МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-9=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=6$, $\cos(2\angle CEM)=-\frac{3}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED+DO$, если известно, что $BE=12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+4\sqrt{2}\,tx+(9t^2-9)=0$ – квадратное уравнение

дискриминант деленный на 4 → $D_1>0$ – два различных корня:

$\cancel{D_1=\left(\frac{4\sqrt{2}t}{2}\right)^2-9t^2=4\cdot 2\cdot t^2-9t^2=8t^2-9t^2=-t^2}$

$$D_1=\left(\frac{4\sqrt{2}t}{2}\right)^2-(9t^2-9)=8t^2-9t^2+9=9-t^2$$

$D_1>0$

$9-t^2>0$

$t^2<9$

$-3<t<3$ – условие на t №1

По теор. обр. теор. Виета:

$x_1\cdot x_2=(9t^2-9)$

Из условия корни x_1 и x_2 при ~~ихних~~ перемножении дают положительное число $\Rightarrow$

$\Rightarrow 9t^2-9>0 \quad |:9$

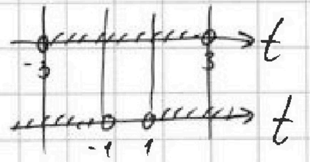
$t^2-1>0$

$t^2>1$

$\left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>1 \end{array}\right.$ – условие на t №2

Т.о.: система условий

$$\begin{cases} t<3 \\ t>-3 \\ \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>1 \end{array}\right. \end{cases}$$



Итог: $t\in(-3;-1)\cup(1;3)$

Ответ: $t\in(-3;-1)\cup(1;3)$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b=(a+b)^2+3(a+b)=$$

$$=\cancel{(a+b)}+(a+b)(a+b+3)$$

$$\begin{cases}(a+b)(a+b+3)=19p^4\\ a-b=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)(a+b+3)=19p^4\\ a=12+b\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2b+12)(2b+15)=19p^4 \quad (1)\\ a=12+b\end{cases}$$

(1) $(2b+12)(2b+15)=19p^4$

кратно 2 и не 19 $\Rightarrow$

$\Rightarrow p=2$

$$2(b+6)(2b+15)=19\cdot 2^4$$

$$(b+6)(2b+15)=19\cdot 8$$

чётное нечётное

чётное + нечётное = нечётное

Т.о. $2b+15=19$ — единственное нечётное в произведении $19\cdot 2^3$

$2b=4$

$\underline{b=2}$

$$\begin{cases}b=2\\ a=12+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=14\\ b=2\end{cases}$$

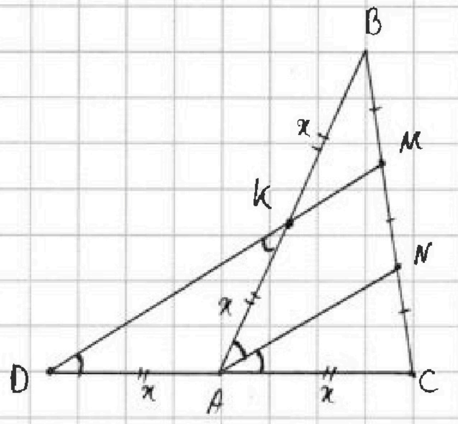
Ответ: $(14;2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\triangle ABC$

$\{M; N\} \in BC$

$BM = MN = NC$

$AN \parallel DM$

$MD \cap AC = D$

$A \in DC$

$BC = 6$

$AB = CD$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

$AB = ?$

Решение:

1) ~~$CM = MN = BM$~~ $DM \cap AB = K$

~~$AN \parallel DM$~~

2) $BM = MN = NC$, $DM \parallel AN$ $\Rightarrow$ AN - ср. лин. в $\triangle DMC$, KM - ср. лин в $\triangle ABN$ (по теор. Фалеса) $\Rightarrow$ $AK = KB$, $DA = AC$

3) $AK = KB$, $DA = AC$, $AB = CD$ $\Rightarrow$ $AD = AC = AK = BK$

4) $AD = AK \Rightarrow \triangle ADK$ - р/б $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$

5) $\angle AKD = \angle NAK$ (накр. леж. при $AN \parallel DM$)

$\angle ADK = \angle CAN$ (соотв. при $AN \parallel DM$)

$\angle ADK = \angle AKD$

$\Rightarrow \angle CAN = \angle NAK \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(2\angle CAN) = \cos(\angle CAB)$

6) $\triangle ABC$: по теор. косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos(\angle CAB)$$

$$6^2 = x^2 + 4x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$6^2 = 8x^2 \ ; \ x^2 = \frac{9}{2} \ ; \ x = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1{,}5 \cdot \sqrt{2}$$

$AB = 2x = 3\sqrt{2}$

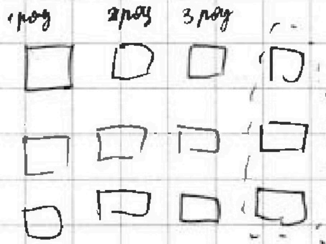
Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



мест 12, учеников – 11 ⇒

⇒ один ряд останется незаполненым

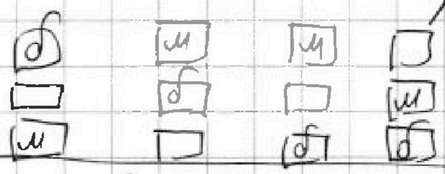
Рассмотрим такой ряд:

выберем 2-х учеников из 11 для этого ряда – C_{11}^2

пусть тот, что выше – б

тот, что ниже – м

условию удовлетворяют только такие рассадки б и м:



– их 4 варианта.

$120 \cdot 7 = 840$

$1760 \cdot 840 = 1478400$

Чтобы выбрать такой ряд: C_4^1 4 варианта.

На этот ряд в сумме способов: $4^2 \cdot C_{11}^2$

Оставшиеся 9 мест заполним 9 учениками.

(*) Для выполнения условия будет достаточно рассадить выбранный набор для данного ряда в порядке возрастания, начиная с 1-й парты.

На 1-й ряд способов – C_9^3 — это можно сделать лишь 1 способом

на 2-й ряд – C_6^3

на оставшийся всего 1 вариант рассадки (*)

Итого кол-во комбинаций: $4^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^2 \cdot C_6^3 =$

$= 4^2 \cdot \frac{11!}{2!\,(11-2)!} \cdot \frac{9!}{3!\cdot(9-3)!} \cdot \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \frac{16\cdot(10\cdot 11)\cdot(7\cdot 8\cdot 9)\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 6\cdot 6}$

$= \frac{(16\cdot 10\cdot 11)\cdot 7\cdot(8\cdot 3\cdot 4\cdot 5)}{2\cdot 2\cdot 3} = 1760\cdot 7\cdot 120 = 1478400$

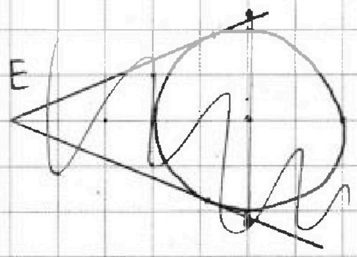
Ответ: 1478400

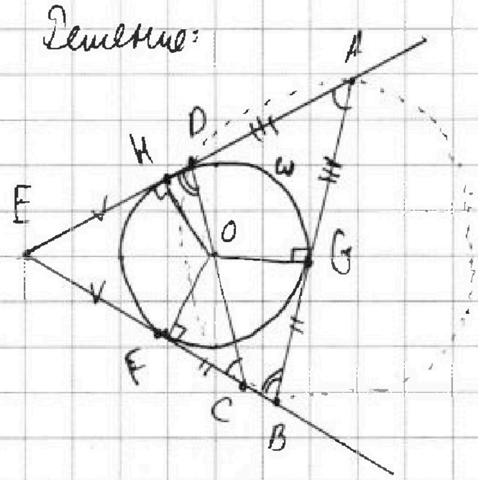
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Решение:





Дано:

$ABCD$ - впис. 4-х-ник.

$AD \cap BC = E$

ω - окр. впис. в $\triangle AEB$ с центром в т. O

$O \in DC$

$BE = 12$

$ED + DO = ?$,

$(ED + DO) \to max$

1) т.к. $ABCD$ - впис.: $\angle CBA = \angle EDC$

$\angle ECO = \angle BAE$

2) $Pow(E; \omega) = EC \cdot EB = ED \cdot AE$

3) $\{F; G; H\}$ - точки касания ω сторон $\triangle AEB \Rightarrow EH = EF$

$FB = BG$

$AD = AG$

4) $\angle AEB = 180 - \angle EAB - \angle EBA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HOF = \angle EAB + \angle EBA$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.к. из любой деревни можно добраться в любую другую, причём единственным образом => дороги (рёбра) и деревни (вершины) образуют связный граф без циклов.

Четыре деревни из которых выходят 5, 6, 7 и 9 рёбер пусть будут „особенными" а другие – „остальными".

От „остальных" может выходить только одно ребро => такие вершины не могут находиться между 2-мя другими, они должны быть замыкающими => они могут присоединяться только к „особенным".

„Особенные" должны быть соединены последовательно. Пронумеруем „особенных".

Пусть „особенный" I имеет n_1 рёбер; II – n_2 рёбер; III – n_3 рёбер; IV – n_4 рёбер.

Выстроим их так: I – II – III – IV

Тогда свободных рёбер останется:

у I-го: $n_1 - 1$

у II-го: $n_2 - 2$

у III-го: $n_3 - 2$

у IV-го: $n_4 - 1$

$(n_1-1)+(n_2-2)+(n_3-2)+(n_4-1)$ — количество „остальных"

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда всего деревень:

$$4 + (n_1-1) + (n_2-2) + (n_3-2) + (n_4-1) =$$

$$= \cancel{4} + (n_1+n_2+n_3+n_4) - 1 - \cancel{2} - 2 - 1 =$$

$$= (5+6+7+9) - 2 = (5-2) + 7 + 15 =$$

$$= 3+7+15 = 25$$

Ответ: может быть деревень 25.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2$$

чтобы выражение имело смысл:

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2>0 \quad (1) \\ 1-|x-y-1|>0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $2x-2y-x^2-y^2>0 \Leftrightarrow -x^2+2x-y^2-2y>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-x^2+2x-1)+1(-y^2-2y-1)+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(x-1)^2-(y+1)^2+2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(x-1)^2-(y+1)^2>-2 \quad |:-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{(x-1)^2+(y+1)^2<2}$

часть плоскости, находящейся внутри окружности с центром в т. $O(1;-1)$ и радиусом $r=\sqrt{2}$

(2) $1-|x-y-1|>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-(y+1)|<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>y+1 \\ x-y<2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<y+1 \\ -x+y<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>y+1 \\ x<y+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<y+1 \\ x>y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x>y+2 \\ x<y \end{cases}} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} y<x-2 \\ y>x \end{cases}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<x-1 & \text{– часть плоскости ниже прямой } y=x-1 \\ y>x-2 & \text{– часть плоскости выше прямой } y=x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y>x-1 & \text{– часть плоскости выше прямой } y=x-1 \\ y<x & \text{– часть плоскости ниже прямой } y=x \end{cases} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2$$

Сумма двух неизвлекаемых положительных корней не может давать 2

значит корни дают положительные целые числа:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{2x-y-x^2-y^2}=0\\ \sqrt{1-|x-y-1|}=2\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{2x-y-x^2-y^2}=2\\ \sqrt{1-|x-y-1|}=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{2x-y-x^2-y^2}=1\\ 1-|x-y-1|=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-y-x^2-y^2=0\\ 1-|x-y-1|=4\end{cases}\\ \begin{cases}2x-y-x^2-y^2=4\\ 1-|x-y-1|=0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-y-x^2-y^2=1\\ 1-|x-y-1|=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=2\\ |x-y-1|=3\end{cases} \quad \varnothing\\ \cancel{(x-1)^2+y-x^2-y^2=}\\ \begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=-2\\ |x-y-1|=1\end{cases} \quad \varnothing\\ \begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=1\\ |x-y-1|=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1 & (1)\\ |x-y-1|=0 & (2)\end{cases}$$

— точка $(x;y)$ принадлежит окружности, но она не входит в зону решения (см. предыдущ. стр.)

— сумма квадратов <0

(1) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ — окр. с центром в $(1;-1)$ и радиусом 1

(2) $|x-y-1|=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq y+1\\ x-y-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<y+1\\ -x+y+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y+1\\ \varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=x-1$ — прямая линия

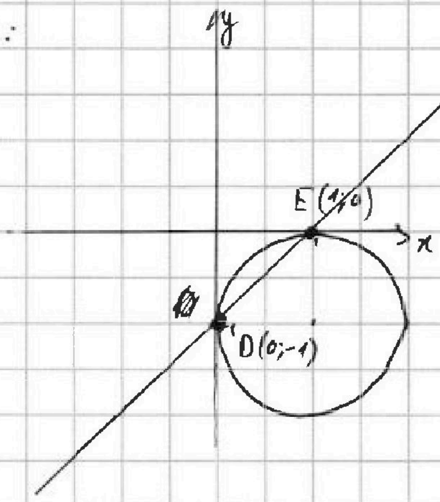
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Изобразим решение системы:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=1 \\ y=x-1 \ (2) \end{cases}$$

(2)

x	0	1
y	-1	0



Проверим принадлежат ли точки E и D окружности:

$E:\ (1-1)^2+(0+1)^2=1$

$1=1$ ✓

$D:\ (0-1)^2+(-1+1)^2=1$

$1=1$ ✓

Прямая может или касаться (1 общ. точка) или пересекаться с окружностью.

В нашем случае она пересекла окружность в точках $E(1;0)$ и $D(0;-1)$ — это и есть решения $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2$

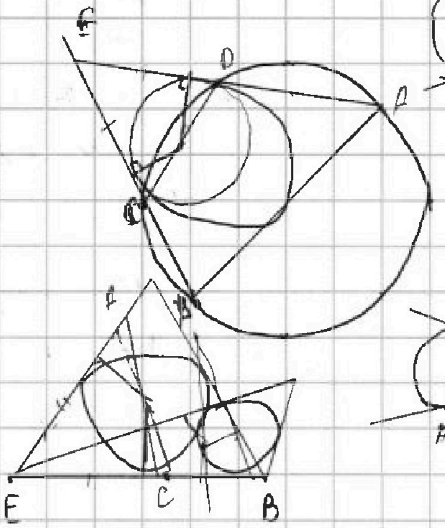
Ответ: $(1;0)$, $(0;-1)$

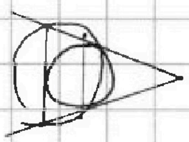
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

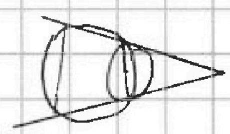
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

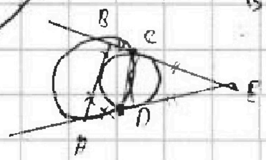
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

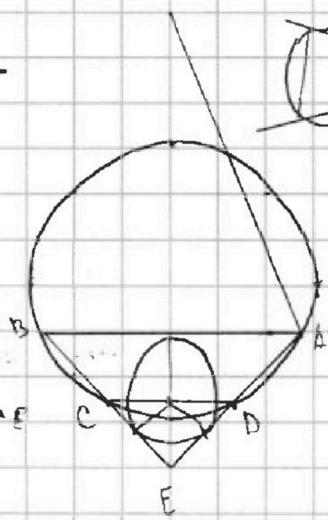
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

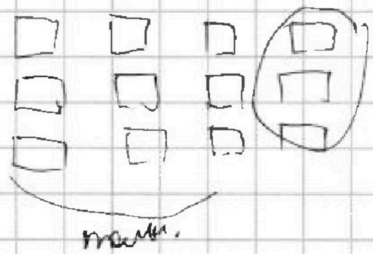






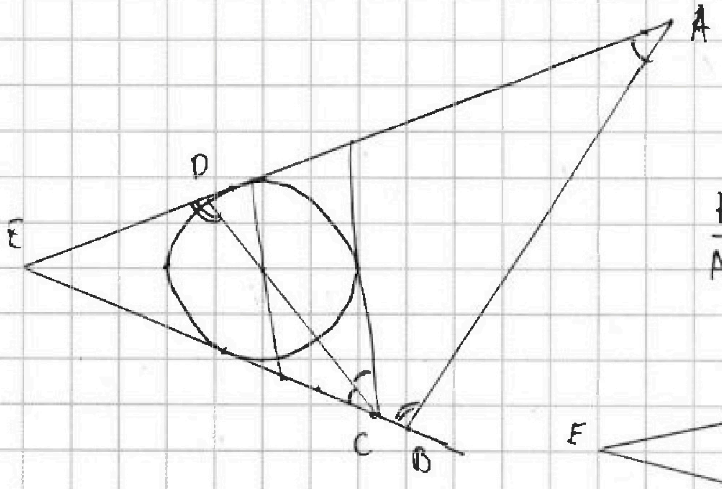






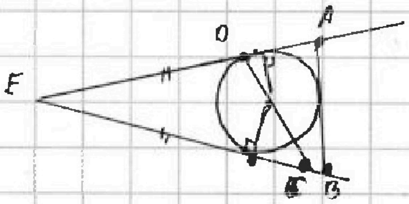
$(4\cdot C_{11}^{2})\cdot(P_2\cdot P_3\cdot P_3$

$C_9^3\cdot C_6^3$



$BE\cdot EC = ED\cdot AE$

$\frac{EC}{AE} = \frac{ED}{EB} =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

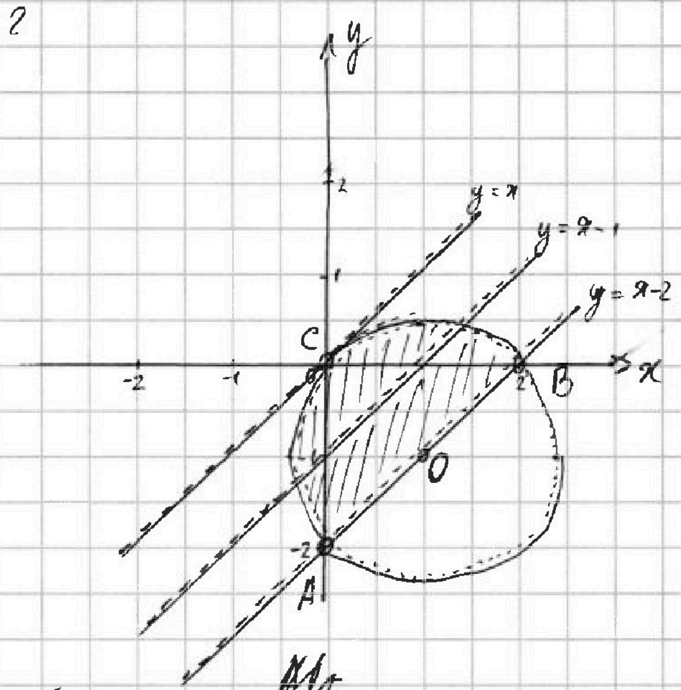
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Имеем систему условий на корни:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2<2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<x-1 \\ y>x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y>x-1 \\ y<x \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим систему графически



Найдём точку пересечения окр.-ти с осью Oy:

$$(y_{A/C}-1)^2+1=2$$

$$(y_{A/C}-1)^2=1$$

$$y_{A/C}\in\{-2;0\}$$

Значит: $A(0;-2)$; $C(0;0)$

Теперь с осью Ox:

$$(x_{B/C}-1)^2+1=2$$

$$x_{B/C}\in\{0;2\}$$

$C(0;0)$

$B(2;0)$

$$AB=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow AB$ – диаметр.