



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^3$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{t}x + 9t^2 - 9 = 0$$

D - дискриминант.

$$D > 0$$

$$D = 16t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

$$36 > 4t^2$$

$$t^2 < 9$$

$$t \in (-3; 3)$$

По т. Виета:

x_1, x_2 - корни

$$x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$t \in (-3; 3) \cap ((-\infty; -1) \cup (1; +\infty))$$

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ. $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = \\ = (a+b)(a+b+3)$$

$$a - b = 12$$

$$a - b \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$a \equiv b$$

$$a - b = 12, \Rightarrow a \text{ и } b \text{ ~~одной~~ ^{решимые оба или оба нечет.}$$

т.к. если они разной четности, то их разность будет нечет, 12 - чет.

$$a \text{ и } b \text{ одной чет., } \Rightarrow a + b - \text{чет.}$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$\begin{matrix} \text{ц} & & \text{ц} \\ \text{2} & & \text{2} \end{matrix}$

$$19p^4 : 2$$

$$p^4 : 2, \Rightarrow p = 2, \text{ т.к. } p - \text{чет. и простое.}$$

$$a+b+3 - \text{нечет., т.к. чет. + нечет. = нечет., } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+3 \not\equiv p^4, \Rightarrow a+b \not\equiv p^4$$

если $a+b \equiv 19$, то $a+b \equiv 19 \cdot p^4$, т.к. $2 \notin 2 \text{ и } 19 \text{ в } \mathbb{Z}$.
примитив

$$a+b \geq 2, \text{ т.к. } a \text{ и } b \in \mathbb{N}, \Rightarrow a+b \geq 19 \cdot p^4 = 19 \cdot 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b+3 > a+b \geq 19 \cdot 16$$

$$(a+b)(a+b+3) > 19 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 16 = 19 \cdot 16, \Rightarrow !!! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b \leq 16 \text{ и } a+b \neq 19, \Rightarrow a+b+3 \leq 19$$

$$a+b > \frac{19^2}{4}, \Rightarrow a+b \geq 16$$

$$a+b+3 \geq 19$$

$$19 \cdot 16 = (a+b)(a+b+3) \geq 19 \cdot 16, \Rightarrow \begin{cases} a+b = 16 \\ a+b+3 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 16 \\ a-b = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2a = 16 + 12$$

$$\begin{cases} a = 14 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$14 + 2 + 3 = 19.$$

Ответ. $a = 14, b = 2.$

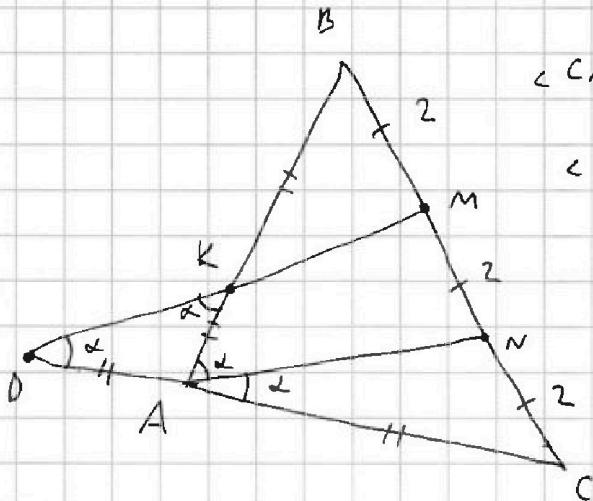


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CAN = \alpha$$

$\angle CAN = \angle CDM$, т.к. $AN \parallel MD$, $\text{соств. } \angle$.

$MK \parallel AN$ и $AK \parallel MN$ т.к. M - сев. см. BN , \Rightarrow

\Rightarrow ~~параллелограмм~~ MK - сред. лин. в $\triangle ABN$, $\Rightarrow AK = KB$, т.к.

$AN \parallel MD$ и N - сев. см. MC , \Rightarrow

\Rightarrow т.к. A - сев. см. CD , \Rightarrow т.к. AN - сред. лин. $\triangle CDM$.

$$CD = AB, \Rightarrow AK = KB = AC = AD = \frac{1}{2} AB.$$

$\triangle ADK$ - равнобедр., $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$

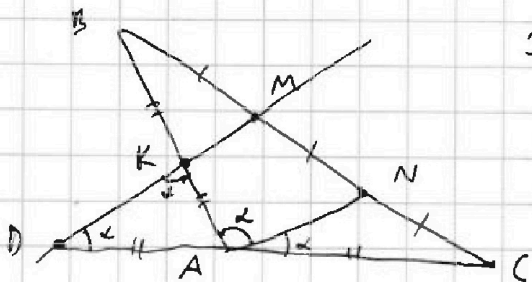
$\angle AKD = \angle KAN$, т.к. $\text{накрест. лежащ. } \angle$ при $\text{паралл. } \text{пр.}$

MD и AN и секущей AK .

$$\angle KAN = \angle CAN = \alpha$$

$$\angle CAB = 2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = -\frac{3}{4}, \Rightarrow 2\alpha > 90^\circ, \Rightarrow \angle CAB - \text{тупой.}$$



По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle C$$

$$6^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - 2 \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\text{т.к. } \cos 2\alpha = -\frac{3}{4}, \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

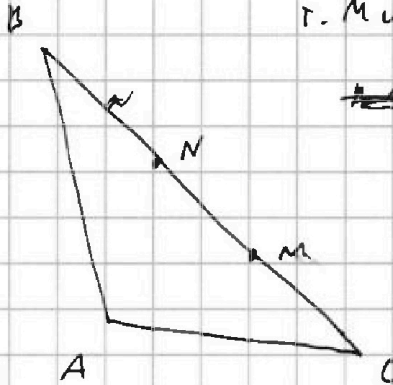


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



г. М и N — середины. Макс, г.к. искомое!

~~$BM = MN$~~ $BM = MN = NC$

$BM > MN, \Rightarrow !!!$

Ответ. $AB = 3\sqrt{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0

Если посадить 11 улиток, то останется 1 свободное место.

Пусть мы выбрали 3 улитки, кол-во способов посадить их в 1 ряд ≈ 1 , т.к. свободных мест в 1 ряду не будет, \Rightarrow они будут хорошо видны, если через них сидит \Rightarrow улитка меньшего роста, но упорядочить их по росту можно единственным ~~способом~~ способом.

Кол-во способов выбрать ряд, в котором сидят ~~2 улитки~~ ^{-4.} 2 улитки ≈ 4

Кол-во способов выбрать 2 улитки из 11:

$$C_{11}^2$$

Кол-во способов ~~по~~ посадить:

$$a < b: \quad \begin{matrix} a & b & b & 0 & a \\ 0 & a & b & 0 & \\ a & 0 & a & b & \end{matrix} \quad - 4.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кол-во способов выбрать из ~~оставшихся~~ ^{оставшихся} 9

т.е. 3 ~~из~~ и рассадить их в один ряд:

$$C_9^3 - 1$$

Кол-во способов ~~выбрать~~ ^{выбрать} из 6 по 3: ~~из~~

$$C_6^3$$

~~Кол-во~~ Кол-во способов рассадить оставшихся 3:

1

Всего способов ~~рассадить~~ ^{рассадить}:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 - C_6^3 - 1$$

Ответ. $4^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассм. граф., верш. - деревни, ~~ребра~~ ^{ребра - дороги.}
и связной граф.

единственный маршрут из любой деревни, во
любой, => без циклов.

Связный граф без циклов - дерево.

в дереве на n вершинах ~~ребра~~ равно $n-1$ ребра.

кол-во ребер $= \frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$, т.к.

сумма степеней всех вершин $= 5+6+7+9+(n-4) \cdot 1$, т.к.
 $n-4$ верш.

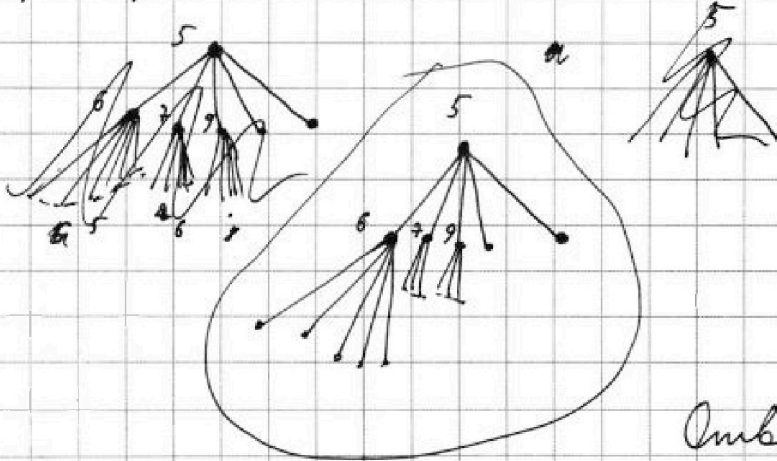
или, степ. 1. ~~каждое ребро~~

Каждое ребро посчитали 2 раза, => $\frac{5+6+7+9+n-4}{2}$

$$\frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$$

$$n = 25.$$

Пример:



Ответ. 25.




На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что в дереве на n вершинах ^{ребро} $n-1$ ребро.

в дереве есть ≥ 1 верш. степ. 1. 

Индукция по n .

База. $n=1$: \cdot 1 верш, 0 ребр.

$n=2$: \rightarrow 2 верш. 1 ребро.

Переход. Пусть в дереве на n верш. $n-1$ ребро.

Докажем, что в дереве на $n+1$ верш. n ~~ребро~~ ^{ребро}.

Рассм. ~~два~~ ~~два~~ дерева на $n+1$ верш.

выкинем верш. степ. 1. Остался ~~граф~~ ~~граф~~

на n вершинах. ~~Связность~~ Связность осталась и

циклов не появилось, \Rightarrow граф - дерево.

по Т.о. предположим, в дереве на n верш. $n-1$

ребро, \Rightarrow если ~~верш~~ вернут верш., то

кол-во вершин увел. на 1 и ребр на 1, \Rightarrow

\Rightarrow в ~~дере~~ ~~дере~~ $n+1$ верш. n ребр

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - (x - y - 1)} = 2 \quad \text{Ответ. } (1; 0) \\ (0; -1).$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$$

$$x - y - 1 \geq 0;$$

$$1 - x + y + 1 \geq 0$$

$$x - 1 \geq y \geq x - 2$$

$$x - y - 1 \leq 0;$$

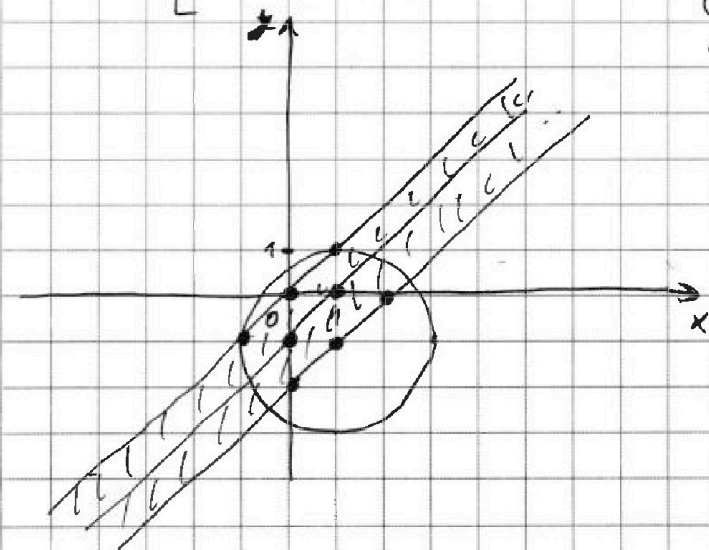
$$1 + x - y - 1 \geq 0$$

$$x - 1 \leq y \leq x$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$$

$$x + 1 \geq y \geq x - 2$$

$$x \geq y \geq x - 1$$



$$\sqrt{2+2-1-1} + \sqrt{1-|1+1-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{4-0-4-0} + \sqrt{1-|2-0-1|} \neq 2$$

Переберем эти точки:

$$(1/1), (1; 0), \text{ ~~(0; 0)~~ } (0; 0),$$

$$(-1; -1); (0; -1); (0; -2);$$

$$(1; -1); (2; 0);$$

$$\sqrt{2-2-1-1} + \sqrt{1-|1-1-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{2-0-1-0} + \sqrt{1-|1-0-1|} = 2$$

$$\sqrt{0} + \sqrt{1-|0-0-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{-2+2-1-1} + \sqrt{1-|1-1-1|} \neq 2$$

$$\sqrt{0+2-0-1} + \sqrt{1-|0+1-1|} = 2$$

$$\sqrt{0+4-0-4} + \sqrt{1-|0+2-1|} \neq 2$$

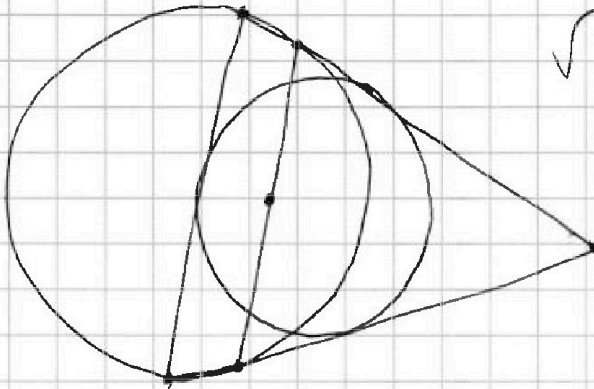
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-(x-y+1)^2} = 2$$

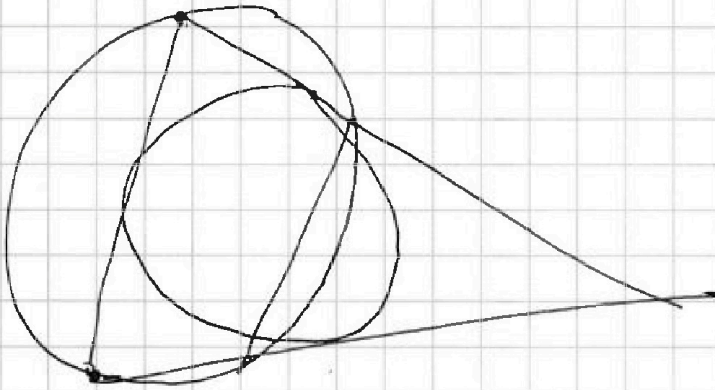
$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

~~$$x^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$~~

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$|x-y-1| \leq 1$$

$$\frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$$



$$23+n = 2n-2$$

$$25 = n$$

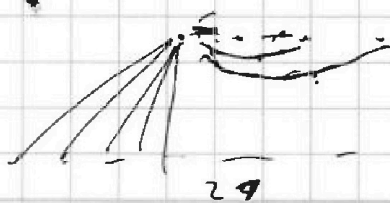
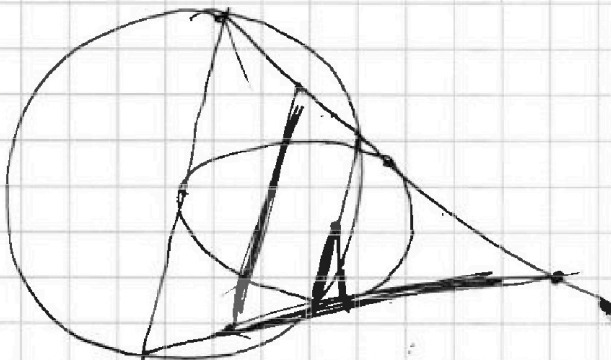
$$x-y-1 \geq 0:$$

$$x-y \geq 1$$

$$x-y-1 \leq 0:$$

$$y-x \leq 1$$

~~1111~~ ~~1111~~



29



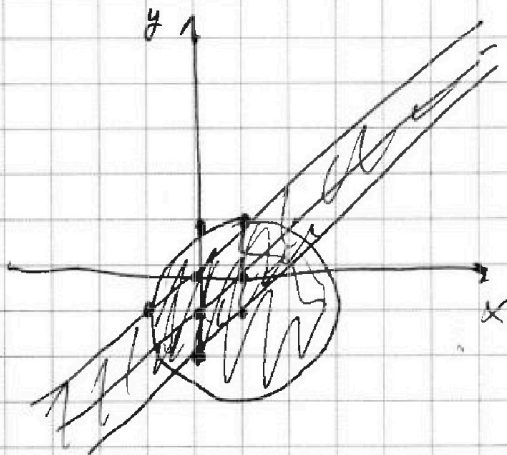
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$



$$0 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$1 \leq x - y \leq 2$$

$$x - y > 1$$

~~or~~

$$y - x + 1 \leq 1$$

$$y \leq x$$

$$x - y - 1 \leq 0$$



$$x - y \leq 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

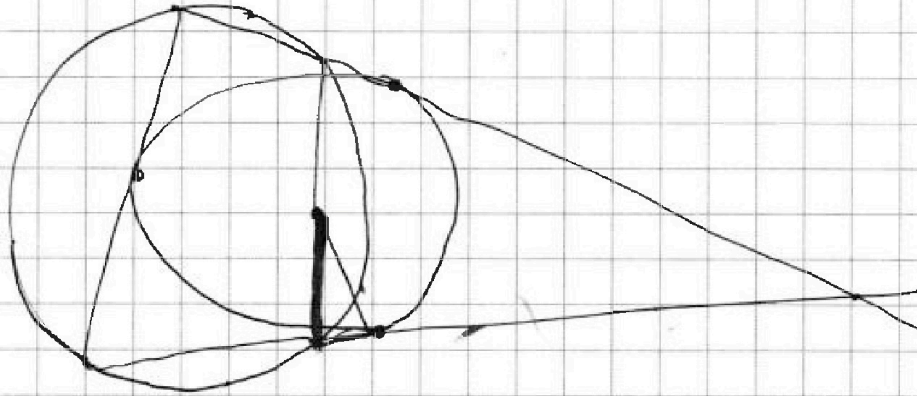
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



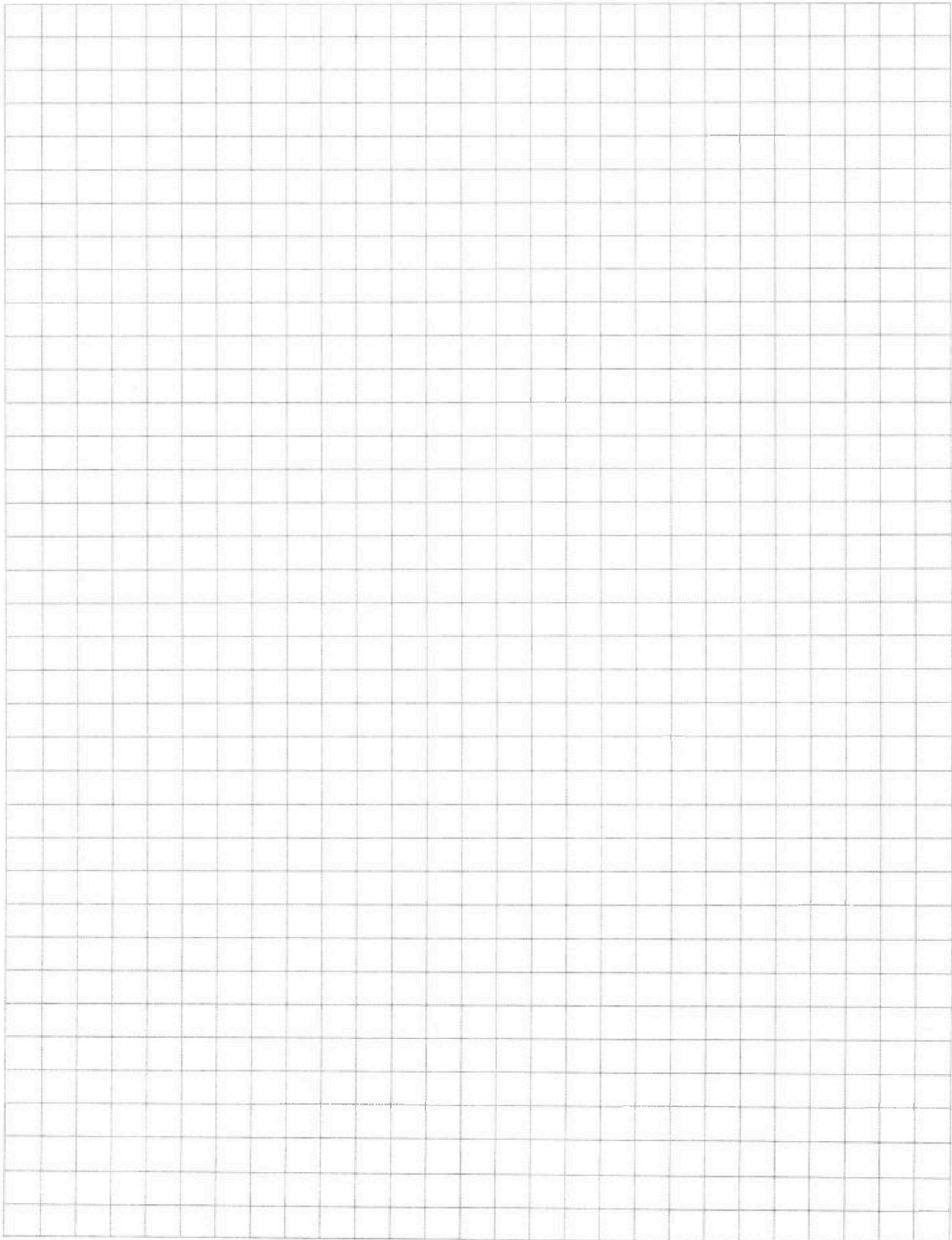


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

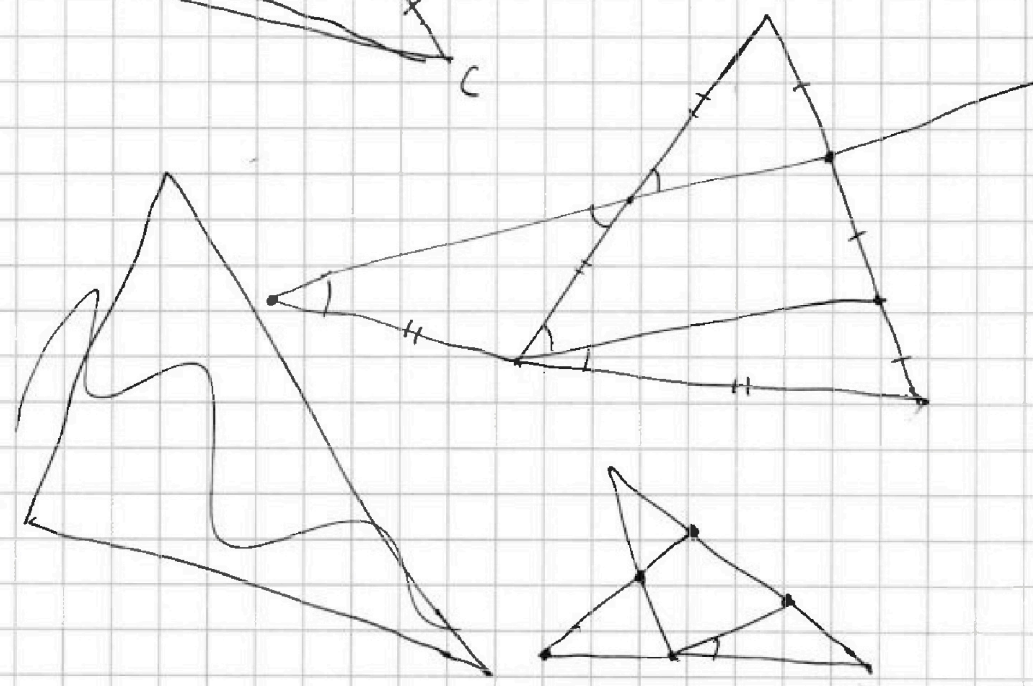
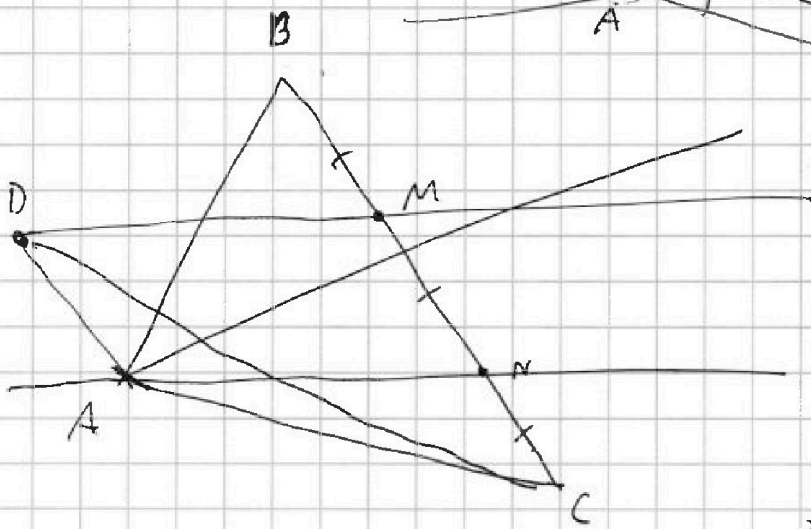
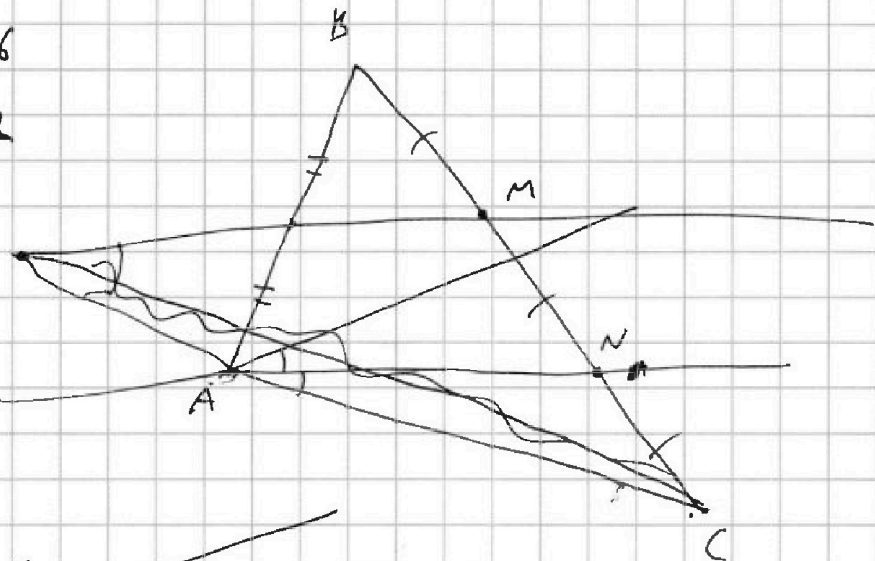
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 16$$

$$a - b = 12$$

$$a = 14$$

$$b = 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \quad 0^{11} \quad 0^{10} \quad 0^9$$

$$0^8 \quad 0^7 \quad 0^6 \quad 0^5$$

$$0^4 \quad 0^3 \quad 0^2 \quad 0^1$$

$$(C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 \cdot 4) \quad \text{МММ}$$

$$4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 4$$

