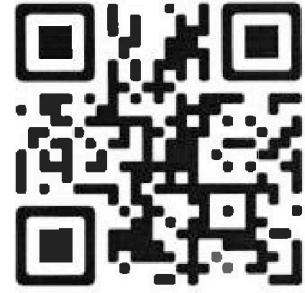




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + (gt^2 - g) = 0 - \text{квадратное уравнение}$$

дискриминант  $\rightarrow D_1 > 0$  — два различных корня:  
делим на 4

$$D_1 = \left(\frac{4\sqrt{2}t}{2}\right)^2 - (gt^2 - g) = 4 \cdot 2 \cdot t^2 - gt^2 + g = 8t^2 - gt^2 + g =$$

$$D_1 = \left(\frac{4\sqrt{2}t}{2}\right)^2 - (gt^2 - g) = 8t^2 - gt^2 + g =$$

$$= g - t^2$$

$$D_1 > 0$$

$$g - t^2 > 0$$

$$t^2 < g$$

$$-3 < t < 3 - \text{условие на } t \sim 1$$

По теор. обр. теор. Виета:

$$x_1; x_2 = (gt^2 - g)$$

Из условия корни  $x_1$  и  $x_2$  при  
исходе переименования дают  
положительное число  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow gt^2 - g > 0 \quad | :g$$

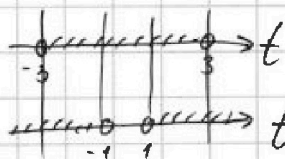
$$t^2 - 1 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$\begin{cases} t < -1 \\ t > 1 \end{cases} - \text{условие на } t \sim 2$$

система  
П.о. условия

$$\begin{cases} t < 3 \\ t > -3 \\ t < -1 \\ t > 1 \end{cases}$$



Итак:

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 7ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$$

$$= (a+b) + (a+b)(a+b+3)$$

$$\begin{cases} (a+b)(a+b+3) = 19p^4 \\ a-b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a+b+3) = 19p^4 \\ a = 12+b \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2b+12)(2b+15) = 19p^4 \\ a = 12+b \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad (2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

↑ кратно 2 и не 19  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow p = 2$

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2^4$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$$

↑ чётное ↑ нечётное

чётное + нечётное = нечётное

$$\text{П.о. } 2b+15 = 19$$

$$2b = 4$$

$$\underline{b = 2}$$

↑ единственное

нечётное в произведении  $19 \cdot 2^3$

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = 12 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ответ: (14; 2)

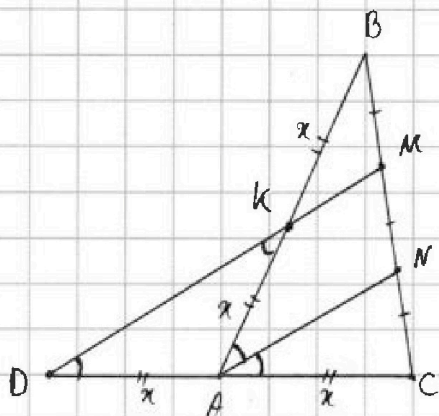


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1)  ~~$DM = MN + NM$~~   ~~$BM$~~   $DM \cap AB = K$   
 ~~$AN \parallel DM$~~

2)  $BM = MN = NC$   $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AN - \text{ср. лин. в } \triangle DMC \\ DM \parallel AN \end{array} \right\} \Rightarrow$   $KM - \text{ср. лин. в } \triangle ABN$   $\Rightarrow$   $AK = KB$   
(по теор. Фалеса)  $DA = AC$

3)  $AK = KB$   
 $DA = AC$   $\Rightarrow$   $AD = AC = AK = KB$   
 $AB = CD$

4)  $AD = AK \Rightarrow \triangle ADK - \text{н/д} \Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$

5)  $\left. \begin{array}{l} \angle AKD = \angle NAK \text{ (накр. угл. при } AN \parallel DM) \\ \angle ADK = \angle CAN \text{ (соств. при } AN \parallel DM) \\ \angle ADK = \angle AKD \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAN = \angle NAK \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \cos(2\angle CAN) =$   
 $= \cos(\angle CAB)$

6)  $\triangle ABC$ : по теор. косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos(\angle CAB)$$

$$6^2 = x^2 + 4x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$6^2 = 8x^2; x^2 = \frac{9}{2}; x = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{2}$$

$$AB = 2x = 3\sqrt{2}$$

Ответ:  $AB = 3\sqrt{2}$

Дано:

$\triangle ABC$

$\{M; N\} \in BC$

$BM = MN = NC$

$AN \parallel DM$

$MD \cap AC = D$

~~$AB \parallel AC$~~   $A \in DC$

$BC = 6$

$AB = CD$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

$AB = ?$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 ряд  2 ряд  3 ряд  ...

мест 12, учеников - 11  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  один ряд останется незаполненным

Рассмотрим такой ряд:

выберем 2-х учеников из 11 для этого ряда -  $C_{11}^2$   
 пусть тот, кто выше -  $\delta$   
 тот, кто ниже -  $\mu$

условия удовлетворяют только такие раскладки  $\delta$  и  $\mu$ :

$\delta$	$\mu$	$\mu$	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	$\delta$	<input type="checkbox"/>	$\mu$
$\mu$	<input type="checkbox"/>	$\delta$	$\delta$

— их 4 варианта.

Чтобы выбрать такой ряд:  $C_{11}^2$  и варианты.  
 На этот ряд в сумме способов:  $4^2 \cdot C_{11}^2$

---

Оставшиеся 9 мест заполнить 9 учениками.  
 (\*) Для выполнения условия будет достаточно посадить выбранный набор для данного ряда в порядке возрастания, начиная с 1-й парты.  
 на 1-й ряд способов -  $C_9^3$  это можно сделать лишь 1 способом  
 на 2-й ряд -  $C_6^3$   
 на оставшийся всего 1 вариант раскладки (\*)

---

Итого кол-во комбинаций:

$$4^2 \cdot \frac{11!}{2!(11-2)!} \cdot \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{16 \cdot (10 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4)}{2 \cdot 2 \cdot 8} = 1760 \cdot 7 \cdot 120 = 1478400$$

Ответ: 1478400

120  
 $\times 1260$   
 $\frac{1478400}{840}$



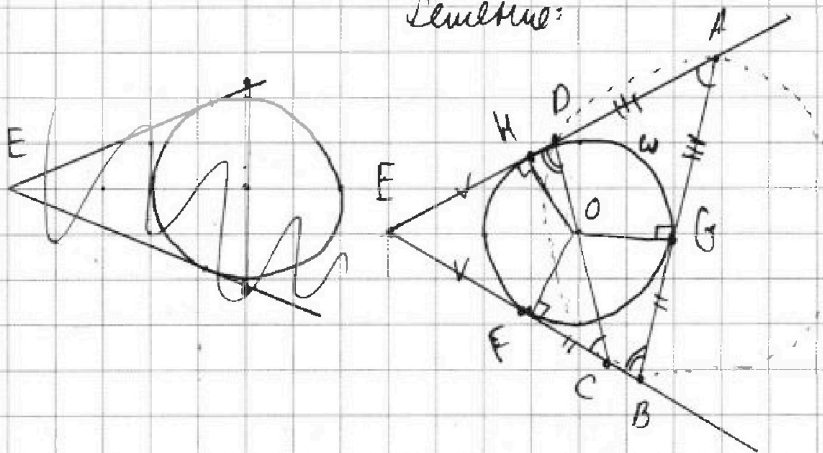
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:



Дано:

$ABCD$  - впис. 4-х-угол.

$AD \cap BC = E$

$\omega$  - окр. впис. в  $\triangle AEB$   
с центром в т.  $O$

$O \in DC$

$BE = 12$

$ED + DO = ?$ ,  
 $(ED + DO) \rightarrow \max$

1) т.к.  $ABCD$  - впис. :  $\angle CBA = \angle EDC$   
 $\angle ECO = \angle BAE$

2)  $Pow(E; \omega) = EC \cdot EB = ED \cdot AE$

3)  $\{F; G; H\}$  - точки касания  $\omega$  с сторонами

$\triangle AEB \Rightarrow EH = EF$

$FB = BG$

$AD = AG$

4)  $\angle AEB = 180 - \angle EAB - \angle EBA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HOF = \angle EAB + \angle EBA$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. из любой деревни можно добраться в любую другую, причём единственным образом  $\Rightarrow$  дороги (рёбра) и деревни (вершины) образуют связный граф без циклов.

Центре деревни из которых выходят 5, 6, 7 и 9 рёбер пусть будут "основными" а другие - "остаточными".

От "остаточных" можно вывести только одно ребро  $\Rightarrow$  такие вершины не могут находиться между 2-мя группами, они должны быть замыкающими  $\Rightarrow$  они могут присоединяться только к "основным".

"основные" должны быть соединены последовательно. Прономеруем "основных".

Путь "основной" I имеет  $n_1$  рёбер; II -  $n_2$  рёбер; III -  $n_3$  рёбер; IV -  $n_4$  рёбер.

встроим их так:  $\textcircled{I} - \textcircled{II} - \textcircled{III} - \textcircled{IV}$

тогда свободных рёбер останется:

$$y \text{ I-го: } n_1 - 1$$

$$y \text{ II-го: } n_2 - 2$$

$$y \text{ III-го: } n_3 - 2$$

$$y \text{ IV-го: } n_4 - 1$$

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 2) + (n_3 - 2) + (n_4 - 1) =$$

количество "остаточных"



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пока всего деревьев:

$$4 + (n_1 - 1) + (n_2 - 2) + (n_3 - 2) + (n_4 - 1) =$$

$$= 4 + (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) - 1 - 2 - 2 - 1 =$$

$$= (5 + 6 + 7 + 9) - 2 = (5 - 2) + 7 + 15 =$$

$$= 3 + 7 + 15 = 25$$

Ответ: может быть деревьев 25.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

тогда  
выражение  
имело  
смысл

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 > 0 & (1) \\ 1 - |x - y - 1| > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x - 2y - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 2x - 1) + 1(-y^2 - 2y - 1) + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 - (y+1)^2 > -2 \quad | : -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 < 2$$

часть плоскости, находящейся  
внутри окружности с центром в  
т.  $O(1; -1)$  и радиусом  $r = \sqrt{2}$

$$(2) \quad 1 - |x - y - 1| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - (y+1)| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > y+1 \\ x - y < 2 \\ x < y+1 \\ -x + y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > y+1 \\ x < y+2 \\ x < y+1 \\ x > y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > y+1 \\ x < y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y < x-2 \\ y > x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < x-1 & \text{- часть плоскости ниже прямой } y = x-1 \\ y > x-2 & \text{- часть плоскости выше прямой } y = x-2 \\ y > x-1 & \text{- часть плоскости выше прямой } y = x-1 \\ y > x & \text{- часть плоскости выше прямой } y = x \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

Сумма двух неотрицательных положительных парней не может давать 2

значит корни данных положительных целые числа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x-y-x^2-y^2} = 0 \\ \sqrt{1-|x-y-1|} = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x-y-x^2-y^2} = 2 \\ \sqrt{1-|x-y-1|} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x-y-x^2-y^2} = 1 \\ 1-|x-y-1| = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ |x-y-1| = 3 \end{array} \right. \quad \emptyset \quad \text{точка } (x;y) \text{ принадлежит окружности, но она не входит в зону решения (см. предыдущ. стр.)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y+1)^2 = -2 \\ |x-y-1| = 1 \end{array} \right. \quad \emptyset \quad \text{сумма квадратов } < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ |x-y-1| = 0 \end{array} \right.$$

(1)  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$  - оар. с центром в  $(1;-1)$  и радиусом 1

(2)  $|x-y-1| = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq y+1 \\ x-y-1=0 \\ x < y+1 \\ -x+y+1=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y+1 \\ \emptyset \end{array} \right. \Leftrightarrow \emptyset$

$\Leftrightarrow y = x-1$  - прямая линия

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

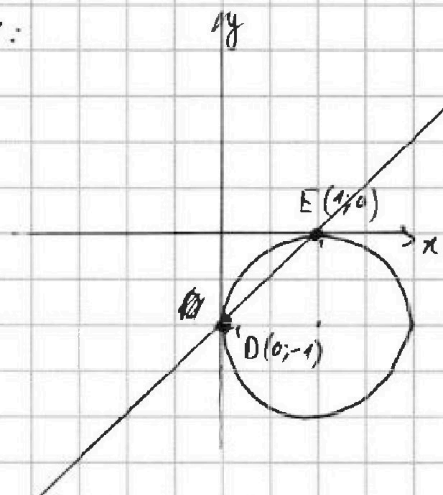
СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изобразим решение системы:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$



Проверим принадлежат ли точки E и D окружности:

$$E: (1-1)^2 + (0+1)^2 = 1 \\ 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$D: (0-1)^2 + (-1+1)^2 = 1 \\ 1 = 1 \quad \checkmark$$

Прямая может или касаться (1 одну точку) или пересекаться с окружностью.

В нашем случае она пересекла окружность в точках E(1;0) и D(0;-1) — это и есть

решения  $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$

Ответ: (1;0), (0;-1)

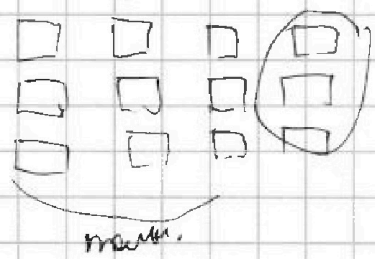
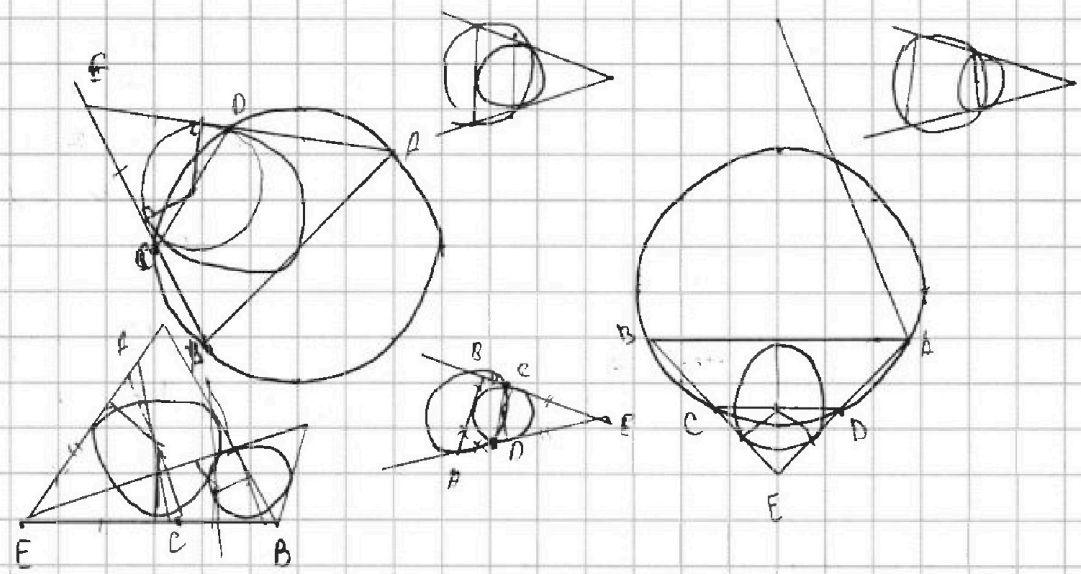


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

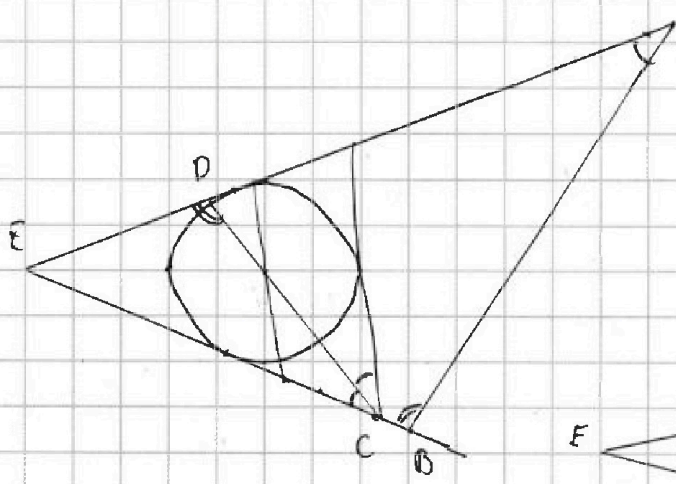
- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

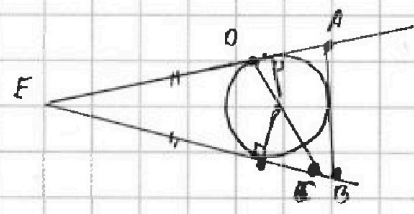


- всевозможные  $(4 \cdot C_{11}^2) \cdot (P_2 \cdot P_3 \cdot P_3)$   
 $C_9^3 \cdot C_6^3$



$$BE \cdot EC = ED \cdot AE$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{ED}{EB}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

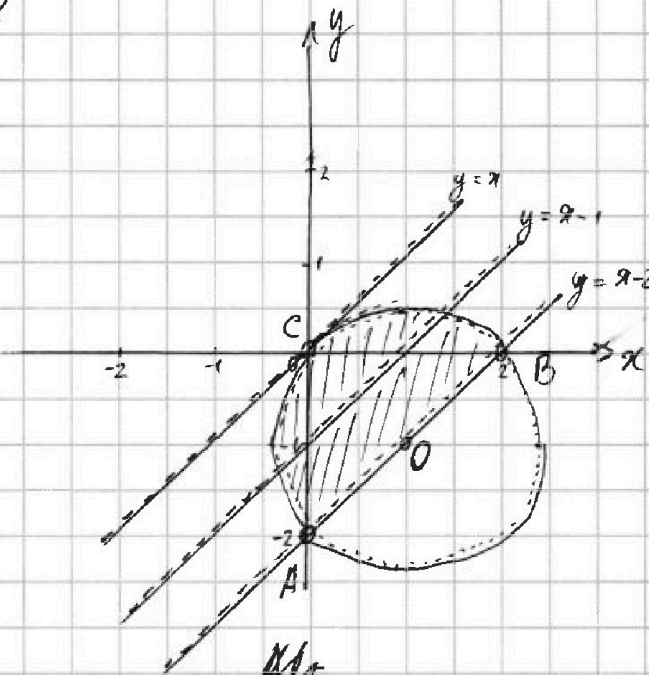
СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем систему условий на картинке:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 < 2 \\ \begin{cases} y < x-1 \\ y = x-2 \\ y > x-1 \\ y < x \end{cases} \end{cases}$$

Изобразим  
систему  
графически



Найдём точки пересечения окр.-ты с осью Oy:

$$(y_{AC} - 1)^2 + 1 = 2$$

$$(y_{AC} - 1)^2 = 1$$

$$y_{AC} \in \{-2; 0\}$$

Значит:  $A(0; -2); C(0; 0)$

Пересечение с осью Ox:

$$(x_{BC} - 1)^2 + 1 = 2$$

$$x_{BC} \in \{0; 2\}$$

$$C(0; 0)$$

$$B(2; 0)$$

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB$  - диаметр.