



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  - некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партией перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

пусть  $x_1$  и  $x_2$  - действительные корни уравнения такие, что  $x_1 \neq x_2$ , и  $x_1 \cdot x_2 > 0$

тогда первое условие, что  $x_1 \neq x_2$ , можно записать как, то что в квадратном уравнении дискриминант  $> 0$

$$D > 0$$

$$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

$$12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$$

$$16 - 4t^2 > 0$$

$$4 - t^2 > 0$$

$$t^2 < 4$$

$$\begin{cases} t < 2 \\ t > -2 \end{cases} \Rightarrow t \in (-2, 2)$$

второе условие, что  $x_1 \cdot x_2 > 0$  можно выразить через теорему Виетта,  $x_1 \cdot x_2 = c$ , зна-  
чим  $c > 0$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$\begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases} \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

тогда на пересечении полученных нами множеств получаем, что



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

тогда это значит, что для того чтобы уравнение

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

имело 2 различных действительных корня произведение которых положительно  $t$  должно входить в одну из этих множеств

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.  
 $a_1 = \frac{65+49}{4} = 28,5$  не подходит т.к.  $a$  - натуральное число

$$a_2 = \frac{65-49}{4} = 4$$

т.к.  $a_1$  не подходит, значит верный вариант -  $a_2$ ,

$$a = 4$$

$$a + b = 40$$

$$b = 40 - a = 40 - 4 = 36$$

~~Вариант~~  $b$  подходит под условия

Ответ:  $a = 4$ ;  $b = 36$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

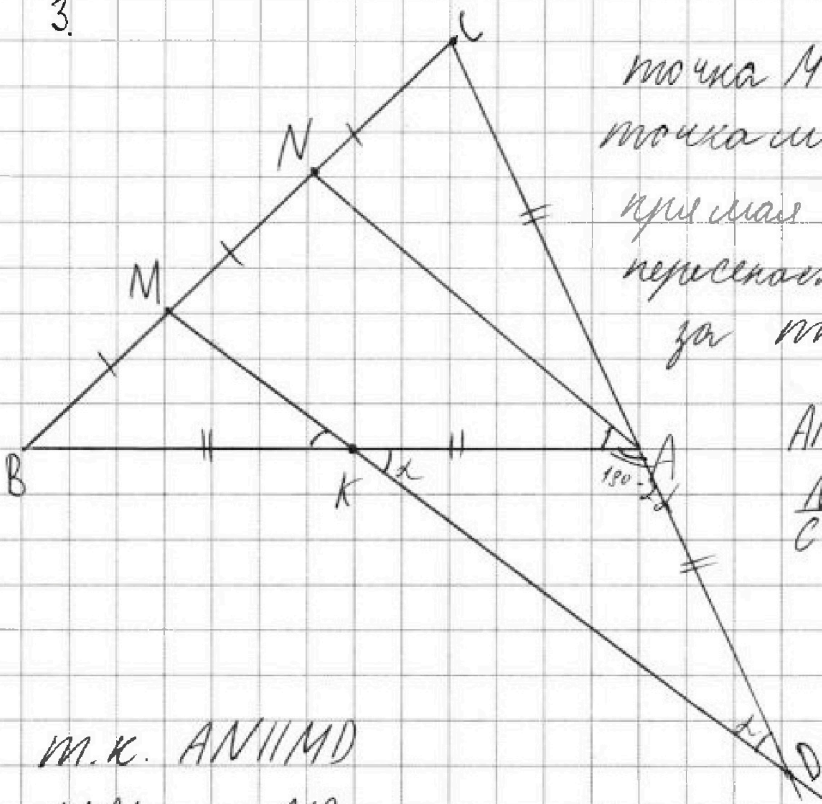


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.



точка M лежит между  
точками B и N, т.к.  
прямая параллельная BC  
пересекает отрезок BC  
за точкой A

$$AN \parallel MD \Rightarrow$$

$$\frac{NC}{CA} = \frac{MC}{CD} \Rightarrow$$

$$CD = 2CA$$

т.к.  $AN \parallel MD$

$$\frac{NM}{AK} = \frac{NB}{AB} \Rightarrow AK = \frac{1}{2} AB$$

$$AK = BK = CA = AD = \frac{1}{2} AB$$

$$BC = BM + MN + CN = 12$$

$$BM = MN = CN = \frac{1}{3} BC = 4$$

$\triangle AKD$  - равнобедренный,  $AK = AD \Rightarrow \angle AKD = \angle ADK$

$\angle MKB = \angle AKD$  как вертикальные

$\angle NAB = \angle MKB$  как соответственные

углы  
 $\angle ADK = \angle$

тогда:

$$\angle ADK = \angle AKD = \angle MKB = \angle NAB = \angle$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$\text{в } \triangle AKD \quad \angle KAD = 180^\circ - \angle AKD - \angle ADK = 180^\circ - 2d$$

$\angle CAD$  — тупой, поэтому  $\angle CAD = 180^\circ$

$$\angle CAD = \angle CAN + \angle NAB + \angle KAD = \angle CAN + d + 180^\circ - 2d$$

$$\Rightarrow \angle CAN = d$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2d = -\frac{1}{4}$$

$$\text{в } \triangle ABC \quad \angle CAB = \angle CAN + \angle NAB = 2d$$

можем пусть  $AC = x$ , тогда  $AB = 2AC = 2x$

можем по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \cos 2d \cdot AB \cdot AC$$

$$12^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2x \cdot x$$

$$144 = 6x^2$$

$$x^2 = 24$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$AB = 2x = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

Ответ:  $AB = 4\sqrt{6}$

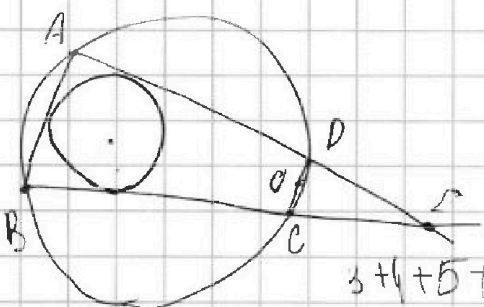
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$3+4+5+7 = 19 - 3 - 16 + 1 = 11$$

$$7 \cdot \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + |1-|x+y-2|| = 1$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$1-|x+y-2| \geq 0$$

$$2x+2y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0$$

$$x+y-2 \leq 1$$

$$x+y \leq 3$$

~~BC = ...~~

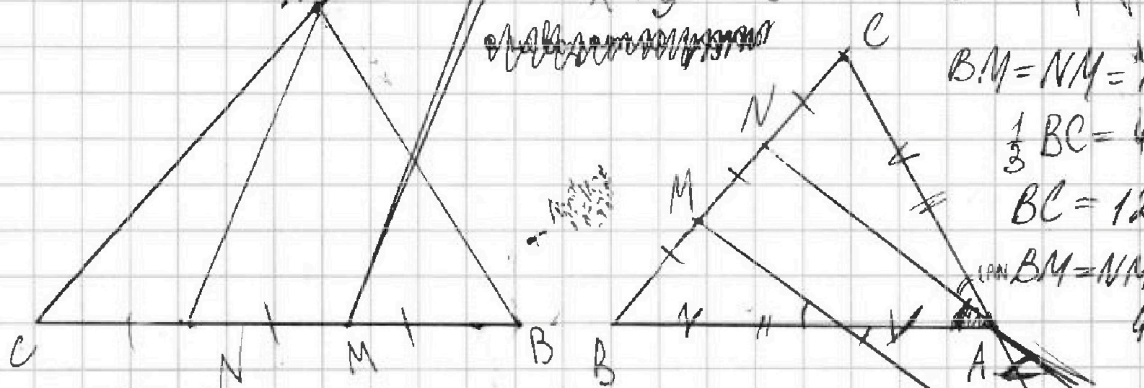
$$BC = 12 \cos(\angle CAN = \frac{1}{4})$$

$$BM = NM = NC =$$

$$\frac{1}{3} BC = 4 \cos(\angle CAN)$$

$$BC = 12$$

$$BM = NM = NC = 4$$



$$\cos \angle CAN = \frac{1}{4} \Rightarrow$$



$$12^2 = (2x)^2 + x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x \cdot x$$

$$4x^2 + x^2 + x^2$$

$$144 : 6 = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.

Из всех, кроме 4 деревьев выходит по одной дороге, значит из каждой такой деревни дорога должна вести в одну из 4 деревьев

из которых есть много дорог, т.к. если это не так, то 2 деревни с 1 дорогой будут соединены вместе и в них невозможно будет попасть из другой деревни, а это противоречит условию.

тогда пусть 4 деревни - шавыне, тогда каждая другая деревня соединена с шавной, но шавыне деревни тоже должны быть соединены между собой. т.к. из любой шавной деревни можно попасть в любую, то между 4 шавными деревнями не может 3-х дорог. если 4 между ними будет хотя бы 4 дороги, то у нас получится 4 цикла, а значит из одной деревни мы сможем попасть в другую более чем одним путем, значит между шавными деревнями ровно 3 дороги всего дорог из шавной деревни:

$$3 + 4 + 7 + 5 = 19 \quad 19 - 3 = 16 \text{ дорог - выходит из}$$

значит всего у нас есть 16 шавных деревьев в других деревнях

$$16 + 4 = 20 \text{ деревьев - всего}$$

Ответ: 20 деревьев





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 & \text{т.к. } x^2+y^2 \geq 0, \text{ то } 2x+2y \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 & 2x+2y \geq x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1-|x+y-2| \geq 0 \\ |x+y-2| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-2 \leq 1 \\ x+y-2 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} \times x+y \in [1; 3]$$

$$\begin{cases} 2x+2y \geq x^2+y^2 \\ 2x+2y \in [2; 6] \end{cases}$$

$$2x+2y \in [2; 6]$$

т.к. модуль всегда  $\geq 0$ , ~~но~~ а выражение под модулем принимает только целые значения, то:

$\sqrt{1-|x+y-2|}$  может быть равен только 0 или 1, т.к.  $|x+y-2|$  равен может быть равен только 0 или 1

1) если  $\sqrt{1-|x+y-2|} = 1$

$$\sqrt{1-|x+y-2|} = 1 \Rightarrow 1-|x+y-2| = 1$$

$$|x+y-2| = 0 \Rightarrow x+y = 2 \Rightarrow 2x+2y = 4$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2} + 1 = 1$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{мы можем выразить } y \text{ через } x$$

$$y = 2 - x$$

$$x^2 + (2-x)^2 = 4 \quad x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4$$

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{решения} - (0; 2), (2; 0)$$

2) если  $\sqrt{1 - |x+y-2|} = 0$

$$\sqrt{1 - |x+y-2|} = 0 \Rightarrow 1 - |x+y-2| = 0 \Rightarrow |x+y-2| = 1$$

$$\begin{cases} x+y-2 = 1 \\ x+y-2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x+y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y = 6 & (1) \\ 2x+2y = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1 - |x+y-2|} = 1$$

(1)

$$\sqrt{6 - x^2 - y^2} + 0 = 1 \Rightarrow \sqrt{6 - x^2 - y^2} = 1$$

$$6 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 - x$$

$$x^2 + (3-x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5$$

$$2x^2 - 6x = -4$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases} - \text{решения: } (2; 1), (1; 2)$$

(2)

$$\sqrt{2 - x^2 - y^2} + 0 = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = 1$$

$$2-x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ выразим } y \text{ через } x:$$

$$y=1-x$$

$$x^2+(1-x)^2=1$$

$$x^2+1-2x+x^2=1$$

$$2x^2-2x=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=0 \end{cases}$$

решения -  $(0; 1), (1; 0)$

все эти решения подходят и удовлетворяют условиям

Ответ:  $(0; 2), (2; 0), (2; 1), (1; 2), (0; 1), (1; 0)$





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$a$  и  $b$  - натуральные числа

$$a + b = 40$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b - 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b) \cdot (a-b+15) = 17p^5$$

или можем выразить  $b$  через  $a$

$$a + b = 40, \text{ тогда}$$

$$b = 40 - a$$

$$(a - (40 - a))^2 + 15(a - (40 - a)) = 17p^5$$

$$(2a - 40) \cdot (2a - 25) = 17p^5$$

$$4a^2 - 80a - 50a + 1000 = 17p^5$$

В левой части все числа четные, значит сумма тоже четное число, значит

$17p^5 : 2$ , т.к.  $17 \not\div 2$ , значит, что  $p^5 : 2$ , но  $p$  - простое число, единственное простое число которое в 5 степени делится на 2, это 2, значит  $p = 2$

$$p^5 = 2^5 = 32 \Rightarrow 17 \cdot p^5 = 17 \cdot 32 = 544$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 544$$

$$4a^2 - 130a + 456 = 0$$

$$2a^2 - 65a + 228 = 0$$

$$D = 65^2 - 4 \cdot 2 \cdot 228 = 4225 - 1824 = 2401$$

$$a = \frac{65 \pm \sqrt{2401}}{2 \cdot 2}$$