



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  — некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N° 1

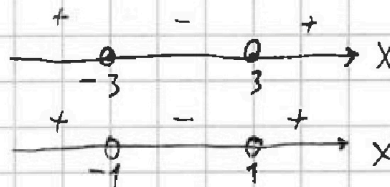
$$x^2 + 4\sqrt{t}x + 9t^2 - 9 = 0$$

два разнотипных действительных корня  $\Leftrightarrow D > 0$

По м. Виета  $x_1 x_2 = 9t^2 - 9 > 0$

$$\begin{cases} D = 32t^2 - 4(9t^2 - 9) = 36 - 4t^2 = 4(3-t)(3+t) > 0 \\ 9(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+3)(t-3) < 0 \\ (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$t \in \cancel{(-3; 3)} \cap ((-\infty; -1) \cup (1; +\infty)) = (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ:  $(-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = 19 p^4$$

$$a - b = 12, a = 12 + b, a + b = 2b + 12$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4, (2b+12):2 \Rightarrow 19p^4:2 \Rightarrow p=2$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$2b+15 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} 2b+15=1 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}, \text{ противоречие условию} \\ 2b+15=19 \Rightarrow b=2, 2b+12=16 \\ \quad 2 \cdot 2 + 12 = 16 \\ \quad 16 = 16 \end{cases}$$

$$a = 12 + b = 12 + 2 = 14$$

Ответ: 14; 2



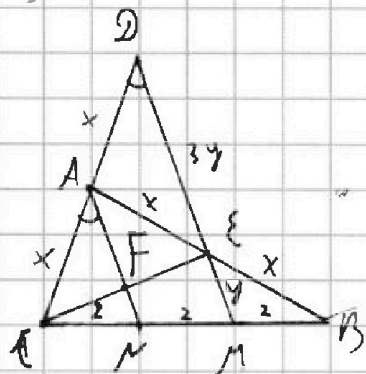


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3



Доно:  $BM = MN = MC$ ,  $BC = 6$

$DM \parallel AN$ ,  $AB = CD$

$$\cos(2\angle(AN)) = -\frac{3}{4}$$

Найти  $AB$

Решение:

По т. Палла  $\frac{CA}{CN} = \frac{AD}{MN} \Rightarrow CA = AD$ , аналогично  $AE = EB$  ( $E = AN \cap DA$ )

обозначим  $x = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$ ,  $F = CE \cap AN$

в  $\triangle CDE$  медиана  $EA = \frac{1}{2} CD \Rightarrow \angle DEC = 90^\circ$ ,  $\angle CEM = 90^\circ$ , как смежные

$\angle CFA = \angle CED = 90^\circ$ , м.к.  $AN \parallel DM$

По т. Менелая  
из  $\triangle CDM$   $\frac{CA \cdot DE \cdot MB}{AD \cdot EM \cdot BC} = 1 \Rightarrow \frac{DE}{EM} = \frac{BC \cdot AD}{AB \cdot CA} = \frac{6 \cdot x}{2 \cdot x} = \frac{3}{1}$

обозначим  $DE = 3y$ ,  $EM = y$

в равн-ва  $\triangle CAE$   $AF$  - высота  $\Rightarrow \angle CAF = \angle EAF$ ,  $\angle CAE = 2\angle(AN)$

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \cos(\angle CAE) \cdot AC \cdot AE = x^2(1+1+2 \cdot \frac{3}{4}) = 3,5x^2 \text{ из } \triangle CAE$$

$$4x^2 = CD^2 = CE^2 + DE^2 = 3,5x^2 + 9y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{18} \text{ из } \triangle CDE$$

$$16 = CM^2 = CE^2 + EM^2 = 3,5x^2 + y^2 = \frac{63}{18}x^2 + \frac{x^2}{18} = \frac{64}{18}x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{16 \cdot 18}{64}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,5\sqrt{2}$$

$$AB = 2x = 3\sqrt{2}$$

Ответ:  $3\sqrt{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

$$27^2 = 400 + 280 + 49 = 729 \cdot \frac{27}{27}$$

$$D = 32t^2 - 4(9t^2 - 9) = 36 - 4t^2 = 4(9 - t^2) = 4(3-t)(3+t) > 0$$

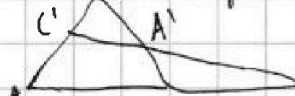
$$x_1 x_2 = 9t^2 - 9 > 0 \quad \frac{216 \cdot 4}{154} \quad \frac{6572 = 8 \cdot 821 \cdot 101}{154}$$

$$a - b = 12$$

$$4a^2 + 4ab + 144(a+b)^2 + 3(a+b) - 19p^4 = 0$$

$$a = 12 + b - 4^2 -$$

$$(12+2b)^2 + 3(12+2b) - 19p^4 = 0$$



$$D = 3^2 + 4 \cdot 19p^4 = 9 + 76p^4$$

$$12 + 2b = \frac{-3 + \sqrt{9 + 76p^4}}{2}$$

$$\sqrt{9 + 76p^4} = 27 + 48 = 75$$

$$p^4 = \frac{168^2 + 2168 + 720}{76} = \frac{-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2}{9 + 76p^4} = 168^2 + 2168 + 729$$

$$= \frac{48^2 + 548 + 180}{19} = 48^2 + 548 +$$

$$76 = 2^2 \cdot 19$$

$$t + 9 = 98n$$

$$t - 9 = 98n$$

$$9x^2 + 95y^2 = 19^2$$

$$p^4 = \frac{(t+9)(t-9)}{76}$$

$$9 + 76p^4 = t^2$$

$$p^4 = \frac{31n \cdot (n-1)}{76} = 19n(n-1)$$

$$9p^2 + x^2 = 9$$

$$0,5y^2 + x^2 = 9$$

$$AB = (D)$$

$$CP^2 = y^2 + y^2 + 2y^2 = 4y^2$$

$$= y^2(2+2) =$$

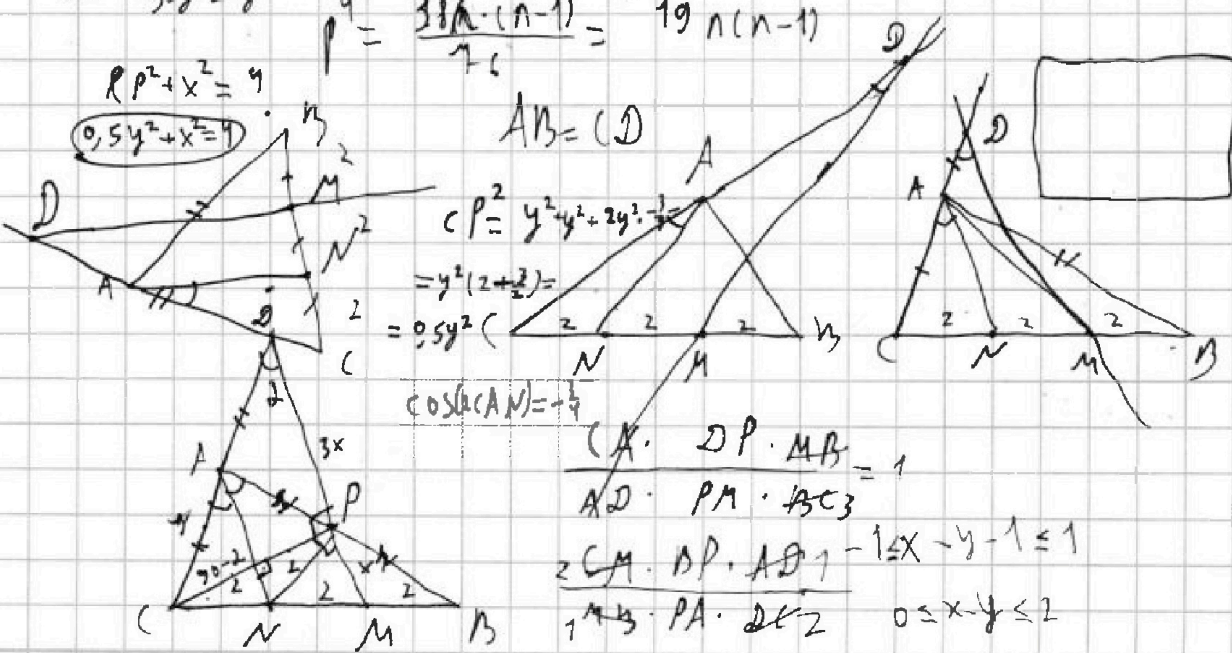
$$= 95y^2$$

$$\cos(\angle AN) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{AN \cdot DP \cdot MB}{AD \cdot PM \cdot BC} = 1$$

$$\frac{2CM \cdot DP \cdot AD}{1 \cdot AB \cdot PA \cdot 2CZ} = 1 - 1 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$0 \leq x - y \leq 2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

11 учеников садятся за 12 парт, есть 12 способов выбрать пустую парту.

После выбора пустой парты мы выбираем для каждого ряда столько учеников, сколько заданных парт должно быть (порядок <sup>обхода</sup> ~~важен~~ рядов не важен), т.к. Если мы выбрали для ряда учеников, то распределить места они могут единственным образом (по порядку).

$$12 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 12 \cdot \frac{11!}{3! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2!} =$$
$$= 12 \cdot \frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!} = 12 \cdot \frac{11!}{6^3 \cdot 2} = \frac{11!}{36}$$

Ответ:  $\frac{11!}{36}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Докажем, что между четырьмя деревьями, из которых выходит 5, 6, 4, 9 дорог есть 3 дороги

- 1) Деревья, из которых выходит по одной дороге не соединены попарно (другими такими деревьями) иначе в паре из таких деревьев (дорогой между ними не было бы дорог).  
2) Четыре дерева (5, 6, 4, 9 дорогами (назовём их центральными для краткости) соединены между собой дорогами, а другие деревья (одной дорогой) на это не влияют, и только примыкают к этим. Почти существуют 3 центральные деревья, соединённые «цепочкой», т.к. маршрут между деревьями един -  $\text{---} \text{---} \text{---}$  очевиден, а значит граф, в котором деревья - вершины, а рёбра - дороги не имеет циклов. Четвёртое центральное дерево можно соединить (этим же путём ещё одной дорогой, но если оставить больше, образуются циклы. Дороги, которые ведут к деревьям (1 дорогой ~~закрывают~~) относятся к центральным деревьям одним концом, а ещё 3 дорог - другим. Т.о. всего деревьев

$$4 + (5 + 6 + 4 + 9) - 2 \cdot 3 = 25$$

Ответ: 25





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = \sqrt{-x^2+2x-1-y^2-2y-1+2} = \sqrt{2-(x-1)^2-(y+1)^2}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad (x-1)^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2, \quad (y+1)^2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y \leq 0$$

Переберём 9 случаев

1.  $x=0, y=-2: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-1+2-1} = 0 \neq 2$

2.  $x=0, y=-1: \sqrt{2-1-0} + \sqrt{1-1+1-1} = 2 - (0; -1)$  является решением

3.  $x=0, y=0: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-1+0-1} = 0 \neq 2$

4.  $x=1, y=-2: \sqrt{2-0-1} + \sqrt{1-1+2-1} = \sqrt{-1}$ , не имеет смысла

5.  $x=1, y=-1: \sqrt{2-0-0} + \sqrt{1-1+1-1} = \sqrt{2} \neq 2$

6.  $x=1, y=0: \sqrt{2-0-1} + \sqrt{1-1+0-1} = 2 - (1; 0)$  - реш

7.  $x=2, y=-2: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-1+2-1} =$  не имеет смысла

8.  $x=2, y=-1: \sqrt{2-1-0} + \sqrt{1-1+1-1} =$  не имеет смысла

9.  $x=2, y=0: \sqrt{2-1-1} + \sqrt{1-1+0-1} = 0$

Ответ:  $(0; -1), (1; 0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

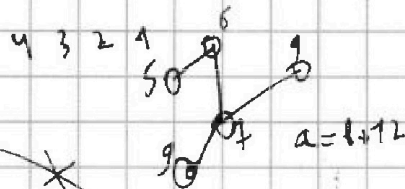
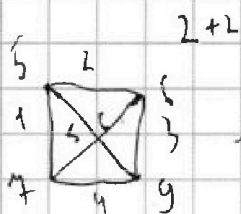
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2 - (x-1)^2 - (y+1)^2} + \sqrt{1 - |x-y-1|} = 2 \quad a+b = 12+20 = 2(10+8)$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$-2 \leq y \leq 0$$



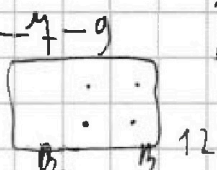
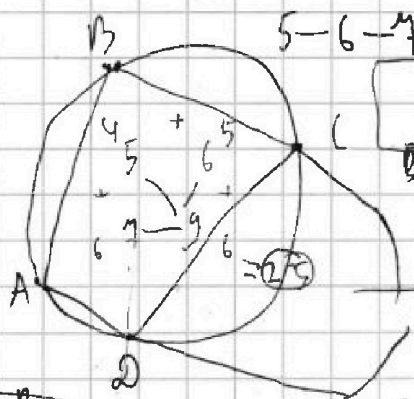
$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462$$

$$5+6+7+9 = 27$$

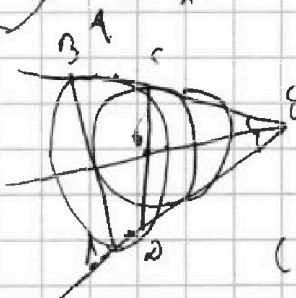
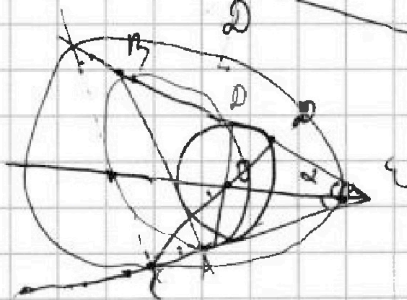
5-6    5 6    5 6    5 6    5 6    5 6

7 9    7 9    7 9    7 9    7 9    7 9



$$4(8^2 + 12 \cdot 8 + 3 \cdot 6)$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 3 \cdot 8 = 24$$



$$\frac{CO}{OD} = \frac{CE}{DE}$$

$$48^2 + 548 +$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(28+12)(28+15) = 19p^4 : 2 \Rightarrow p=2$$

$$12(C_{11}^3 + C_8^2 + C^3)$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

