



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p - некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1.

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0.$$

$$x^2 + bx + c = 0.$$

тогда корни равно два $b > 0$.

$$c = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 > 0 \quad c > 0.$$

$$\begin{cases} D > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12t^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4t^2 + 16 > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 < 4 \\ t^2 > 1 \end{cases}$$

$$t^2 \in (1; 4) \Rightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2

переобозначим переменные:

$$a + b = 40 \Rightarrow a = 40 - b$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)^2 + 15(a - b) = (40 - 2b)^2 + 15(40 - 2b) =$$

$$= 1600 - 160b + 4b^2 + 600 - 30b = 4b^2 - 190b + 2200 = 17p^5$$

заместим, что все левая часть делится на 2 \Rightarrow

правая часть тоже делится на 2

$$17p^5 : 2$$

$$p^5 : 2$$

т.к. p - простое

$$p : 2 \Rightarrow p = 2$$

$$p : 2$$

$$4b^2 - 190b + 2200 = 17 \cdot 2^5$$

$$4b^2 - 190b + 2200 = 544$$

$$4b^2 - 190b + 1656 = 0$$

$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$

$$b = \frac{95 \pm \sqrt{95^2 - 4 \cdot 2 \cdot 828}}{4} = \frac{95 \pm \sqrt{2401}}{4} = \frac{95 \pm 49}{4}$$

$$\left[b = \frac{95 - 49}{4} = \frac{46}{4} = 11,5 \right.$$

$$\left. b = \frac{95 + 49}{4} = \frac{144}{4} = 36 \right.$$

т.к. $b \in \mathbb{N}$ $b = 36 \Rightarrow a = 40 - b = 4$

Ответ: $a = 4$; $b = 36$.

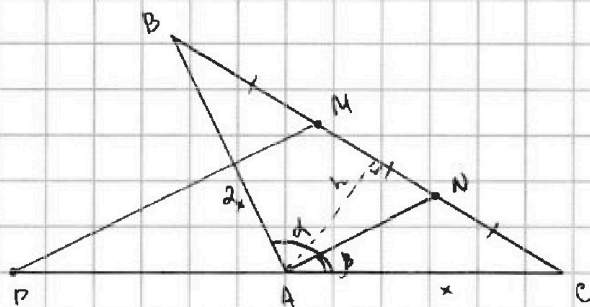


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BM = MN = NC$$

$$AB = DC$$

видно, что $\triangle ANE \sim \triangle AMC$ с катетом 2 $\Rightarrow AC = \frac{DC}{2}$

$$\text{т.е. } AB = 2AC$$

$$\text{т.к. } AC = x, \text{ тогда } AB = 2x$$

$$\frac{S_{ABN}}{S_{ANC}} = \frac{h \cdot BN \cdot 2}{2 \cdot h \cdot NC} = \frac{BN}{NC} = 2.$$

$$\frac{S_{ABN}}{S_{ANC}} = \frac{2x \cdot AN \cdot \sin \alpha \cdot 2}{2 \cdot x \cdot AN \cdot \sin \beta} = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

либо углы равны, или они в сумме 180°
но 180° они быть не могут, т.к. угол в треугольнике не развернутый $\Rightarrow \alpha = \beta$

$$\angle BAC = 2 \cdot \angle NAC$$

теорема косинусов:

$$BC^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot \cos \angle BAC \cdot x \cdot 2x$$

$$12^2 = 5x^2 - 2 \cdot \cos (2 \angle NAC) \cdot 2x^2$$

$$144 = 5x^2 + x^2$$

$$144 = 6x^2$$

$$24 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$AB = 2x = 4\sqrt{6}$$

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

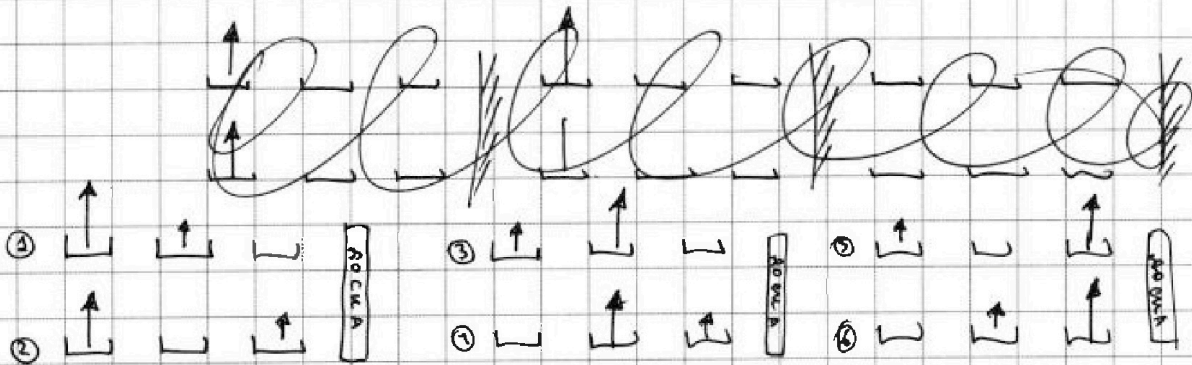
Давались сначала выборы, кто в каком ряду
будет сидеть. Для первого ряда: C_8^3
Для второго ряда: C_5^3
Для последн. ряда: C_2^2

$$N = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 \cdot \text{[scribble]}$$

рассмотрим ряд, там же по три человека.

можно рассадить их единственным способом
там тогда самый высокий сидит сзади,
а самый низкий спереди.

рассмотрим ряд с двумя людьми.
как их можно посадить:



на вариантах 3 и 4 малюшкий ничего не
увидишь, т.е. 4 варианта всех рассадок

$$n = N \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 \cdot 4 =$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 4 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 56 \cdot 40 = 2240$$

Ответ: 2240



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

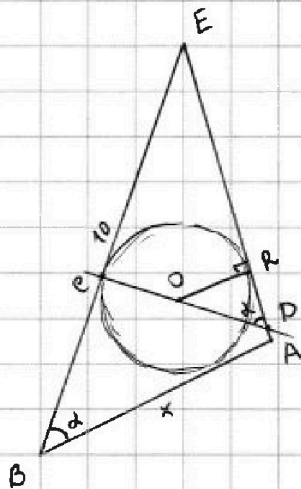
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 15.

найдем неизвестно с конца.

рассмотрим треугольник BEA.



будем считать длину стороны x и угол α .

тогда треугольник "закреплен"

т.е. задан единственно
или образом

тогда можно найти какой из углов
для этого треугольника найдем,
но если от $\sin \alpha$ отсюда,
тогда $\angle EBA + \angle CDA = 180^\circ$

$$\angle EBA = \angle EDO$$

$$EA = \sqrt{100 + x^2 - 2 \cdot 10 \cdot x \cdot \cos \alpha}$$

$$OR = \frac{S}{P} = \frac{2 \cdot 10 \cdot x \cdot \sin \alpha}{(10 + EA + x) \cdot 2} = \frac{10x \cdot \sin \alpha}{(10 + x + EA)}$$

$$OD = \frac{OR}{\sin \alpha} = \frac{10x}{10 + x + EA}$$

$$DR = \frac{OR}{\tan \alpha} = \frac{10x}{10 + x + EA} \cdot \cos \alpha$$

$$ER = \frac{10 + EA - x}{2}$$

$$ED + OD = \frac{10x}{10 + x + EA} (1 + \cos \alpha) + \frac{10 + EA - x}{2} =$$

$$= 20x(1 + \cos \alpha) + \frac{10 + EA - x}{2} \left(\frac{1}{(10 + EA)^2 - x^2} \right) + \frac{10 + EA - x}{2} =$$

$$= \frac{10 + EA - x}{2} \left(\frac{20x(1 + \cos \alpha)}{(10 + EA)^2 - x^2} + 1 \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



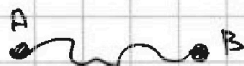
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

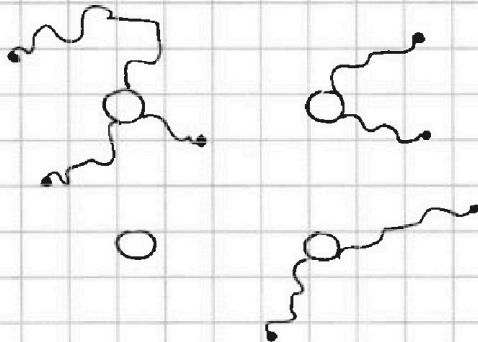
примем, что все деревья из которых всего одна дорога не могут быть соединены между собой, т.к. тогда бы мы никак не смогли бы выйти из этих деревьев



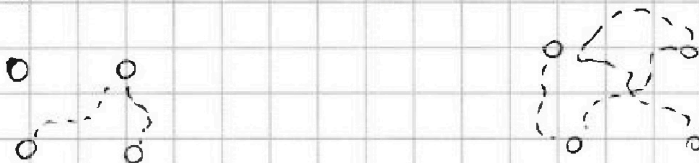
значит все дороги из маленьких деревьев будут те из которых ровно одна дорога.

в больших деревьях.

теперь рассмотрим большие деревья и рассмотрим только дороги именно между ними



если дорог две то будут по одной на каждом



если дорог больше 3 то будут такие

значит между ними ровно 3 дороги
всего выходов из больших $7 + 5 + 4 + 3 = 19$ выходов
между собой $2 \cdot 3 = 6$ выходов

в маленькие деревья уходит ровно $19 - 6 = 13$ дорог
значит мал. деревьев 13, а всего дер. $13 + 4 = 17$

Ответ: 17 деревьев.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 17.

рассмотрим второе слагаемое

$$\sqrt{1 - |x + y - 2|}$$

$$1 - |x + y - 2| \geq 0$$

$$|x + y - 2| \leq 1$$

$$-1 \leq x + y - 2 \leq 1$$

$$1 \leq x + y \leq 3$$

т.к. и x и y — целые
 $x + y$ — тоже целое, т.е.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$x + y = n$ в общем случае

рассмотрим первое слагаемое

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2}$$

$$2x + 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$2(x + y) \geq x^2 + y^2$$

$$2n \geq x^2 + y^2 - 2nx + n^2$$

$$2x^2 - 2n \cdot x + n^2 - 2n \leq 0$$

$$\Delta: 2x^2 - 2n \cdot x + n^2 - 2n = 0$$

$$x = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 8n^2 + 16n}}{4} = \frac{n \pm \sqrt{4n - n^2}}{2}$$

$$x \in \left[\frac{n - \sqrt{4n - n^2}}{2}; \frac{n + \sqrt{4n - n^2}}{2} \right]$$

рассмотрим для каждого n .

$$n = 1 \quad x \in \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7 \\ x \approx \in [-0,15; 2,35]$$

$$n = 2 \quad x \in [0; 2]$$

$$n = 3 \quad x \in \left[\frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right]$$

$$x \approx \in [0,75; 2,35]$$

заметьте, что x может быть равен 0, 1, 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при каких
пары

при
каждом

тем
множеств

рассмотрим
быть

какие

x	y
0	1
1	0
2	0
1	1
0	2
2	1
1	2

т.е. есть 7 различных пар:

проверим их.

0 и 1:

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{1-|1-2|} = 1 + 0 = 1$$

0 и 2:

$$\sqrt{4-4} + \sqrt{1-|0|} = 0 + 1 = 1$$

1 и 2:

$$\sqrt{6-5} + \sqrt{1-|1|} = 1 - 0 = 1$$

1 и 1:

$$\sqrt{4-2} + \sqrt{1-0} = \sqrt{2}$$

Ответ: x и y

{0; 1} {0; 2} {1; 2}

и в другом порядке



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

и корни

$$D > 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$c > 0$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$12t^2 - 4(4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = -4t^2 + 16 \geq 0$$

$$4 - t^2 > 0$$

$$t^2 < 4$$

$$t^2 \in (1, 4)$$

$$t \in (-2, -1) \cup (1, 2)$$

$$1 \geq |x+y-2|$$

$$-1 \leq x+y-2 \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$$

n →

$$2x+2y \geq x^2+y^2$$

$$2(x+y) \geq x^2+y^2$$

$$2n \geq (n-y)^2 + y^2$$

$$2n \geq n^2 - 2ny + 2y^2$$

$$2y^2 - 2ny + n^2 - 2n \leq 0$$

$$2y^2 - 2ny + n^2 - 2n \leq 0$$

$$\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{12 \cdot 12}{6} \cdot 27 = 416$$

$$a+b=40$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a+b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$a-b = 40-2b$$

$$(40-2b)^2 + 15(40-2b) = 17p^5$$

$$1600 + 15(40-2b) = 1600 + 600 - 30b =$$

$$1600 - 160b + 4b^2 + 600 - 30b = 17p^5$$

$$= 2200 - 30b = 17p^5$$

$$2100 - 190b + 4b^2 = 17p^5$$

$$p=2$$

$$8200 - 190b + 4b^2 = 17 \cdot 32$$

$$1656 - 190b + 4b^2 = 0$$

$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$

$$b = \frac{95 \pm \sqrt{95^2 - 828 \cdot 8}}{4}$$

$$9025 - 6624 =$$

$$= 2401 =$$

$$= 49^2$$

$$b = \frac{95 \pm 49}{4}$$

$$\frac{95+49}{4} = \frac{144}{4} = 36$$

$$\frac{95-49}{4} = \frac{46}{4} =$$

$$\begin{array}{r} 96 \overline{) 125} \\ \underline{96} \\ 29 \\ \underline{192} \\ 100 \\ \underline{96} \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 19} \\ \underline{10} \\ 9 \\ \underline{5} \\ 4 \end{array}$$

$$\frac{12 \cdot 12}{27} =$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ \times 35 \\ \hline 475 \\ 9025 \\ \hline 9025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 32 \\ \hline 34 \\ 340 \\ \hline 544 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 2200} \\ \underline{200} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 828 \\ \hline 168 \\ 1680 \\ 16800 \\ \hline 6624 \end{array}$$

$$50^2 = 2500$$

$$40^2 = 1600$$

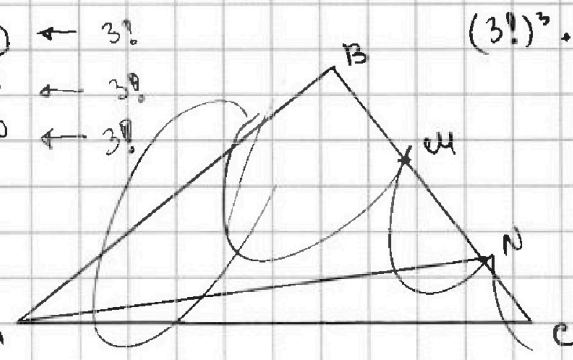
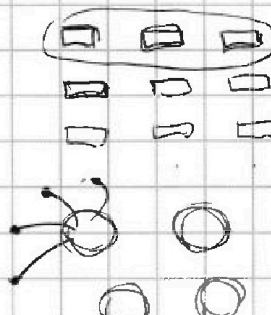
$$\begin{array}{r} 12 \cdot 12 \\ \times 27 \\ \hline 864 \\ 2160 \\ 21600 \\ \hline 32400 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

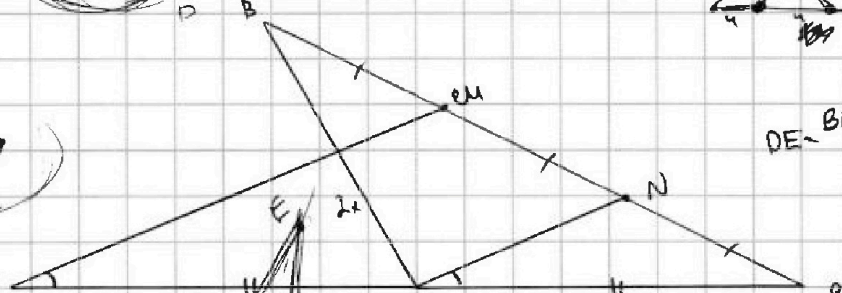
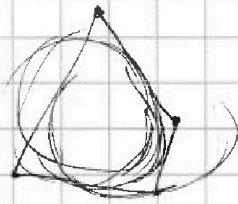
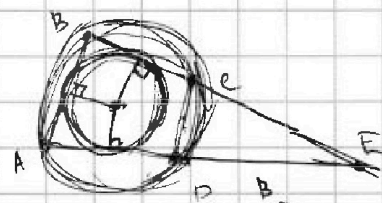
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

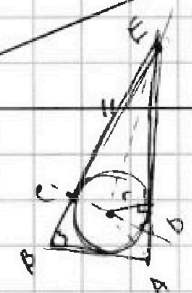
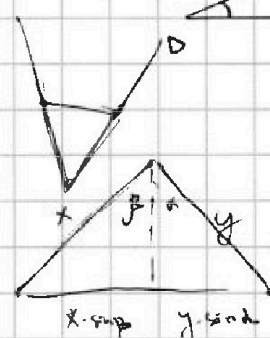
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3412}{6 \cdot 128}$$



$$DE = \frac{BE + EA + PA}{2} + \sqrt{OD \cdot r^2}$$

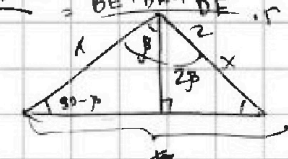


$$S = p \cdot r$$

$$12^2 = x^2 + 4x^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot 2x^2$$

$$12^2 = 5x^2 - 4 \cos 2\alpha \cdot 2x^2$$

$$\frac{BE \cdot BA \sin^2 \alpha}{2} = \frac{BE + BA + BE}{2} \cdot r$$



$$OD = r \sin \alpha = \frac{BE \cdot BA}{BE + BA + DE}$$

$$\begin{aligned} x - y &= -\frac{1}{4} \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

$$2x = \frac{1}{4} \sin^2 \beta$$

$$4x^2 \sin^2 \beta = x^2 + x^2 - 2 \cdot \cos(2\beta) \cdot x^2$$

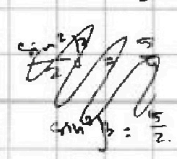
$$4 \sin^2 \beta = 2 - 2 \cos(2\beta)$$

$$\cos(2\beta) = \frac{2 - 4 \sin^2 \beta}{2}$$

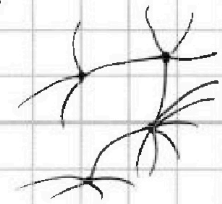
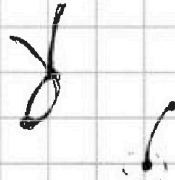
$$\cos(2\beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 60^\circ = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$



$$\cos(2\beta) = 1 - 2 \sin^2 \beta$$





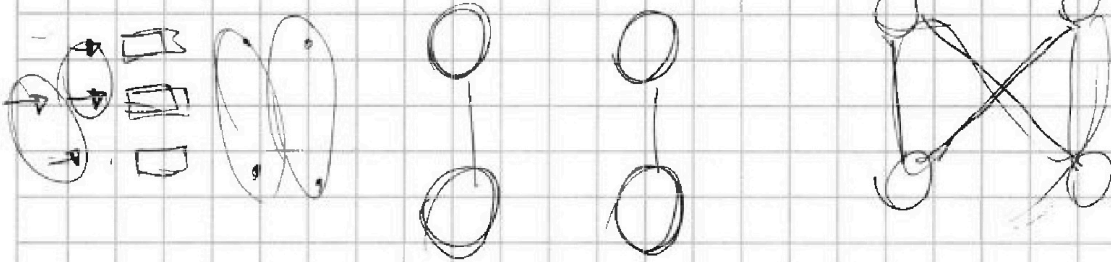
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$PE + PD = \frac{BE + EA + BA}{2} + \sqrt{\frac{BE^2 + BA^2}{(BE + BA + PD)^2}} - r^2$$



$$x + y = n.$$

$$2(x+y) \geq x^2 + y^2$$

$$2n \geq x^2 + x^2 - 2xn + n^2$$

$$0 \geq 2x^2 - 2n \cdot x + n^2 - 2n.$$

$$x = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 8n^2 + 16n}}{4}$$

$$= \frac{2n \pm 2\sqrt{4n - n^2}}{4} = \frac{n \pm \sqrt{4n - n^2}}{2} = \frac{2 \pm 2}{2}$$

$\sqrt{3}$

✓

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad y = 2$$

$$2x + 2y = 1 + x^2 + y^2$$

$$\sqrt{3} \approx 1.7, \quad 2 + 2 - 1 - 1$$

$$2.7$$

$$-93$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\approx 3.55$$

$$\approx -0.15$$

$$1 = \dots$$

$$\begin{cases} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{cases}$$

$$\approx 2.35$$

$$\approx 0.75$$

$$\frac{2}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1 = \dots$$

