



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



† 1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

† 3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.

† 4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

† 6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $-2; -2 - \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}$

Пусть  $d$  - это разность арифметической прогрессии.

Тогда  $(2-2x+2d) = (x^2+4x)^2$ ,  $(x^2+4x)^2 + 4d = -6x^2$

$\Rightarrow 2d = (x^2+4x)^2 + 12x - 12 \Rightarrow 4d = 2(x^2+4x)^2 +$

$+ 24x - 24 \Rightarrow 3(x^2+4x)^2 + 24x - 24 = -6x^2$

$\Rightarrow (x^2+4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow (x^2+4x)^2 + 2(x^2+4x) - 8 = 0$

$-8 = 0$ . Пусть  $t = x^2+4x$ . Тогда  $t^2 + 2t - 8 = 0$

$\Rightarrow (t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2$  или  $t = -4$

$t = 2$

$t = -4$

$x^2+4x = 2$

$x^2+4x = -4$

$x^2+4x-2 = 0$

$x^2+4x+4 = 0$

$D = 16 + 8 = 24$

$(x+2)^2 = 0$

$x = -2$

$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{2} = -2 + \sqrt{6}$

$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{2} = -2 - \sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $-25 - \frac{1}{3}$

$$1) \begin{cases} 0 \leq 2x - 3y \leq 6 \\ 0 \leq 3x + 2y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x - y \leq 2$$

$$\begin{aligned} 0 \leq (2x - 3y)^2 \leq 36 &\Rightarrow -16 \leq 4x^2 - 12xy + 9y^2 + \\ -16 \leq (3x - 2y)^2 \leq 0 &\Rightarrow 9x^2 + 12xy - 4y^2 \leq 36 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -16 \leq -5x^2 + 5y^2 \leq 36(1) \Rightarrow \frac{16}{5} \geq (x-y)(x+y) \geq \frac{36}{5}$$

$$\Rightarrow x+y \geq -\frac{18}{5} \quad \Rightarrow 3x+2y \geq -2 + (-\frac{18}{5}) = -\frac{28}{5}$$

$$\Rightarrow 3x \geq -\frac{28}{5} \quad \Rightarrow x \geq -\frac{28}{15} \quad \Rightarrow 5x+5(x+y) \geq$$

$$2 \cdot (-\frac{28}{5}) + (-18) = -25 - \frac{1}{3}$$

(1) работает при любых  $x, y$ , удовлетворяющих условиям заз

$$2) \begin{cases} 0 \leq 3y - 2x \leq 6 \\ 0 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x + y \leq 10$$

$$\begin{cases} 0 \leq 3y - 2x \leq 6 \\ -4 \leq 2y - 3x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq 5y - 5x \leq 6$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5y^2 \quad (x-y)(x+y)$$









На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(5) Пусть  ~~$m = 17p$~~   $m - 2n + 13 = p \Rightarrow m - 2n = 17p$

$\Rightarrow 17p + 13 = p \Rightarrow 16p = -13$  ?! Противоречие

$\Rightarrow$  если  $A = 17p^2$ ,  $B = 15q^2$ , то  $(m, n)$  может быть только  $(10, 3)$

Пусть  $A = 15q^2$ ,  $B = 17p^2 \Rightarrow mn(m - 2n - 2) = 17p^2$

~~или  $m = 1$ , то  $1 - 2n - 2 = m - 2n - 2 > 0 \Rightarrow m > 2n + 2$  ?! 4~~

~~Пусть  $m - 2n - 2 = 1$ , то  $m = 2n + 2$~~

Тогда либо  $m = 17$ , или  $n \geq 17$ , или  $m - 2n - 2 = 17$ , либо  $n = 1$

и  $m - 2n - 2$ . Пусть  $m = 17 \Rightarrow n(15 - 2n) = p^2$

$\Rightarrow n = p = 15 - 2n$ , или  $n = 1$ , или  $15 - 2n = 1$

$\Downarrow$   
 $n = \frac{15}{3} = 5$   
 $\Downarrow$

$A = 7 \cdot 20 \not\equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow (17, 5)$  не подходит

$\Downarrow$   
 $13 = p^2$  ?!  
противоречие

$\Downarrow$   
 $n = 7$   
 $\Downarrow$   
 $7 = p^2$  ?!  
противоречие

~~$(17, 5)$  подходит ( $A = 7$ )~~

Пусть  $n = 17 \Rightarrow m(m - 36) = p^2 \Rightarrow m - 36 = 1$ ,

т.к.  $m > m - 36 \Rightarrow m \geq 37 = p^2$  ?! противоречие

Пусть  $m - 2n - 2 = 17 \Rightarrow mn = p^2 \Rightarrow n = 1$ , т.к.

$m > 2n + 2 > n \Rightarrow m = 21 = p^2$  ?! противоречие.

Пусть  $m - 2n - 2 = 1 \Rightarrow m = 2n + 3 \Rightarrow (2n + 3)n = 17p^2$   
 $\Rightarrow m - 2n = 3$ ,  $m + 2n + 13 = 16 \Rightarrow A = 3 \cdot 2^4 \not\equiv 5 \pmod{5}$  противоречие.

Пусть  $n = 1 \Rightarrow m(m - 4) = 17p^2 \Rightarrow m - 4 = 1$ , или  $m - 4 = 17$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{или } m-4 \geq p, \text{ т.к. } m > m-4$$

$$\text{Пусть } m-4=1 \Rightarrow m=5 = 17p^2 \text{ ?! противоречие}$$

$$\text{Пусть } m-4=17 \Rightarrow m=21 \Rightarrow 17p^2=21 \text{ ?! противоречие}$$

$$\text{Пусть } m-4=p \Rightarrow m=p+4 \Rightarrow p^2+4p=17p^2 \Rightarrow$$

$$p+4=17p \Rightarrow 4=16p \text{ ?! противоречие}$$

$$\text{Пусть } m-4=p^2 \Rightarrow m=17 \Rightarrow p^2=13 \text{ ?! противоречие}$$

$$\Rightarrow A \neq 15q^2, B \neq 17p^2 \Rightarrow \text{подходит}$$

только (10, 3)





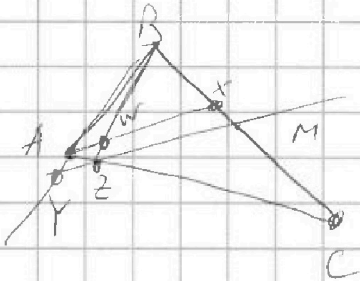
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $8\sqrt{6}$



Пусть  $BZ$  и  $AX$  пересекаются в  $W$ .

Т.к.  $MZ \parallel AX$ , то  $\frac{BM}{MX} = \frac{CZ}{ZA}$   
 $= \frac{12}{6} = 2$  и  $\frac{MZ}{AX} = \frac{2}{3}$

$BX + XM = BM = MC \Rightarrow BX = XM$

Т.к.  $AY \parallel MY$  и  $BX : XM = 1 : 1 \Rightarrow AB : AY = 2 : 1 \Rightarrow AB = 6$

и  $AX \parallel MY \Rightarrow WX : ZM = 1 : 2$ ,  $AW : YZ = 1 : 2$

Т.к.  $AB = AZ = 6$ ,  $AX$  - биссектриса, то  $AW$  - высота

в  $\triangle ABZ \Rightarrow BW = \sqrt{AB^2 - AW^2} = \sqrt{36 - \frac{9Z^2}{4}} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$

$\frac{AY}{MZ} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{WX}{MZ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AX - WX}{MZ} = 1$

$\Rightarrow \frac{AW}{MZ} = 1 \Rightarrow \frac{YZ}{2} = MZ \Rightarrow MZ = 4 \Rightarrow WX = 2$

$\Rightarrow BX = \sqrt{BW^2 + WX^2} = \sqrt{20 + 4} = \sqrt{24}$

$\Rightarrow BC = 4BX = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: ~~932~~ 512

Разобьем узлы на 16 групп по 4 узла, таких, что при повороте группа переходит сама в себя.

Посчитаем сколько способов перебраться <sup>два</sup> узла из одной группы. Групп 16, 4 ни одна не переходит в другую при повороте. Значит, в каждой группе ~~то~~ кол-во способов перебраться 2 узла равно 2; когда они соседние ~~или~~ <sup>или</sup> противоположные, т.к. любая пара соседних или противоположных переходит в любую другую пару этой же группы, а пара соседних в пару противоположных не может перейти. Значит,  $16 \cdot 2 = 32$  способов.

Теперь посчитаем кол-во способов перебраться 2 узла из разных групп.

Выбрать 2 различные группы можно

$\frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15 = 120$  способов. Кол-во способов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



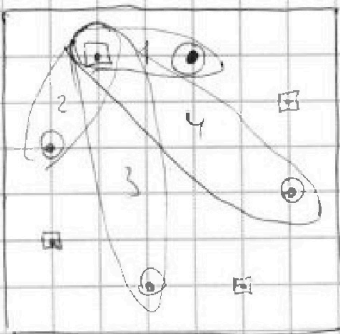
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

не перекрашивать два узла из разных выбранных групп ровно 4: соседние, противоположные, любые соседние или т.е. не соседние.

любые соседние или противоположные переходят при повороте в любые соседние или противоположные. Соседние не переходят в противоположные. Соседних и противоположных по 2 типа, которое переходит при повороте только в свой тип.



1 - соседние 1 типа.

2 - соседние 2 типа

3 - противоположные 1 типа.

4 - противоположные 2 типа.

$$\Rightarrow 120 \cdot 4 = 480 \text{ способов}$$

$$480 + 3 \cdot 2 \neq 512 \text{ способов}$$



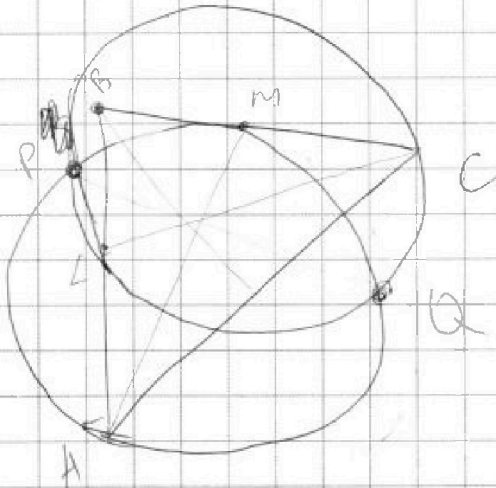


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

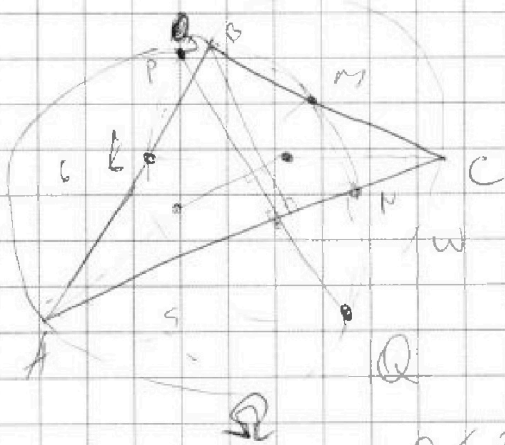
- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{BL}$$



$$CM^2 = MN^2 + NC^2$$

$$MN^2 = AM^2 - 25$$

$$x - y \leq 2$$

$$x \geq y - 2$$

$$0 \leq 2x + 3y \leq 6$$

$$|2x - 3y| \leq 6$$

$$|3x - 2y| \leq 4$$

$$0 \leq 3y - 2x \leq \frac{18}{5} - \frac{36}{5}$$

$$\frac{(x-y)(x+y)}{x^2} \geq -\frac{18}{5}$$

$$x+y \geq -\frac{18}{5}$$

$$5x+5y \geq -18$$

$$\frac{16}{5} \geq \frac{28}{5}$$

$$2x \geq 2y \geq \frac{28}{5}$$

$$x \geq \frac{28}{5}$$

$$5x \geq 28$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq - \\ 2 \end{array} \right.$$

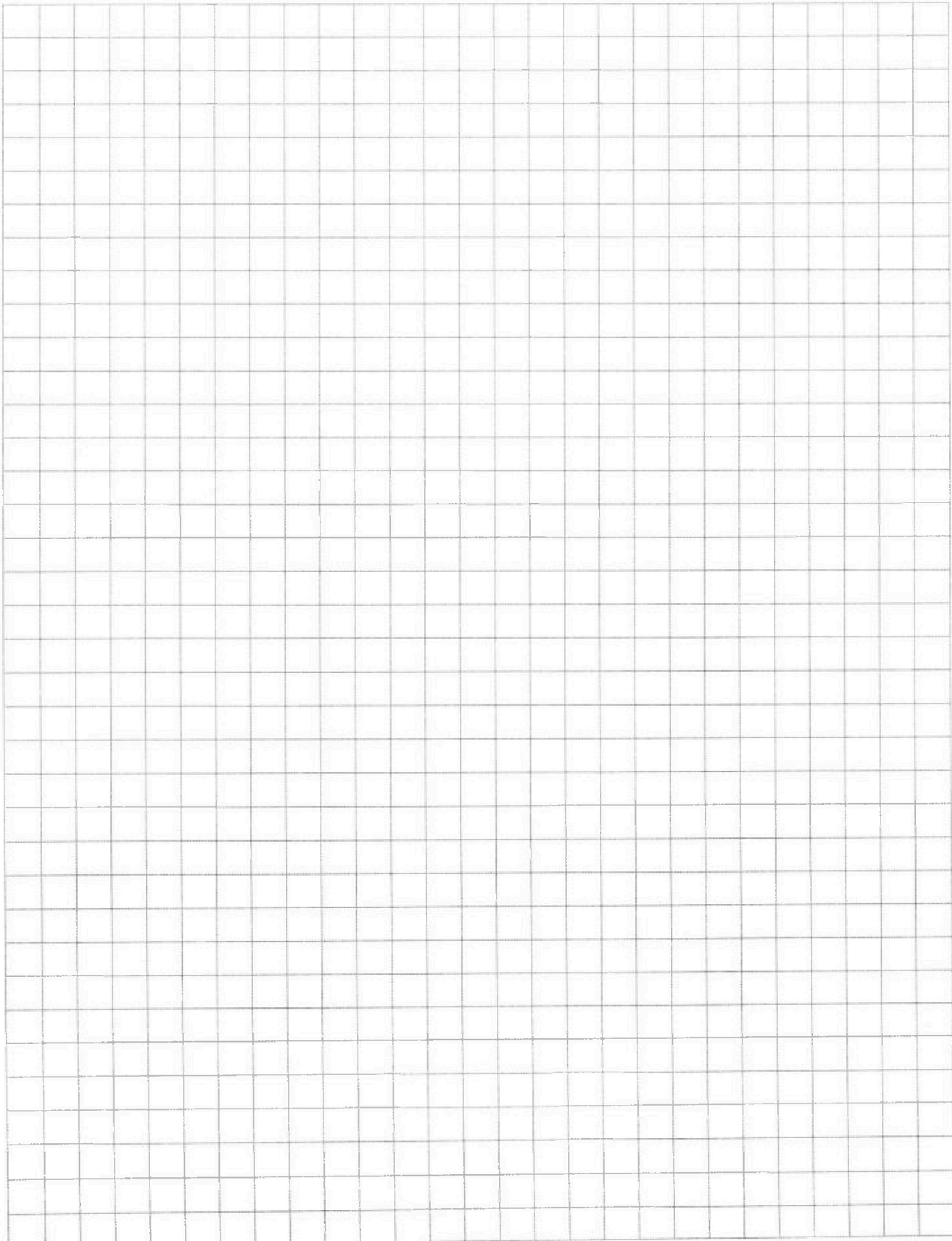


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & m=17 \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

$$m(17-2n+13) = p^2$$

$$n = 15 - 2n$$

$$n = 5$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 17p^2 \quad n=1 \quad 13=p^2!$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = 15q^2 \quad n=17 \quad m(m-36) = p^2$$

$$\frac{(m-2n)(m-2n+13)}{3} = \frac{17p^2}{15q^2}$$

$$m-36 = 1 \quad m = 37 = p^2!$$

$$mn(m-2n-2) = 18q^2$$

$$(m-2)(m+11) = 17p^2$$

$$m-2n-2 > 0$$

$$m-2n > 2$$

$$(2n+17)n \cdot 15 = 15q^2$$

$$m-2n = 17$$

$$m = 2n+17$$

$$(2n+17)n = q^2$$

$$n=1 \Rightarrow 2n+17 > n$$

$$n=q \Rightarrow 19 = q^2 ?!$$

$$2q+17 = q ?!$$

$$m-2n = 1$$

$$m-2n+13 = 17p^2$$

$$m-2n = 17$$

$$m-2n+13 = p^2$$

$$-m-2n = p$$

$$m-2n = 17p$$

$$m-2n = p^2$$

$$m-2n+13 = 17p$$

$$m-2n = 17p^2$$

$$m-2n+13 = 17$$

$$m-2n = 4$$

$$m = 2n+4$$

$$(2n+4)n \cdot 2 = 15q^2$$

$$q=2$$

$$(n+2)n = 15$$

$$n^2+2n-15=0$$

$$(n-3)(n+5)=0$$

$$\Rightarrow n=3, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N}$$

$$(3, 5)$$

$$m-2n = p$$

$$(2n+p)n \cdot (p-2) = 15q^2$$

$$p-2=1$$

$$p=3$$

$$(2n+3)n = 15q^2$$

$$d=3$$

$$2n^2+3n-9 \cdot 15 \geq 0$$

$$(2n-15)(n+9) = 0$$

$$n = 7,5 ?!$$

$$n=1$$

$$(2+p)(p-2) = 15q^2$$

$$p^2-p = 15q^2$$

$$p-2 = q$$

$$p+13 = 17p$$

$$13 = 16p$$

$$?!$$











На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:

Рассмотрим 4 случая: 1)  $2x-3y \geq 0$ ,  $3x-2y \geq 0$ ; 2)

$2x-3y \geq 0$ ,  $3x-2y \leq 0$ ; 3)  $2x-3y \leq 0$ ,  $3x-2y \geq 0$ ;

4)  $2x-3y \leq 0$ ,  $3x-2y \leq 0$ .

1.  $6 \geq 2x-3y \geq 0$ ,  $4 \geq 3x-2y \geq 0$

$$(2x-3y)^2 + (3x-2y)^2 \leq 36 + 16 = 52$$

$$(|2x-3y| + |3x-2y|)^2 \leq 100$$

$$(2x-3y)^2 + (3x-2y)^2 + 2|2x-3y| \cdot |3x-2y| \leq 100$$

$\wedge$   
52

$$\Rightarrow 2|2x-3y| \cdot |3x-2y| \geq 48 \Rightarrow |2x-3y| \cdot |3x-2y| \geq 24$$

$\geq 24$ , но с другой стороны  $|2x-3y| \cdot |3x-2y| \leq 6 \cdot 4 = 24$

$$\Rightarrow |2x-3y| \cdot |3x-2y| = 24$$

$$1) 6 \geq 2x-3y \geq 0, 4 \geq 3x-2y \geq 0 \Rightarrow 6x+6y-13xy = 24$$

$$x \geq \frac{3}{2}y$$

$$3+y \geq 0 \Rightarrow 3x+y \geq 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x=y$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} \geq 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$$

$$2(x^5 - y^5) + (2x-2y)(2x+2y) + \sqrt[4]{3}(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}) \leq 0$$

$$12 - x - y^2 \geq 0$$

$$x+4+3-y+25 - 2\sqrt{(x+4)(3-y)} +$$

$$12 \geq x+y^2$$

$$+ 2 \cdot 5\sqrt{x+4} - 2 \cdot 5\sqrt{3-y} =$$

$$= 4 \cdot (12 - x - y^2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$100x^2 - 25y^2$$

$$0 \leq 4x^2 - 12xy + 9y^2 \leq 36$$

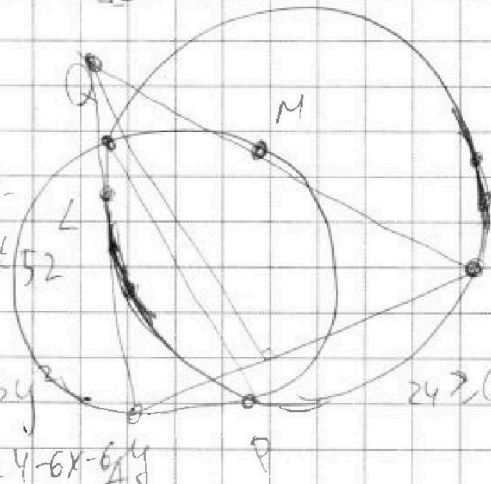
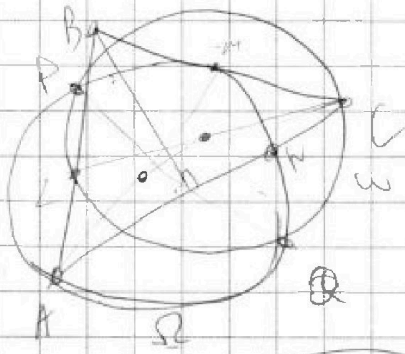
$$0 \leq 9x^2 - 12xy + 4y^2 \leq 16$$

$$-16 \leq -9x^2 + 12xy - 4y^2 \leq 0$$

$$-16 \leq -5x^2 + 5y^2 \leq 36$$

$$-\frac{16}{5} \leq y^2 - x^2 \leq \frac{36}{5}$$

$$\frac{16}{5} \geq x^2 - y^2 \geq -\frac{36}{5}$$



$$(5x^2 + 13y^2 - 20xy) \leq 52$$

$$13x^2 + 13y^2 - 20xy + 24 - 6x - 6y \geq 24$$

$$\frac{16}{5} \geq (x-y)(x+y)$$

$$13xy \geq -24 + 6x + 6y$$

$$24 = (2x-3y)(3x-2y) = 6x + 6y - 13xy$$

$$24 - 6x - 6y = -13xy$$

$$6x + 6y - 13xy - 24 = 0$$

$$y = x + y - \frac{13}{6}xy$$

$$4 + \frac{13}{6}xy + x = 2x + y$$

$$(x-y)^2 + 6(2x^2 + 2y^2 - x - y + 4) \leq 52$$

$$ac = -13$$

$$bc = 6$$

$$ad = 6$$

$$bd = -24$$

$$b = -4a$$

$$bc =$$

$$x + y = 4 + \frac{13}{6}xy$$

$$10x + 9y = 5x + 20 + \frac{65}{6}xy$$

$$= 5(x+y) + \frac{13}{6}xy$$

$$8x - (2y) \leq 6x + 6y - 13xy$$

$$2x \leq 19y - 13xy$$

$$2x \leq 2x + y - 13xy$$

$$0 \leq y - 13xy$$

$$2 \leq 19 - 13x$$

$$15 \leq 13$$

$$15x \leq 13$$