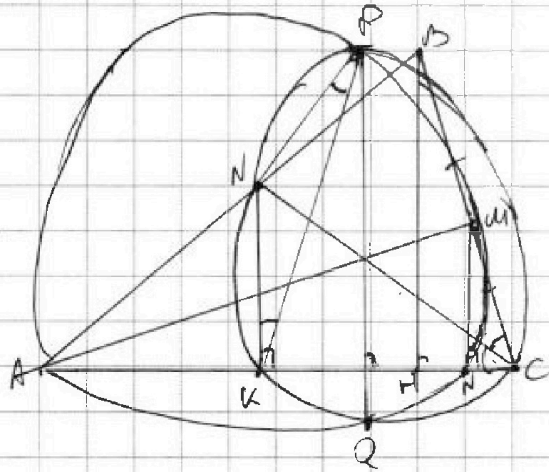


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\perp MN$ - диаметр $\Rightarrow MN \perp AC$

~~то и диаметр BD~~

$\triangle BHC \sim \triangle MNC \Rightarrow MN = \frac{1}{2} BH$

т.е. $\omega \cap AC = K$

$\angle NPK = \angle NCK = \angle NCP = \angle NKP \Rightarrow \triangle NKP$ - р.б.; $NK = KP$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

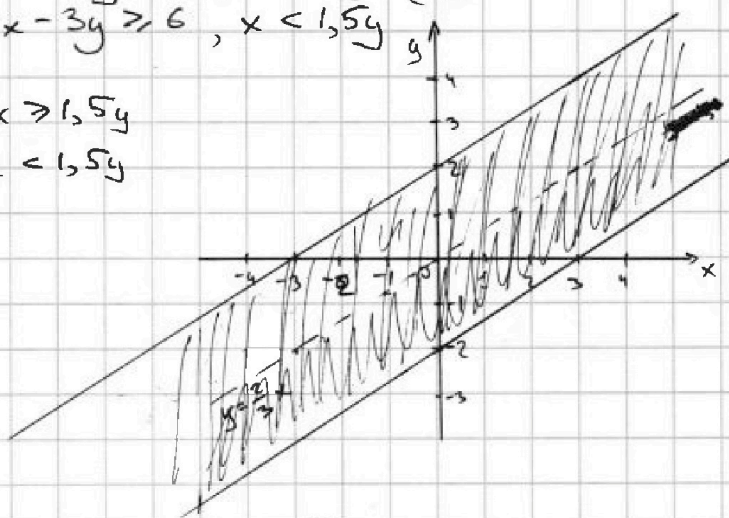
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 & (1) \\ |3x - 2y| \leq 4 & (2) \end{cases}$$

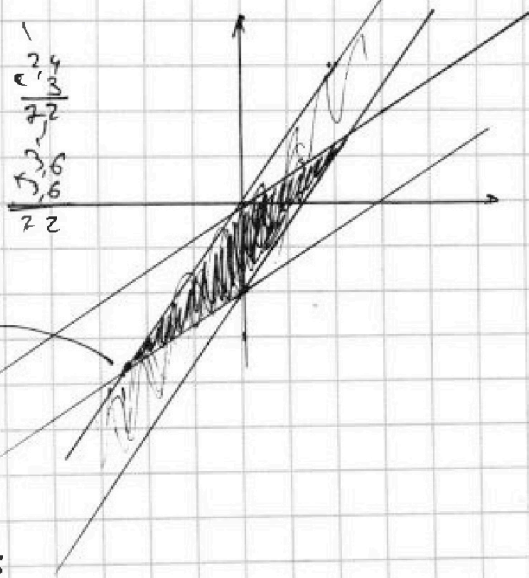
$$(1) \quad |2x - 3y| \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y \leq 6, & x \geq 1,5y \\ 2x - 3y \geq 6, & x < 1,5y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x - 2, & x \geq 1,5y \\ y \leq \frac{2}{3}x - 2, & x < 1,5y \end{cases}$$



$$(2) \quad |3x - 2y| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y \leq 4, & x \geq \frac{2}{3}y \\ 3x - 2y \geq 4, & x < \frac{2}{3}y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x - 2, & x \geq \frac{2}{3}y \\ y \leq \frac{3}{2}x - 2, & x < \frac{2}{3}y \end{cases}$$



$$|2 \cdot (-2,4) - 3 \cdot (3,6)| =$$

$$= |-4,8 + 10,8| = 6$$

$$|3x - 2y| =$$

$$= |3 \cdot (-2,4) - 2 \cdot (3,6)| =$$

$$= |-7,2 + 7,2| = 0$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{2}{3}y - 2$$

$$9x = 4y - 12$$

$$5x = -12$$

$$x = -2,4$$

$$y = \frac{3}{2} \cdot (-2,4) =$$

$$= -1,2 \cdot 3 = -3,6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 17p^2$$

$$m^2n - 2mn^2 - 2mn = 15q^2$$

$$m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) =$$

$$= (m - 2n)(m - 2n + 13) = 17p^2$$

$$\begin{cases} m - 2n = 17 \\ m - 2n + 13 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2n = 17 \\ m - 2n + 13 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 17 + 13 = 30 \text{ - не простое}$$

$$\begin{cases} m - 2n = 17p \\ m - 2n + 13 = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2n = -17 \\ m - 2n + 13 = -p^2 \end{cases} \Rightarrow -p^2 = 13 - 17 = -4 \Rightarrow p = 2$$

$$m - 2n = 17p$$

$$m - 2n + 13 = -p^2$$

$$m - 2n = 17p$$

$$m - 2n + 13 = -p^2$$

возможны случаи:

$$\begin{cases} m - 2n = 17 \\ m - 2n + 13 = p^2 \end{cases} \text{ - не имеет}$$

$$\begin{cases} m - 2n = a \\ m - 2n + 13 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2n = -b \\ m - 2n + 13 = -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - 2n = 17 \\ m - 2n + 13 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p = 2$$

$$\begin{cases} m - 2n = 1 \\ m - 2n + 13 = 17p^2 \end{cases} \Rightarrow 17p^2 = 14 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{14}{17}} \text{ - не простое}$$

$$\begin{cases} m - 2n = 17 \\ m - 2n + 13 = p \end{cases} \Rightarrow p = 30 \text{ - не простое}$$

$$\begin{cases} m - 2n = -17p \\ m - 2n + 13 = -p \end{cases} \Rightarrow -17p + 13 = -p \Rightarrow 16p = 13 \Rightarrow p = \frac{13}{16} \text{ - не простое}$$

$$\begin{cases} m - 2n = p \\ m - 2n + 13 = 17p \end{cases} \Rightarrow p + 13 = 17p \Rightarrow p = \frac{13}{16} \text{ - не простое}$$

$$\begin{cases} m - 2n = -17p^2 \\ m - 2n + 13 = -1 \end{cases} \Rightarrow -17p^2 + 13 = -1 \Rightarrow -17p^2 = -14 \Rightarrow p^2 = \frac{14}{17} \text{ - не простое}$$

$$\begin{cases} m - 2n = p^2 \\ m - 2n + 13 = 17p \end{cases} \Rightarrow p^2 + 13 = 17p \Rightarrow p = 2$$

тогда:

$$\begin{cases} m - 2n = p^2 \\ m - 2n + 13 = 17p \end{cases} \Rightarrow p = 2$$

$$\begin{cases} m - 2n = -17 \\ m - 2n + 13 = -p^2 \end{cases} \Rightarrow p = 2$$

$$\begin{cases} m - 2n = 4 \\ m - 2n = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - 2n = p^2 \\ m - 2n + 13 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2n = 4 \\ m - 2n = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$\begin{cases} m - 2n = p \\ m - 2n + 13 = 17p \end{cases} \Rightarrow p + 13 = 17p \Rightarrow 16p = 13 \Rightarrow p = \frac{13}{16}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

384 | 2.
192 | 2.
86 | 2.
48 | 2.
24 | 2.
12 | 2.
6 | 2.
3 | 3
-

$\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$
 $x \geq \frac{3}{2}y \quad | \cdot \frac{2}{3}$
 $\frac{2}{3}y \leq \frac{2}{3}x$
 $y \geq \frac{2}{3}x - 2$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $= -1$

$BC = ?$

$\frac{BX}{CX} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AB}{AC} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AB = \frac{1}{3} AC = 6$

$\cos 5x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2x =$
 $= 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot (-\frac{1}{9}) =$
 $= 360 + 24 = 384 \Rightarrow BC = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$

$\frac{18 \cdot 2}{8} = \frac{36}{8} = 4.5$

$\frac{18}{8} = 2.25$

$\frac{6}{18} \cdot 18 = 6$

$\frac{18}{18} = 1$

$\frac{18}{18} = 1$

$\frac{18}{18} = 1$

$\frac{18}{18} = 1$

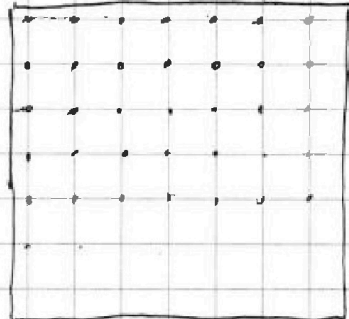
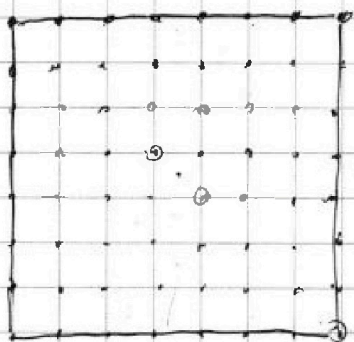


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



р.з
с.р.з

Каждый несимметричный выбор узлов для угла 4 раза (4 поворота на 90°)
Каждый симметричный выбор узлов для угла 2 раза (2 поворота на 180° совпадают)

$$12 - 12x + 2x^2 + 4x - 4 =$$

$$-2x^2 - 8x + 8 - x^4 + 8x^3 + 6x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

Симметрично выбрать: C_{32}^1
Достаточно выбрать 1 точку в правой половине квадрата, левая получается из нее

Всего вариантов: $\frac{C_{64}^1}{2} + \frac{C_{64}^2 - C_{32}^1}{4} = \frac{C_{64}^2}{4} + C_{32}^1 =$

$$= \frac{64 \cdot 63}{8} + 32 = 8 \cdot 63 + 32 = 532$$

$$\begin{array}{r} \times 63 \\ 8 \\ \hline 504 \\ + 32 \\ \hline 532 \end{array}$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \quad | : x^2$$

$$x^2 + 8x + 18 + \frac{8}{x} - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{8}{x^2} + 8 \left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3}y + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}$$

$$x + 4 + 5 - 2\sqrt{(x+4)(3-y)} = x$$

$$(x(x+4))^2 = x^2(x+4)^2 + 2(-x^2 + 2x - 2)^2$$

$$= x^2(x+4)^2 + 2x^2 - 4x + 4$$

$$-2: \quad 12 + 24 = 36 = a^2$$

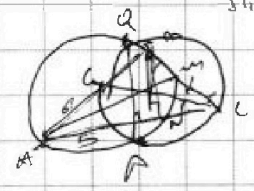
$$(4-8)^2 = 16$$

$$-5 \cdot 4 = -20$$

$$\frac{16+12-14}{2} = 4$$

$$x + 8x^3 + 16x^2 + x^2 - 2x + 2 = -x^2 - 4x + 4$$

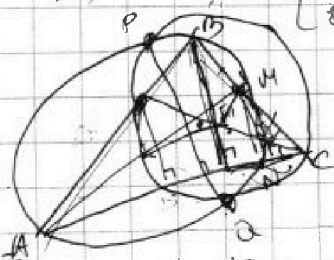
$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 = -2x^2 + 2$$



$$x^2 + 2x - 2$$

$$\begin{cases} 2 = a - k \\ 8 = a + k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 10 &= 2a \\ a &= 5 \end{aligned}$$



$$\frac{12 - 12x - 6x^2}{2} = -3x^2 - 6x + 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) y < 0 \Rightarrow \frac{2}{3}y \geq 1,5y \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}y$$

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y \geq 6 \\ 2x - 6 \geq 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ y \geq x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x - 2 \geq y \\ \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}y > -2$$

$$y > -6 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \cdot (-6) = -4$$

$$\begin{cases} 10x + 5y = k \\ y = \frac{1}{5}k - 2x \end{cases}$$

$$2x + y \geq k$$

$$y \geq k - 2x$$

$$\begin{aligned} 1) & |2x - 3y| \leq 6 \\ x \geq \frac{2}{3}y & \quad 2x - 3y \leq 6 \quad y \geq \frac{2}{3}x - 2 \\ x < \frac{2}{3}y & \quad 3y - 2x \leq 6 \quad y \leq 2 + \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 2 & \leq y \leq 2 + \frac{2}{3}x \\ - (2x - 3y) & \leq 6 \\ = 3y - 2 & \leq 6 \\ y & \leq \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{from } x \geq \frac{2}{3}y: & \quad 2x - 3y \leq 6 \\ y \geq \frac{2}{3}x - 2 & \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}y - 2 = \frac{4}{9}y - 2 \\ 0 & \geq -2 \Rightarrow \text{всегда верно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 2 & = \frac{2}{3}x - 2 \quad | \cdot 6 \\ 8x + 12 & = 4x - 12 \\ x & \geq -24 \\ 5x & = -24 \end{aligned}$$

$$x \in \left[-\frac{24}{5}, -\frac{48}{5}\right] = [-4,8; -9,6]$$

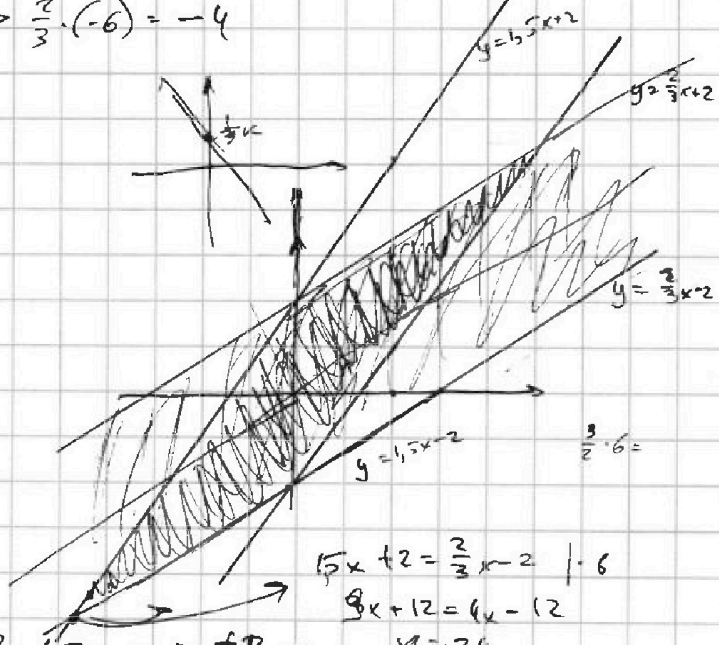
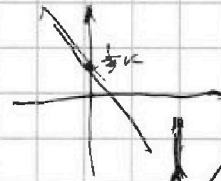
$$y = -4,8 \cdot 1,5 + 2 = -5,2$$

$$\begin{aligned} 2) & |3x - 2y| \leq 4 \\ x \geq \frac{2}{3}y & \quad 3x - 2y \leq 4 \quad y \geq 1,5x - 2 \\ x < \frac{2}{3}y & \quad 2y - 3x \leq 4 \quad y \leq 2 + 1,5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x = -4,8 \\ & y = -5,2 \\ & |2 \cdot (-4,8) - 3 \cdot (-5,2)| = \\ & |-9,6 + 15,6| = 6 \\ & |3 \cdot (-4,8) - 2 \cdot (-5,2)| = \\ & |-14,4 + 10,4| = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{for } (2x+y) = (-4,8 \cdot 2 - 5,2) \cdot 5 = \\ & = \left(\frac{48}{5} - \frac{26}{5}\right) \cdot 5 = -48 - 26 = \\ & = -74 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ +4,8 \\ \hline 1,5 \\ \hline 24 \\ +48 \\ \hline 72 \\ \hline 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 4,8 \\ +4,8 \\ \hline 9,6 \\ \hline 52 \\ \hline 156 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 1,5 \\ \hline 3 \\ \hline 14,4 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

$$10x+5y \rightarrow \min$$

$$5(2x+y) \rightarrow \min$$

(1) $|2x-3y| \leq 6$

если $2x-3y \geq 0 \Rightarrow x \geq 1.5y$,
то $3x-2y \geq 0$, т.к. $x \geq 1.5y > \frac{2}{3}y$

$$2x \geq 3y \quad x \geq 1.5y$$

$$2x-3y \leq 6$$

1) $\begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 3x-2y \leq 4 \end{cases}$

~~$2x \geq 1.5y$~~ ~~$2x \geq 1.33y$~~ $x \geq 1.5y$ $x \geq \frac{2}{3}y$

$$5x-5y \leq 10$$

$$1.5y - \frac{2}{3}y = (\frac{3}{2} - \frac{2}{3})y = \frac{5}{6}y$$

$$x-y \leq 2$$

$$10x-15y \leq 50$$

$$5(2x+y) \geq 5y \Rightarrow 2x+y \geq 4y \Rightarrow x \geq -3y$$

$$5x-5y \leq 10$$

$$5x-5y \leq 10$$

$$x-y \leq 2$$

$$x-y \leq 2$$

$$y \geq x-2$$

$$y \geq x-2$$

$$y \geq 1.5y-2$$

$$y \geq 1.5y-2$$

$$0.5y \geq -2$$

$$y \geq -4$$

$$y \geq -4$$

$$y = -4, x = -6$$

2) $2x-3y$

1.1) $y \geq 0 \Rightarrow 1.5y \geq \frac{2}{3}y \Rightarrow x \geq 1.5y \geq 0$

тогда: $x-y \leq 2$

$$y \geq x-2 \geq 1.5y-2$$

$$y \geq -4 \text{ — вышесказанное при } y \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$2x+y \geq 2x+x-2 = 3x-2$$

$$10x \quad 10x+5y \geq 0 \text{ при } x, y \geq 0$$

$$\frac{10}{5}x - \frac{15}{5}y = 2x-3y$$

$$\frac{10}{5}x - \frac{15}{5}y = 2x-3y$$

$$-48 + 26 = -22$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 16x - 4 = 0$$

$$x^4 + (2x)^3 + 5 \cdot (2x)^2 + 2 \cdot 2x - 4 = 0$$

$$x^4 + 2x(4x^2 + 10x + 2) - 4 = 0$$~~

$$x = -4:$$

$$4^4 - 8 \cdot 4^3 + 20 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 4 = 0$$

$$4^4 - 2 \cdot 4^4 + 20 \cdot 4^2 - 4^2 - 4 = 0$$

$$-4^4 + 18 \cdot 4^2 - 4 = 0$$

$$-256 +$$

$$256 - 512 + 320 - 16 - 4$$

\neq

$$(a+b)^4 =$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 +$$

$$+ 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 2ab^3 +$$

$$+ a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$4x^3 \cdot 2$$

~~$$16 \cdot 25 = 400$$~~

~~$$16$$~~

$$25$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 18 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$108$$

$$18$$

$$288$$

$$11$$

$$256$$

$$+ 288$$

$$544$$

$$+ 512$$

$$+ 32$$

$$8$$

$$Q_1 = 12 - 12x$$

$$\sqrt{12 - 12x + 2(-x^2 + 2x - 2)} =$$

$$= x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$12 - 12x + 2x^2 + 4x - 4 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x = -8:$$

$$8^4 - 8 \cdot 8^3 + 18 \cdot 8^2 - 8^2 - 8 = 0$$

$$17 \cdot 8^2 - 8 = 0$$

$$4^4 - 8 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 8$$

$$256 - 512 + 288 - 32 - 8 =$$

$$= 544$$

$$Q_1 = 12 - 12x + x^2 - 2x + 2 =$$

$$= x^2 - 14x + 14$$

$$d = -x^2 + 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 2) =$$

$$= -(x-1)^2 + 1 =$$

$$= -(x-1)^2 - 1$$

$$\frac{-6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2}{4} = -x^2 + 2x - 2$$

$$-x^4 - 8x^3 - 22x^2 = -4x^2 + 8x - 8$$

~~$$12x - 32x^2$$~~

$$648 \sqrt{8}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}$$

$$x = -58$$

$$x^4 - 418x^2 : 8$$

$$x^2(x^2 + 18) : 8$$

$$x^2 : 8$$

$$x^2 + 18 : 8$$

$$x^2 = 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \begin{cases} A = 15q^2 \\ B = 17p^2 \end{cases} \Rightarrow (m-2n)(m-2n+13) = 3 \cdot 5 \cdot q^2$$

$$\begin{matrix} 1, 9, 9^2, 3, 5, 39, \\ 3q^2, 5q, 5^2, 15q, 15 \end{matrix}$$

т.к. $m-2n < m-2n+13$, возможны случаи:

$$\begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 15q^2 \end{cases}$$

$q = \sqrt{\frac{m-2n+13}{15}}$ — не корень (т.к. $m-2n-2 < m \leq mn$, возможны варианты)

$$m-2n \quad mn \quad (m-2n-2) = 17p^2$$

$$\begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n-2 = 17p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn = 17p^2 \\ m-2n-2 = 17 \end{cases} \Rightarrow m-2n = 3$$

$$\begin{cases} mn = 17 \\ m-2n-2 = p^2 \end{cases} \Rightarrow m-2n = p^2 + 2$$

$$\begin{cases} mn = 17p \\ m-2n-2 = p \end{cases} \Rightarrow m-2n = p+2$$

$$\begin{cases} mn = p^2 \\ m-2n-2 = 17 \end{cases} \Rightarrow m-2n = 19$$

$$\begin{matrix} 16 \\ 13 \\ \hline 49 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 19 \\ \hline 32 \end{matrix}$$

(1) $A = (m-2n)(m-2n+13) = 3 \cdot 16 = 48 = 15q^2$ — нет простых корней

(2) $A = (p^2+2)(p^2+15) = 15q^2$

$$p^2 \nmid 15, p^2 \nmid 15 \Rightarrow p^2+15 \nmid p^2+2$$

$$p^2+2 = 15 \Rightarrow p = \sqrt{13} \text{ — не корень}$$

$$p^2+2 < p^2+15 \Rightarrow \begin{cases} p^2+2 = 15q \text{ — невозм.} \\ p^2+15 = q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p^2+2 = 15q^2 \text{ — невозм.} \\ p^2+15 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2+2 = 15q^2 \text{ — невозм.} \\ p^2+15 = 1 \end{cases}$$

(3) $A = (p+2)(p+15) = 15q^2$

$$p \nmid 15 \Rightarrow p+15 \nmid p+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p+2 = 15 \Rightarrow p = 13 \text{ — не корень.}$$

$$p^2 = p+15 \quad q = \sqrt{28}$$

$$p+15 > p+2 \Rightarrow \begin{cases} p+2 = 15q \text{ — невозм.} \\ p+15 = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} p+2 = 15q^2 \text{ — невозм.} \\ p+15 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{26^2 + 32}{4} =$$

=

(4) $A = 19 \cdot 32 = 15q^2$ — нет простых корней

$$\begin{array}{r} 21 \\ 11 \times 64 \\ \hline 132 \\ 384 \\ \hline 1002 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4064 \quad | \quad 4 \\ \hline 1626 \\ \hline 6 \\ \hline 24 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m^2h - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2) = 15q^2 = 3 \cdot 5 \cdot q^2$$

$$1) m - 2n = 4 \Rightarrow$$

$$(m-2)(n+1) = 15 \cdot 4 = 60$$

$$x_1 = 1+5=6$$

n =

$$\Rightarrow B = mn(4+2) = 6mn = 60$$

$$\begin{cases} mn = 10 \\ m - 2n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4+2n \\ (4+2n)n = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4+2n \\ 4n+2n^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4+2n \\ n^2+2n-5 = 0 \end{cases}$$

$$D_1 = 15+6$$

нет реш. в \mathbb{N} -целых

$$(2) m - 2n = -17$$

$$B = mn(-17-2) =$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2h - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

$$m, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A = 17p^2 \\ B = 15q^2 \\ A = 15q^2 \\ B = 17p^2 \end{cases} \Rightarrow A, B \in \mathbb{N} \Rightarrow m-2n-2 \in \mathbb{N} \Rightarrow m-2n \geq 2$$

$$1) \begin{cases} A = 17p^2 \\ B = 15q^2 \end{cases}$$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

т.к. $m-2n+13 > m-2n$, рассмотрим случаи:

$$\begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 17p^2 \end{cases}$$

$$p = \sqrt{\frac{13}{17}} - \text{не полн.}$$

$$\begin{cases} m-2n = p^2 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 = 4 \\ p = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n = p \\ m-2n+13 = 17p \end{cases}$$

$$16p = 13 \Rightarrow p = \frac{13}{16} - \text{не полн.}$$

$$\begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 = 30 \\ p = \sqrt{30} - \text{не полн.} \end{cases}$$

Тогда $p=2: m-2n=4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = mn(m-2n-2) = 2mn = 15q^2 \Rightarrow q: 2$$

$$q - \text{простое} \Rightarrow q = 2$$

тогда имеем:

$$\begin{cases} 2mn = 60 \\ m-2n = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m = 4+2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n^2 + 4n - 30 = 0 \\ m = 4+2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2 + 2n - 15 = 0 \\ m = 4+2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ m = 10 \\ n = -5 \\ m = -6 \end{cases} - \text{не полн.}$$

$$\begin{cases} x(x+13) = 60 \\ x^2 + 13x - 60 = 0 \end{cases}$$

$$D = 169 + 240 = 409$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ 21 \\ \hline 63 \end{array}$$