



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Исходная арифметическая прогрессия a_1, a_2, a_3
и:

$$a_1 = a_1$$

$$a_i - a_{i-1} = b$$

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2b \\ a_5 = a_1 + 4b \\ a_9 = a_1 + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \quad a_3 - a_1 + 2b = 3x + 3 \\ II \quad a_1 + 4b = (x^2 + 2x)^2 \\ III \quad a_1 + 8b = 3x^2 \end{cases} \begin{array}{l} \\ II - I \Rightarrow \\ III - I \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \quad 2b = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3 \\ II \quad 6b = 3x^2 - 3x - 3 \end{cases} \xrightarrow{II - \frac{3}{2}I} 0 = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3 - x^2 - 1x + 1$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$0 = (x^3 + 3x^2 - 2)(x + 1)$$

Заметим что -1 - корень

$$0 = (x^2 + 2x - 2)(x + 1)^2$$

$$D = 4 + 8 = 12 \Rightarrow \frac{D}{4} = 3 \quad (\text{Дважды корень})$$

$$0 = (-x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})(x + 1)^2$$

$$\text{Ответ: } \{-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}; -1\}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2 & x + 1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \hline 2x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x + 1 \\ \hline x^4 + 4x^3 & x^2 + 3x^2 - 2 \\ \hline 3x^2 - 2x - 2 & \\ \hline 3x^2 + 3x^2 & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

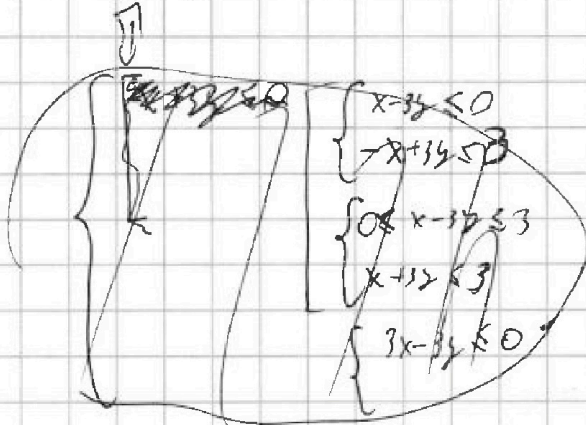
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

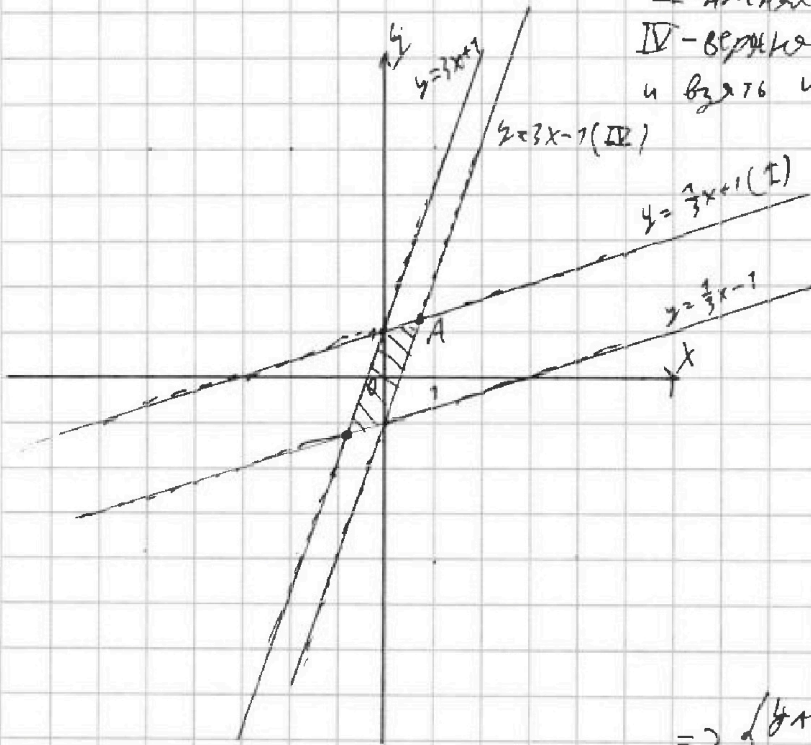
№2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \\ x-3y \leq 3 \\ -1 \leq x-y \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{I} & y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ \text{II} & y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ \text{III} & y \leq 3x + 1 \\ \text{IV} & y \geq 3x - 1 \end{cases}$$

I - нижняя полуплоскость от $y = \frac{1}{3}x + 1$
 II - верхняя полуплоскость от $y = \frac{1}{3}x - 1$
 III - нижняя полуплоскость от $y = 3x + 1$
 IV - верхняя полуплоскость от $y = 3x - 1$
 и взять их пересечение (включая границы)



$4y + 8x$ - максимум
 возместить по y и $x \Rightarrow$
 \Rightarrow мы видим, что
 максимум x и максимум y -
 - верхний правый
 угол фигуры (A)

$$A = I \cap II$$

$$\begin{cases} y_A = \frac{1}{3}x_A + 1 \\ y_A = 3x_A - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 1x_A - 1 \\ 0 = \frac{8}{3}x_A - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_A = 3x_A - 1 \\ x_A = \frac{3 \cdot 2}{8} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \\ x_A = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$4y_A + 8x_A = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 8



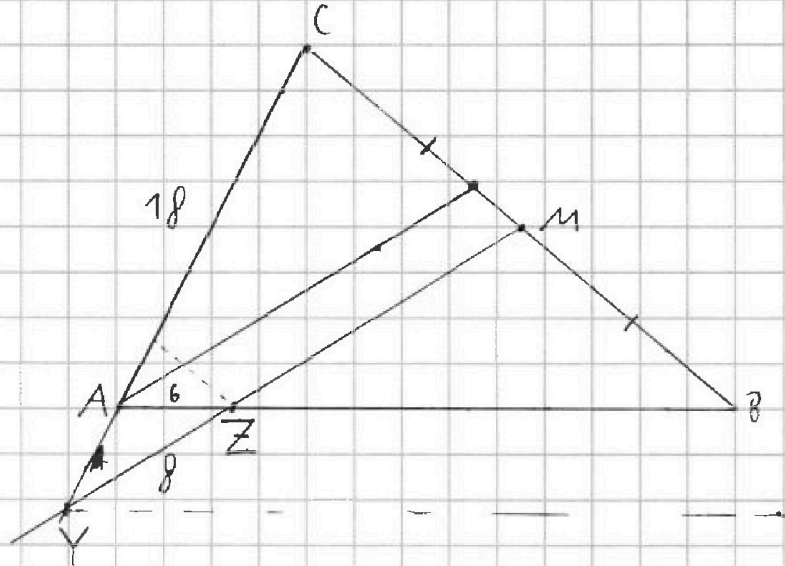
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 5x + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y} \\ \begin{cases} |x| = |y| \\ 5x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ \downarrow \end{cases}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x^2-5x-6)(-1)}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x-6)(x-1)(-1)}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} - 5$$

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} (\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}) + 4(x-1)(6-x) = 5$$

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} + 6-x + 4((x-1)(6-x) - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} (\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})) = 5$$

$$2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} + 4((x-1)(6-x) - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{6-x} (\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})) = 0$$

$$\sqrt{x-1} \sqrt{6-x} \cdot (1 - 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x})) = 2((x-1)(6-x))$$

$$1 - 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}) = 2\sqrt{x-1} \sqrt{6-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6
(продолж.)

2) оба угла между точками и центром деления будут равными (точки лежат друг в друге после поворота на χ) \Rightarrow угол = π

↓
точки симметричны от центра
(таких пар - $\frac{81-1-40}{2}$ для каждой

кроме центральной)

Эти пары разбиваются на 2 при поворотах на $\frac{\pi}{2}$
↓

количество различных пар (по поворотам точек)

$$= \frac{\binom{81-40}{2} + \frac{40}{2}}{4} = \frac{81!}{2! \cdot (81-2)! \cdot 4} + \frac{40}{2} = \frac{40}{4} =$$

(то что разбивается на 4) (на 2)

$$= \frac{81 \cdot 80}{2 \cdot 4} + 10 = 81 \cdot 10 + 10 = 820$$

Ответ: 820



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Всего можно выбрать

C_8^2 пар точек.

Когда мы поворачиваем

квадрат ~~на~~ 4 раза (не $\frac{90^\circ}{2}$)

то возвращаемся в

исходное положение, и после каждого поворота

мы "выпечатываем" пару точек которая

равносильна начальной, \Rightarrow большинства пар

~~они~~ объединяется в четвёрки которые

переходят сами в себя при повороте, но

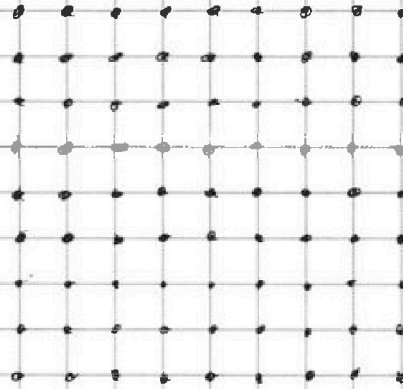
их может быть не 4 если пара переходит

в себя во время поворота. Такое происходит

когда точки расположены симметрично относительно

центральной точки (доказательство):

1) ~~Вопрос~~ Вопросов при повороте расстояние от центра вращения не меняется (точка в середине квадрата) \Rightarrow обе точки находятся на одном расстоянии от центра.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 67

$PQ \perp AC$



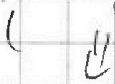
$O_1 O_2 \perp AC$ ($O_1 O_2 O_3$ - центры окружностей)

$O_1 O_2$ - центр Am

$O_3 O_2$ - центр CL



расстояния от L и от M до AC равны



$LM \parallel AC$



LM - ср. линия

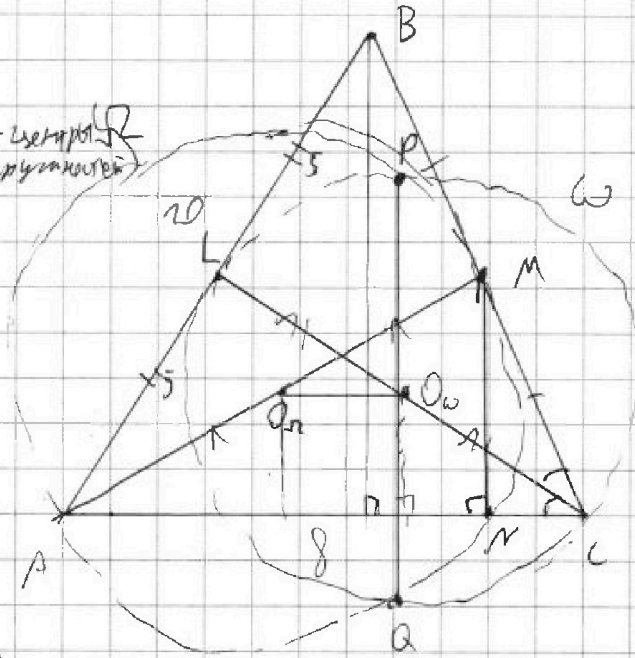


L - середина AB

CL - медиана (и биссектриса)



ABC - равнобедренный





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

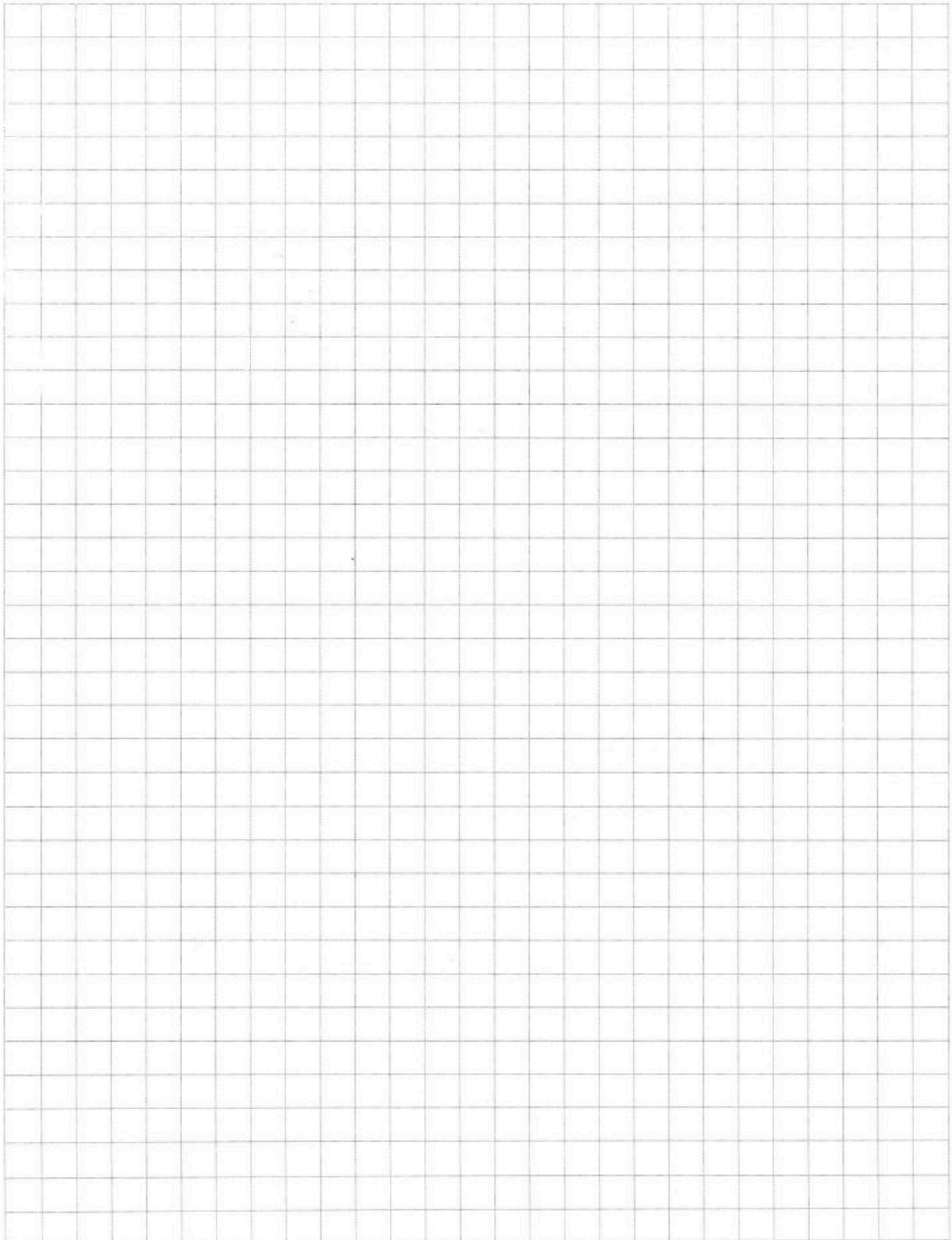
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





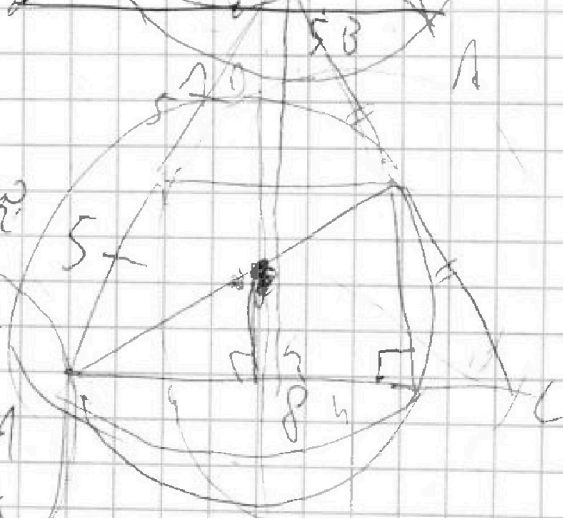
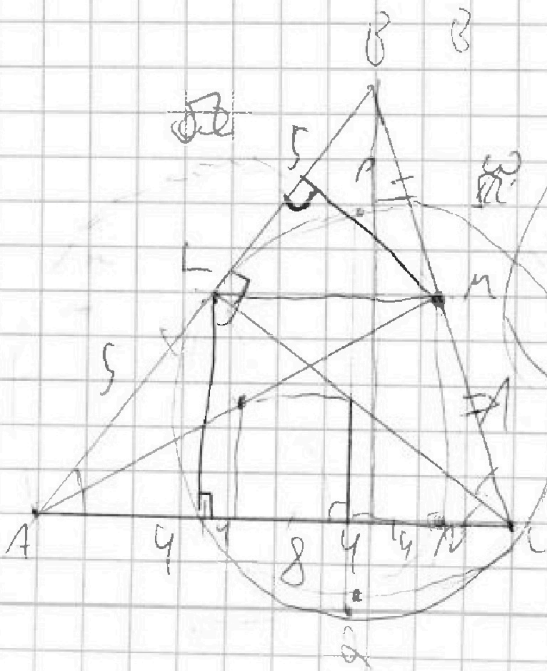
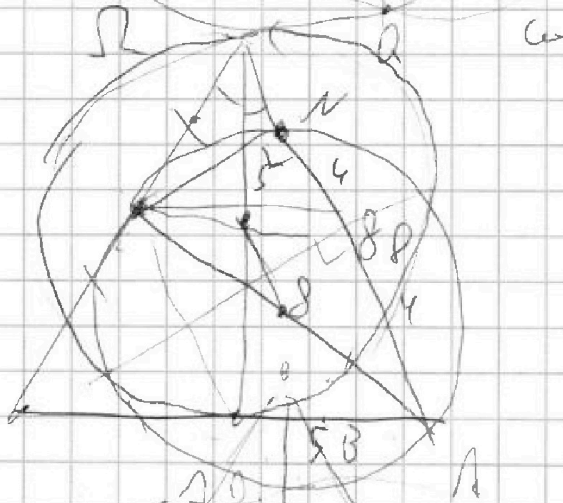
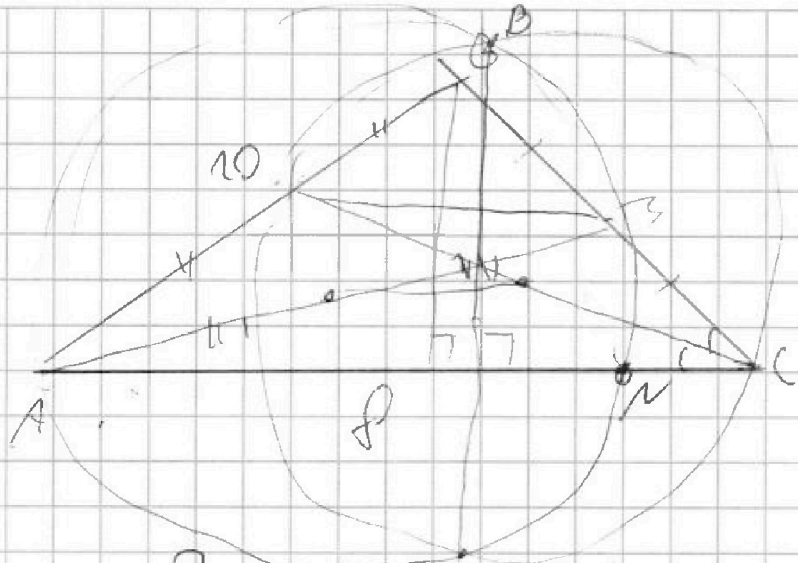
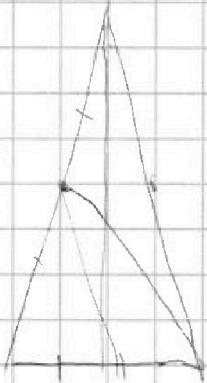
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2+1} - \sqrt{6-2} + 5 =$$
$$= 2\sqrt{6+54-32}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нов
(программ)

2) Оба угла между точками и центром равны $\pi/2$ (чтобы они перешли друг в друга после поворота на один угол) \Rightarrow = угол между ними = π .

Они симметричны от центра

у всех точек есть симметричная (но центральная не подходит т.к. она симметрична сама с собой)

Точки на $P - \frac{81-1}{2} = 40$ (пары которые имеют только одну точку которую можно получить поворотом на π)

(по повороту точки)
Количество различных пар =

$$\Rightarrow \frac{C_{81}^2 - 40}{4} + \frac{40}{2} = \frac{81!}{2! \cdot (81-2)! \cdot 4} - \frac{40}{2} =$$

Группа пар которые разбиваются на 4 (при повороте) на 2

$$= \frac{81 \cdot 80}{2 \cdot 4} - \frac{40}{2} = 81 \cdot 10 - 20 = 810 - 20 = 790$$

Ответ: 790

$$\begin{aligned} a + b + 5 &= 2a \cdot b \\ a - b - 2a \cdot b &= -5 \\ a^2 - b^2 + b^2 - 4a \cdot b \cdot (a-b) + 4a^2 - 1 &= 25 \\ a^2 + b^2 + 2a(4ab - 4a + 4b - 2) &= 25 \\ a(1-2b) - b &= -5 \end{aligned}$$

$$a(1-2b)$$



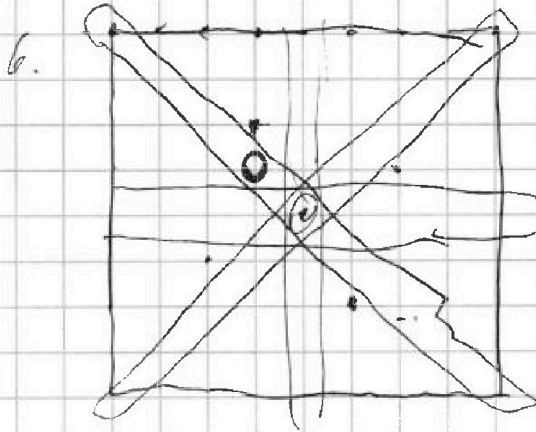
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

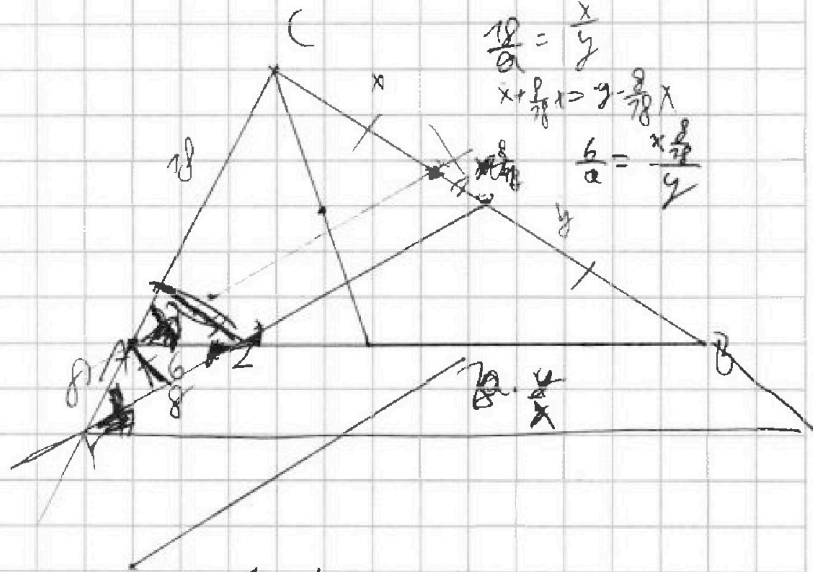
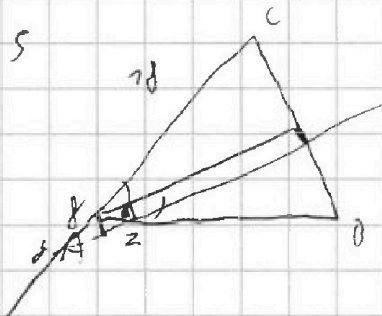


$$\frac{C_{87}^2}{4} = \frac{n!}{4k! \cdot (n-k)!} + 8$$

C_{87}^2



№5



$$\frac{10}{a} = \frac{x}{y}$$

$$x + \frac{10}{8}x = y - \frac{8}{10}x$$

$$\frac{6}{a} = \frac{x \cdot \frac{8}{10}}{y}$$

$$\begin{cases} a_0 + 2b = 3x + 3 \\ a_0 + 4b = (x^2 + 2x)^2 \\ a_0 + 8b = 3x^2 \end{cases}$$

$$1 + 4 + 4 - 7 - 2 - 2$$

$$7 - 4 + 4 - 7 + 2 - 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

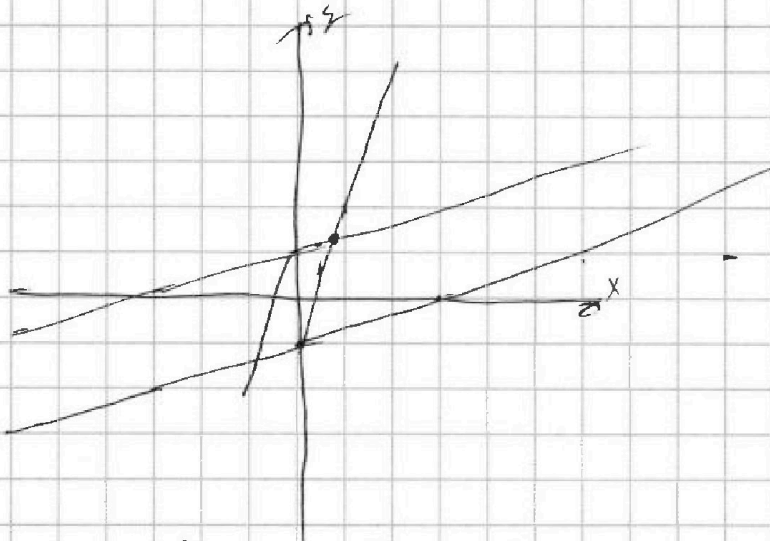
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - 3y = 3 \quad 3x - y = 1$$

$$y = \frac{1}{3}x - 1 \quad y = 3x - 1$$



$$m^2 + 2mn + n^2 - 9n - 9m$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) - 9m = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6y} - 5 = 2\sqrt{5+5x-y^2} \\ x^2 + 5x^2 - \sqrt{x} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{x} = y^4 + \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 - x$$

$$x(x^3 + 5x - 1) =$$