



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[6]{q^3} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}}$$

$$x \neq 3$$

$$\sqrt[6]{q^9} = \sqrt{x+4}$$

$$\sqrt[6]{q^{11}} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

ОДЗ:

$$(15x+6)(x-3)^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{2}{5}$$

$$x-3 < 0 \Rightarrow 15x+6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$x \neq 3$, т.к. тогда

$$x-3 > 0 \Rightarrow 15x+6 \geq 0 \Rightarrow x > 3 \quad (x-3)^3 = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cap (3; +\infty).$$

$$(15x+6)(x-3)^3 \text{ по знаку совпадает с } \frac{15x+6}{(x-3)^3}.$$

$$\text{Если } \sqrt[6]{q^3} = 0, \text{ то } 15x+6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} +$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{q^9} = 0 \Rightarrow 0 = x+4 \Rightarrow x = -4 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Противоречие} \\ \text{здесь} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \sqrt[6]{q^3} \neq 0, \sqrt[6]{q^9} \neq 0$, иначе $\sqrt[6]{q^3} = 0$, а это невозможно, аналогично $\sqrt[6]{q^{11}} \neq 0$, иначе $\sqrt[6]{q^3} = 0$.

$$\frac{\sqrt[6]{q^{11}}}{\sqrt[6]{q^3}} = \sqrt{(x-3)^4} \Rightarrow q^8 = \pm (x-3)^2 \Rightarrow q^8 = (x-3)^2, \text{ т.к.}$$

$$q^8 > 0, (x-3)^2 > 0 \Rightarrow \text{знак "+"}$$

$$\sqrt[6]{q^9} \cdot q^2 = \sqrt[6]{q^{11}}$$

$$(x+4)^8 \sqrt{(x-3)^4} = \sqrt{(x-3)} \cdot \sqrt{(15x+6)}.$$

$$(x+4)^4 \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{(x-3)(15x+6)}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x-3 > 0$: $x=3 \neq 0$ *из ОДЗ.*

$$(x+4)^4 \sqrt{(x-3)^2} = (x+4) \sqrt{x-3}$$

$$(x+4) \sqrt{x-3} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{15x+6}$$

$$x+4 = \sqrt{15x+6} \Rightarrow x+4 \geq 0$$

*и $15x+6 \geq 0$
из Т. Буаега.*

$$x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

*$x_1 = 5$
 $x_2 = 2$*

$x_1 = 5$ - *подходит*

$x_2 = 2$ - *не подходит из ОДЗ.*

2) $x-3 < 0$.

$$\sqrt[4]{(x-3)^2} = \sqrt{3-x}$$

$$(x+4) \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{15x+6}$$

~~$$x+4 = \sqrt{15x+6} \Rightarrow 15x+6 \geq 0$$~~

~~$$x^2 + 8x + 16 = -15x - 6$$~~

~~$$x^2 + 23x + 22 = 0 \Rightarrow x_3, x_4 = -22, -1$$
 из Т. Буаега~~

~~$$x_3 = -22$$
 - *не подходит*~~

~~$$x_4 = -1$$~~

~~$$x_3 = -22$$~~

~~$$x_4 = -1$$
 - *не подходит т.к. $x+4 \geq 0$*~~

$$x+4 = \sqrt{-15x-6} \Rightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ -15x-6 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 8x + 16 = -15x - 6$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = -22 \end{cases}$$

*из Т. Буаега
оба подходят.*

Ответ! $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -22$ - *подходят.*



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos 5x = 3 \cos 2x + p.$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) \\ &= \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)) = \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3) + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = p.$$

$$\cos x = t:$$

$$t(4t^2 - 3) + 6t - 3(2t^2 - 1) = p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t - p + 3 = 0.$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t - p + 3.$$

$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$, приравняем к 0, чтобы найти точки локально максимума и минимума.

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 12t + 3 = 0.$$

$$D = 144 - 144 = 0 \Rightarrow t = \frac{12 \pm 0}{2 \cdot 12} = \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 12 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f''(t) \begin{array}{c} + \\ + \end{array}$$

производная всюду ~~меньше~~ неотрицательна \Rightarrow

\Rightarrow функция ~~возрастает~~ не убывает, если

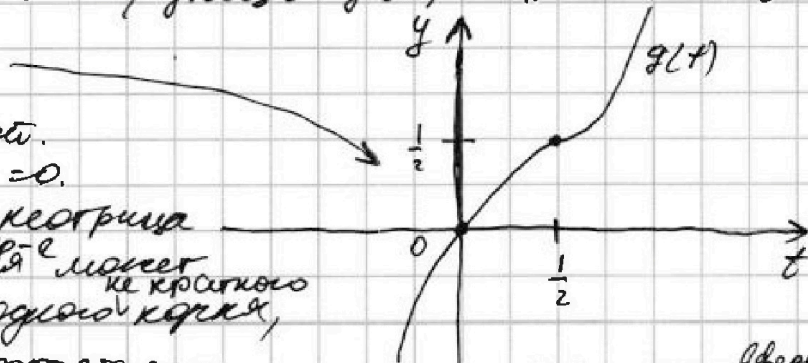
дл. $-p+3=0$, то. функция $g(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t$

Имеет дв. вид
примерно такой.

$$\text{т.к. } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, g(0) = 0.$$

т.к. производная неотрицательна, то функция ~~не~~ может иметь не более одного ~~кратного~~ корня,

\Leftrightarrow т.е. $-p+3$ просто сдвигает график $g(t)$ на $-p+3$ или вниз.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда найдём возможные значения для $-p+3$.

$t = \cos x \Rightarrow$ чтобы были корни $-1 \leq t \leq 1$

Сам корень $t = 1$:

$$f^*(t) = 0, \quad 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$4 - 6 + 3 + 3 - p = 0 \Rightarrow p = 4$$

Сам корень $t = -1$:

$$-4 - 6 - 3 + 3 - p = 0 \Rightarrow p = -10.$$

Получаем, что для p подходят любые значения от -10 до 4 . $p \in [-10, 4]$.

Решим это ур-е.

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0.$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + \frac{1}{2} = p - \frac{5}{2}.$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = p - \frac{5}{2} \Rightarrow t - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$4\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}\right) = p - \frac{7}{2}.$$

$$4\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = p - \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$t - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{2p-7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$t = \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

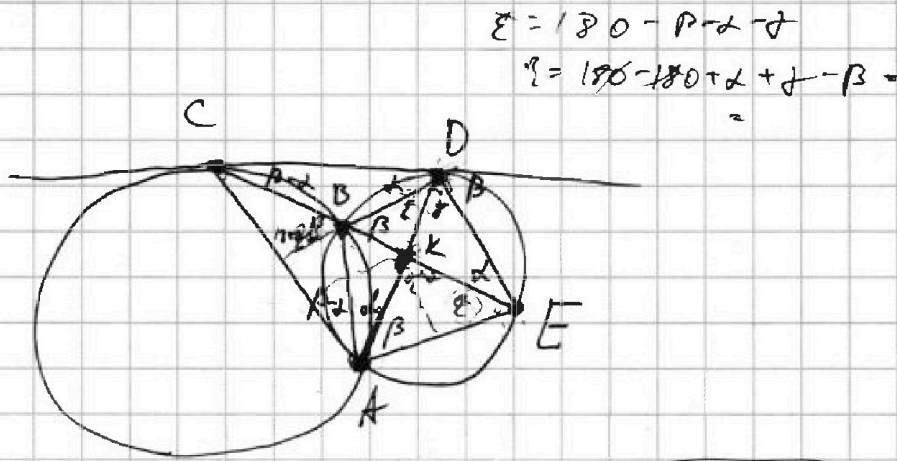


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AK - диаметр в $\triangle ACE \Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{AC}{AE}$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\triangle CDB \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{BC}$$

$$\frac{BD}{AE} = \frac{BE}{KE} \cdot \frac{BK}{AK}$$

$$\frac{AK}{KE} = \frac{BK}{DK}$$

$$\frac{DK}{KE} = \frac{BK \cdot BD}{AK \cdot AE}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Общее число способов посчитаем через формулу включения-исключения.

$$A = S_0 + S_1 + S_2 - S_0 \cap S_1 - S_0 \cap S_2 - S_1 \cap S_2 + (S_0 \cap S_1 \cap S_2)$$

где S_0, S_1, S_2 - число способов выбрать в клетках, где есть центральная и две соседние.

$S_0 = C_{150-100}^4$, т.к. можно разбить \square диагональю, при центральной симметрии каждая клетка из одной части окажется в другой части (так, это перейдут в самих себя нет).

$$S_1 = C_{150-100}^4 \rightarrow \text{т.к.}$$

$$S_2 = C_{150-100}^4 \rightarrow \text{т.к. при каждой симметрии}$$

средней линии
отк-ко центра, ~~т.к.~~ клетка из одной половинки перейдет в другую \Rightarrow можно выбрать 4 клетки в одной из половинок \Rightarrow остальные 4 находятся симметричным способом.

~~$S_0 \cap S_1 = C_{150-50}^2$~~ $S_1 \cap S_2 = C_{150-50}^2$
т.к. поставив 1 клетку, автоматически будет выбрана еще 3
т.к. каждая будет обязательно в одной из четвертей прямоугольника.



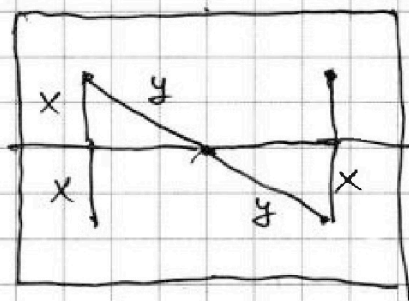
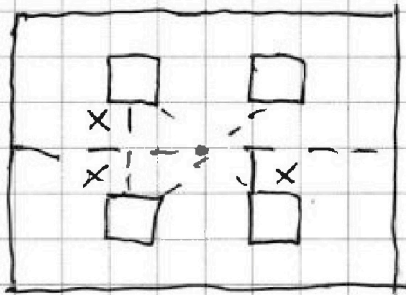
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ~~$S_1 \cap S_2$~~ симметрия
 отн-но одной из средних линий и отн-но центр-
 то не самое, что и симметрия отн-но ~~одной~~
 средних линий. \leftarrow Это видно из равенства



У них равны гипотенузы \wedge касая \Rightarrow равны и
 сами Δ .

~~$S_0 \cap S_1$~~

$$S_1 \cap S_2 = C_{150 \cdot 50}^2$$

$$S_0 \cap S_1 = C_{150 \cdot 50}^2$$

$$S_0 \cap S_2 = C_{150 \cdot 50}^2$$

В силу выше сказанного, ясно, что

$$S_1 \cap S_2 \cap S_0 = C_{150 \cdot 50}^2. \text{ Т.к. одна ясно, что}$$

одна из симметрий к нему не обладает.

$$A = 3 \cdot C_{150 \cdot 100}^4 - 3 \cdot C_{150 \cdot 50}^2 + C_{150 \cdot 50}^2 = 3 \cdot C_{150 \cdot 100}^4 - 2 \cdot C_{150 \cdot 50}^2$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{150 \cdot 100}^4 - 2 \cdot C_{150 \cdot 50}^2$$

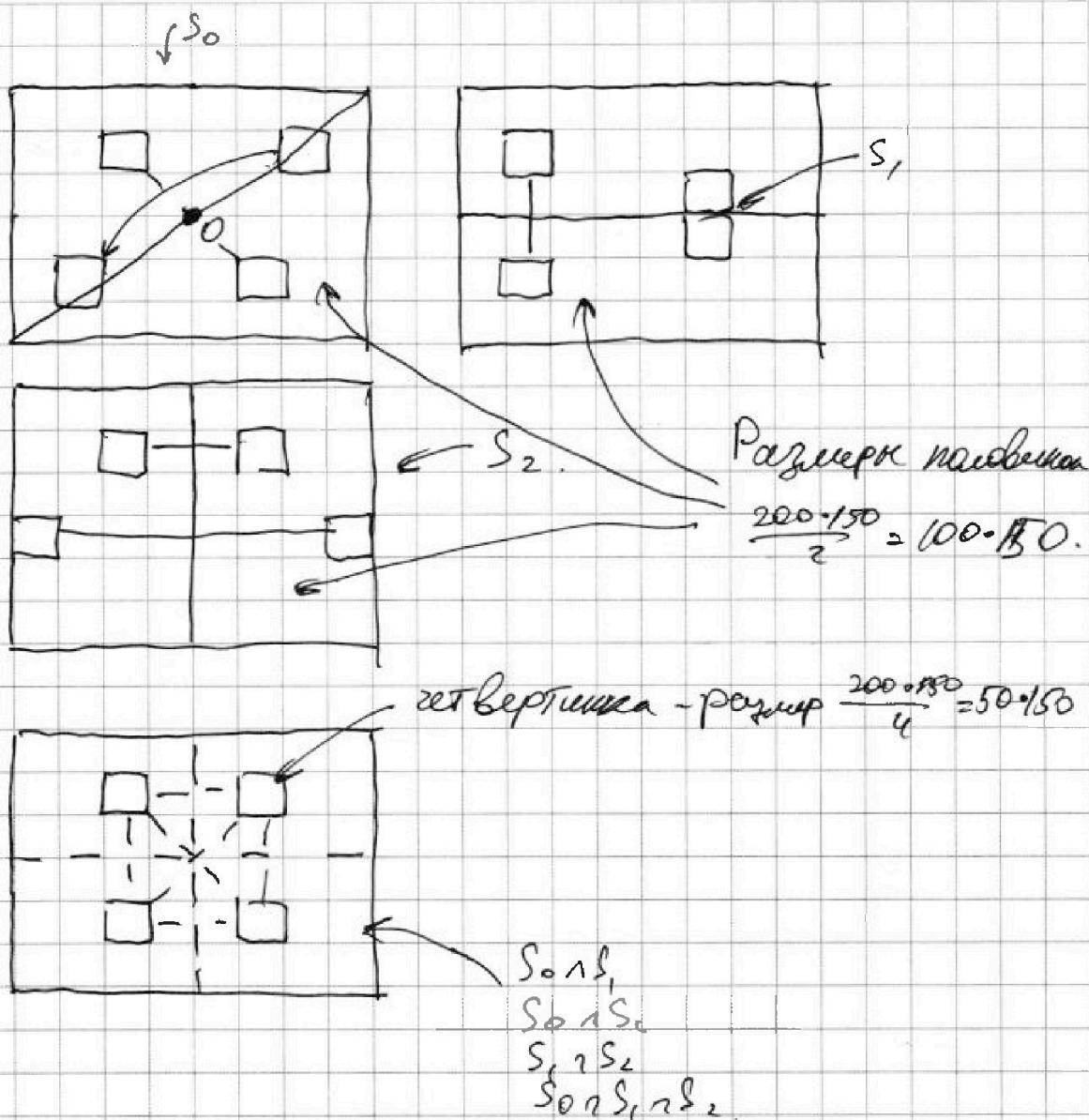


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = b + 8, \quad b_1 = -29 \Rightarrow a_1 = -21, \quad a > b$$

$$b_2 = 28 \Rightarrow a_2 = 28 + 8 = 36, \quad a > b.$$

$$c_1 = b_1 - 1 = -30$$

$$c_2 = b_2 - 1 = 27$$

2). $a - c = -1$
 $b - c = -p^2 \Rightarrow a - b = p^2 - 1$ — аналитично получаем,
 что если $a - b \neq 3$, то $p = 3$.

$$a - c = -1$$

$$b - c = -9 \Rightarrow c = b + 9 \Rightarrow a = b + 8.$$

$$a + b^2 = 820 \Rightarrow b^2 + b + 8/2 = 0 \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249$$

$$\sqrt{3249} = 57$$

$$b_3, b_4 = \frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow b_3 = -29$$

$$b_4 = 28.$$

$$b_3 = -29 \Rightarrow a_3 = b_3 + 8 = -21$$

$$b_4 = 28 \Rightarrow a_4 = b_4 + 8 = 36.$$

$$c_3 = b_3 + 9 = -21 + 9 = -13$$

$$c_4 = b_4 + 9 = 28 + 9 = 37.$$

В итоге получили тройки (a, b, c)

~~$$(-29, -21, -30); (-29, -21, -13); (28, 36, 27); (28, 36, 37).$$~~

~~$$(-21, -29, -30); (-21, -29, -13); (36, 28, 27); (36, 28, 37).$$~~

Везде $a > b$, $a - b \neq 3$, $a + b^2 = 820$, $(a - c)(b - c) = p^2$.

Ответ: $(-21, -29, -30); (-21, -29, -13); (36, 28, 27);$
 $(36, 28, 37).$

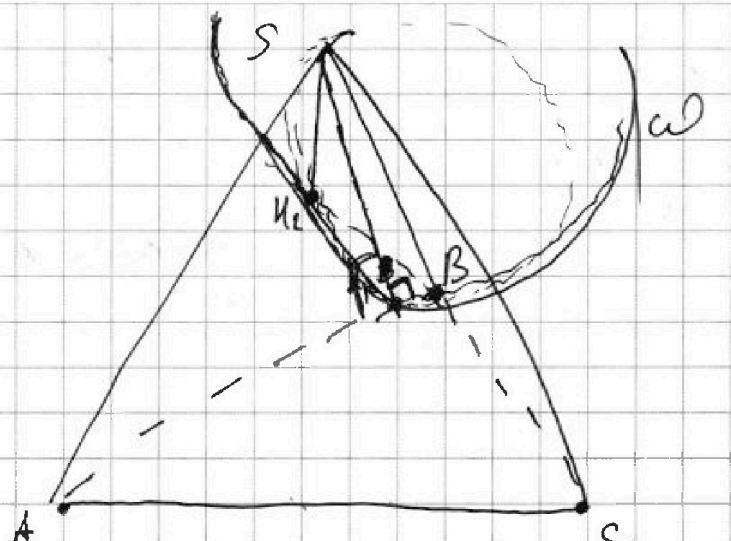


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

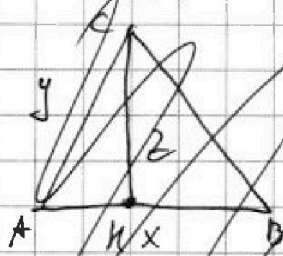
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть ABC выберем так, что $S_{ABK} = S_{KBC} = 5$, $S_{AKC} = 4$
 y ст. в ABK и KBC равны основания, есть общая сторона, а также равны высоты, т.к. из точки S , т.к. равны площади. $SK_1 = SK_2 = \frac{5 \cdot 2}{5} = 2 \Rightarrow$

\Rightarrow ~~равны и высота~~ S равноудалена от ~~этой стороны~~ ~~высоты~~

Далее



$$AK = \sqrt{y^2 - 2^2} \Rightarrow KB = 2 \Rightarrow KB = x - \sqrt{y^2 - 2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = KB^2 + CK^2$$

Получим, что стороны стороны BC вычисляются единств. величин образом. (т.к. y - одинаков, если AB было не общим, то величина BC бы 2 случая.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сравноудалена от K_1 и $K_2 \Rightarrow K_1$ и K_2 лежат на
окр-ти, ~~где~~ радиусом SK_1 с центром S .
Т.к. SK_1 высота, то AB - касательная
к ~~этой~~ этой окр-ти (будем касаться окруж

ω)

SA_2



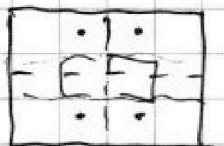
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

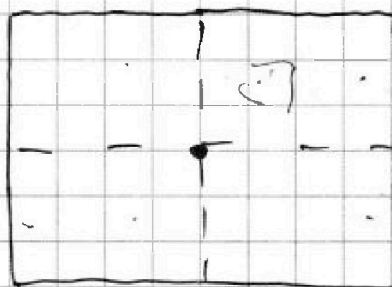
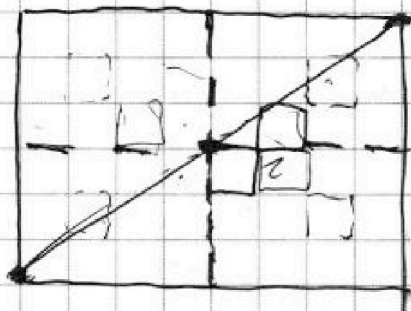
$(S_1 \cap S_2)$



$$R. \frac{150 \cdot 200 - 200}{4} = \boxed{50 \cdot 149}$$

$$C_{50 \cdot 149}^2 + C_{50 \cdot 149}^1 = C_{19200}^2 + C_{200}^4$$

$(S_1 \cap S_2 \cap S_0)$



$$S_0 = C_{150 \cdot 100}^4$$

$$S_0 \cap S_1 = C_{50 \cdot 130}^2$$

$$S_1 = C_{100 \cdot 150}^4$$

$$S_0 \cap S_2 = C_{50 \cdot 150}^2$$

$$S_2 = C_{100 \cdot 150}^4$$

$$S_2 \cap S_1 = C_{50 \cdot 150}^2$$

$$S_0 \cap S_1 \cap S_2 = C_{50 \cdot 150}^2$$

$$\Sigma = S_0 + S_1 + S_2 - S_0 \cap S_1 - S_0 \cap S_2 - S_1 \cap S_2 + S_0 \cap S_1 \cap S_2$$

$$3 \cdot C_{100 \cdot 150}^4 -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перепишем условие задачи:

$$a > b.$$

$$a - b \not\equiv 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a + b^2 = 820$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \text{т.к. } p\text{-простое} > 1:$$

$$\begin{cases} a-c=p, b-c=p \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \\ a-c=-p, b-c=-p \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \\ a-c=1, b-c=p^2 \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \\ (1) \quad a-c=p^2, b-c=1 \\ (2) \quad a-c=-1, b-c=-p^2 \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \\ a-c=-p^2, b-c=-1 \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \end{cases}$$

Остались 2 случая

$$1) a-c=p^2, b-c=1 \Rightarrow a-b=p^2-1=(p-1)(p+1)$$

$$\text{Пусть } p \not\equiv 3 \Rightarrow \text{Если } p \equiv 1, \text{ то } p-1 \equiv 3 \Rightarrow a-b \equiv 3 \\ \text{Если } p \equiv 2, \text{ то } p+1 \equiv 3 \Rightarrow a-b \equiv 3$$

$$\text{Если } p \equiv 3, \text{ то } p^2-1 \not\equiv 3.$$

Противоречие с
условием

Получается, что $p \equiv 3 \Rightarrow p=3$, т.к. p -простое.

$$a-c=9 \Rightarrow a=b+9.$$

$$b-c=1 \Rightarrow c=b-1$$

$$a+b^2=820 \Rightarrow b^2+b+9=820 \Rightarrow b^2+b-812=0.$$

$$D=1+4 \cdot 812=3249=57^2 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = -29, b_2 = 28$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 - 6t^2 + 3t = p - 3.$$

$$4\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}\right) = p - 3.$$

$$4\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}\right) \cdot 4 = 4t^3 - 6t^2 + 3t - \frac{1}{2}.$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$$

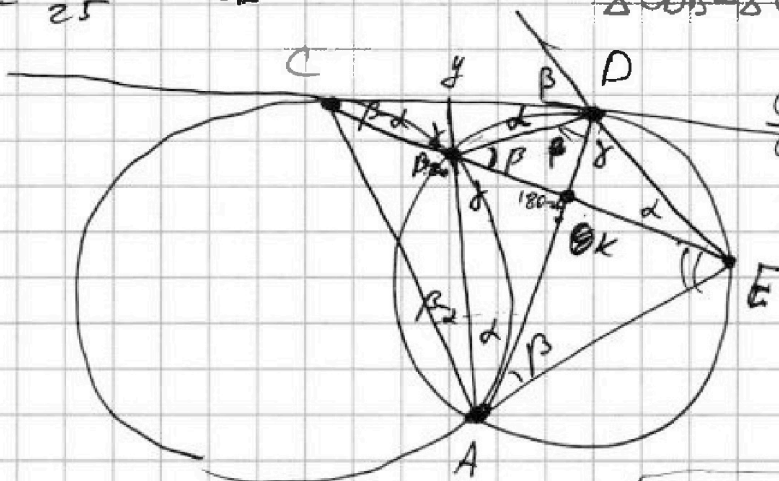
$$\frac{ED}{CA} = ?$$

$$CD^2 = CB \cdot CE,$$

$$\triangle CDB \sim \triangle CDE.$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CD}{CB}$$

DE = a
CD = b
CE = c.
~~DE~~



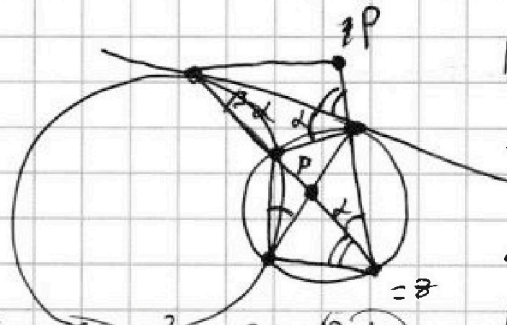
$$\triangle BDK \sim \triangle KAE \Rightarrow \frac{DK}{KA} = \frac{BK}{KE}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE.$$

$$BK \cdot KE = DK \cdot KA.$$

$$CD^2 = CB \cdot CE = (9x - BK) \cdot 36x.$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{BD}{BC}$$



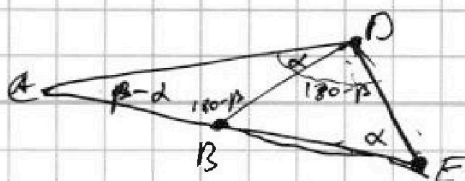
~~DK~~

$$\cancel{2(9x - BK) = DK \cdot KA}$$

$$\triangle CBD \sim \triangle CDE.$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{BD}{CD}$$

$$y^2 = 3 \cdot 6x \cdot (18x)^2 - 36x \cdot (BK)$$



$$\frac{DE}{BD} = \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x = \cos x + \cos x \cos(x+x) - \cos x \cos x - \sin x \sin x =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4\sin^2 x) \cdot \boxed{2\cos x (2\cos x - 1)}$$

$$\cos x (7 - 4\sin^2 x) = 3\cos 2x + p$$

$$\cos x (7 - 4\sin^2 x) = 3 - 2\sin^2 x + p$$

$$p - 1 = \cos x (7 - 4\sin^2 x) - 2\cos^2 x = -\sin^2 x - \cos^2 x - 1$$

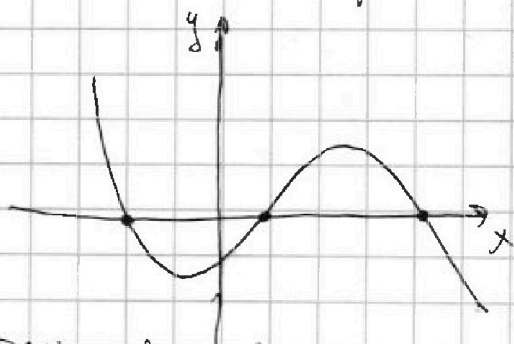
$$= \cos x (7 - 4\sin^2 x - 2\cos x) = \cos x (7 - 4(1 - \cos^2 x) - 2\cos x)$$

$$= \cos x (3 - 4\cos^2 x - 2\cos x), \cos x = t.$$

$$p - 1 = t(3 - 4t^2 - 2t).$$

$$-4t^3 - 2t^2 + 3t - p + 1 = 0.$$

При каких p есть решение?



$$f(t) = -4t^3 - 2t^2 + 3t - p + 1$$

$$f'(t) = -12t^2 - 4t + 3 \quad D = 16 + 12 \cdot 3 \cdot 4 = 16 + 144 = 160.$$

$$t_1, t_2 = \frac{4 \pm \sqrt{160}}{-24}$$



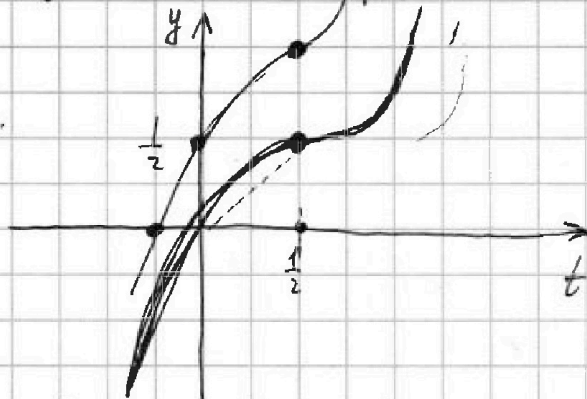
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 - 6t^2 + 3t - p + 3 = 0. \text{ если кет } -p+3, \text{ то.}$$



$$\frac{4 \cdot 1}{8} - \frac{6 \cdot 1}{4} + \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 12\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

корни ур-я ≤ -1 , а корни то будет один.

кра и касан.

$$-4 - 6 - 3 - p + 3 = 0. \quad 3 - p = \frac{1}{2}.$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + \frac{1}{2} = p - \frac{5}{2}$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = p - \frac{5}{2}.$$

$$t - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}}.$$

$p <$

$$t = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$\cos x = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$x = \arccos \left(\sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^3 b = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$q^2 b = x+4$$

$$q^4 b = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$q^8 \pm (x-3)^2 \Rightarrow (x-3)^2 \text{ со знаком „+“ т.к. } q^8 \geq 0$$

$$q^8 = (x-3)^2$$

$$q^4 b = q^3 b \cdot q^8 = (x-3)^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} =$$

$$= \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$q^2 b = \frac{q^4 b}{q^2} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$x+4 > 0 \Rightarrow x > -4 \text{ т.к. } q^2 b \geq 0$$

$$q^4 b^2 = \sqrt{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^2}} = \pm \frac{15x+6}{x-3}$$

$$q^2 b = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{(x-3)^2} \Rightarrow q = \frac{1}{x-3}$$

$$a > b, a - b \neq 3$$

$$q = \pm \sqrt[8]{(x-3)^2} =$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow a \text{ т.к. } a > b$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \text{ - нет, т.к. } a > b$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=-p \end{cases}$$

$$\pm b^8 \sqrt{(x-3)^6} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$\pm b =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = p - \text{кет.}, \text{ т.к. } a > c \\ a-c = p, b-c = -p - \text{кет.}, \text{ т.к. } -p^2 \\ a-c = 1, b-c = p^2 - \text{кет.}, \text{ т.к. } a > c. \\ a-c = -p, b-c = -p - \text{кет. т.к. } a > c \\ a-c = p^2, b-c = 1 \\ a-c = -p^2, b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$1) a-c = p^2, b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

$$\text{Пусть } p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p-1 \div 3, p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p+1 \div 3 \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p=3} \Rightarrow a-c=9, b-c=1 \Rightarrow \cancel{b=c} + c = b-1$$

$$a-b+1=9 \Rightarrow \boxed{a-b=8}$$

$$a+b = 820 \Rightarrow \cancel{a} b^2 + b + 8 = 820 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0.$$

$$D = 1 + 4 \cdot 812 = 1 + 3248 = 3249 = \boxed{57^2}$$

$$\begin{array}{r} \times 57 \\ 57 \\ + 399 \\ 285 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$\Rightarrow b = \frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow \boxed{b = -29} \\ \boxed{b = 28}$$

$$1) a = -29 + 8 = -21 \\ a = \cancel{29} + 8 = 37.$$

$$a-c=1 \\ a=c-1 \Rightarrow b+9-1 = b+8.$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p.$$

$$\cos 2x = 1 - \cancel{2 \sin^2 x} \\ \cos^2 x$$

$$p \leq 10$$

$$p \geq -10.$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) = \cancel{\cos x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

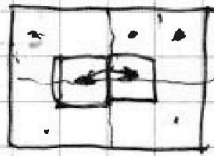
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(S_1 \cap S_{p2})$

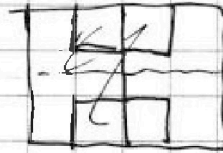


$$C_{\frac{150 \cdot 200 - 200}{2}}^1 = C_{100 \cdot 149}^1 + C_{100 \cdot 149}^4 + C_{100 \cdot 149}^2 \cdot C_{200}^2 + C_{200}^4$$

$(S_{p2} \cap S_{p1})$



Центр 4 раз.
Центр 2 раза



полюс
4 раза - всегда
2 раза - центр на ср. линии той, что 2-3. $\frac{1}{2}$

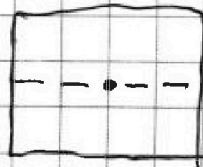


$(S_0 \cap S_1)$



$$C_{100 \cdot 150}^2 + C_{100 \cdot 150}^1 + C_{100 \cdot 150 - 150}^2 + C_{150}^2 \cdot \frac{C_{100 \cdot 150 - 150}^1}{2} + C_{150}^4$$

$(S_1 \cap S_2)$



$$\frac{C_{100 \cdot 149}^2}{4} + C_{200}^2 \cdot \frac{C_{100 \cdot 149}}{2} + C_{200}^1$$



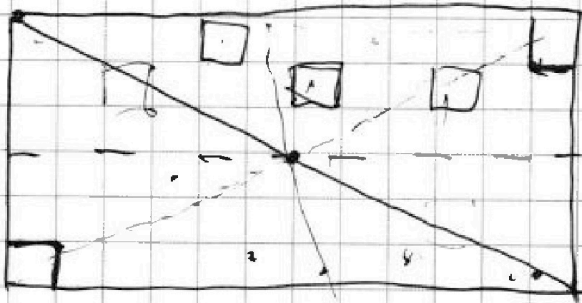
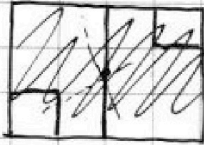
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

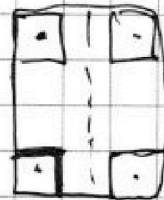
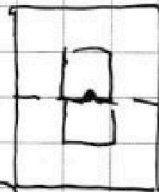
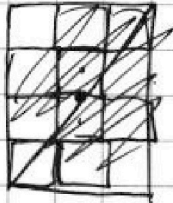
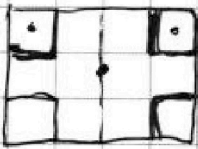
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 клетки → 8 клеток,
если нет симметрии



$$C_{150 \cdot 100}^4 - \frac{C_{150 \cdot 100}^1}{2} = C_{150 \cdot 100}^4 - \text{отк-то sempre.}$$

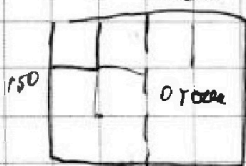


$$C_{150 \cdot 100}^4 = S_{cp2}$$

$$+ C_{150 \cdot 100}^4 -$$

$$C_{150 \cdot 100 \cdot 100}^4 - C_{200 \cdot 150 \cdot 200}^2 = C_{100 \cdot 149}^4 + C_{200}^2 \cdot C_{100 \cdot 149}^3 + C_{200}^4 \cdot C_{100 \cdot 149}^2 + C_{200}^6 \cdot C_{100 \cdot 149}^1 + C_{200}^8$$

$$S_0 + S_{cp1} + S_{cp2} -$$



$$(S_0 + S_{cp1}) = C_{150 \cdot 150}^2 - C_{150 \cdot 100 \cdot 150}^4 \cdot C_{150}^2 + C_{150}^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z^2 \leq 225, \Rightarrow |z| \leq 15.$$

$$y - 20 < 0 \Rightarrow y - 35 < 0.$$

$$20 - y + 70 - 2y = \sqrt{225 - z^2}$$

$$90 - 3y = \sqrt{225 - z^2}$$

~~$$8100 - 540y + 9y^2 = 225 - z^2$$~~

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} \leq \sqrt{2x+3z+2}$$

$$\sqrt{2x+3z+2} + 6 \geq 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

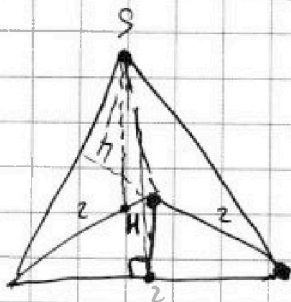
$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} - \sqrt{4y-8x-4x^2+4z} = -6$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \leq \sqrt{a-b} - \sqrt{c} \leq \sqrt{a-b-c}$$

~~$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} - \sqrt{4y-8x-4x^2+4z} \geq -6$$~~

~~$$\sqrt{10x+2-4y+4x^2+z} \geq 6$$~~

~~$$\sqrt{10x+2-4y+4x^2+z} \geq 36$$~~



$$SH_1 = 4$$

$$SH_2 = \frac{5}{2}$$

$$SH_3 = \frac{5}{2}$$

4 высоты в равной высоте, одна
внутри и одна - высота
сторона

\Rightarrow они равны.

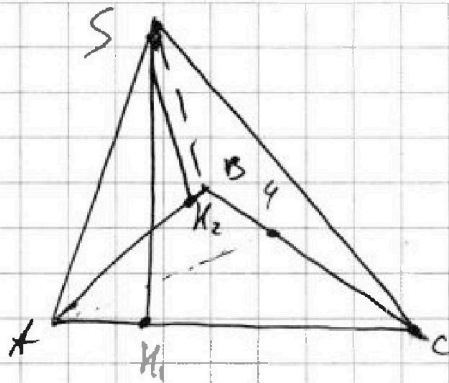


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow$$

ΔSBC - равнобедрен \Rightarrow
 \Rightarrow высота в медиане

