



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

Пусть  $a$  - первый член арифметической прогрессии,  $b$  - разность арифметической прогрессии

~~Пусть  $a$  - первый член арифметической прогрессии,  $b$  - разность арифметической прогрессии~~

$$\begin{cases} 5x+3 = a+2b & (1) \\ (x+2x)^2 = a+4b & (2) \\ 5x^2 = a+8b & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 = a+2b \\ (x+2x)^2 = a+4b & (*) \\ 3(x^2-x-1) = 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 = a+2b \\ (x+2x)^2 = a+4b & (*) \\ b = \frac{x^2-x-1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 = a+x^2-x-1 \\ (x+2x)^2 = a+4b \\ b = \frac{x^2-x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2+4x+4 \\ b = \frac{x^2-x-1}{2} \\ (x+2x)^2 = a+4b & (2) \end{cases} (*)$$

Пусть  $a$  и  $b$  известны,  $a$  и  $b$  (2) и решим

$$(x+2x)^2 = a+4b \Leftrightarrow (x+2x)^2 = -x^2+4x+4+2x^2-2x-2 \Leftrightarrow x^4+4x^3+4x^2 = x^2+2x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+3x^2-2x-2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3+3x^2-2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2+2x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1) = 0 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2+2x-2 = 0 & (4) \end{cases} (**)$$

Решим (4)

$$x^2+2x-2 = 0 \Leftrightarrow D = 2^2 - 4 \cdot (-2) = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1+\sqrt{3} \\ x = -1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Вернемся к совокупности (\*\*)

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1+\sqrt{3} \\ x = -1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Вернемся к системе (\*)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a = -x^2 + 4x + 4 \\ b = \frac{x^2 - x - 1}{2} \\ (x^2 + 2x)^2 = a + 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x + 4 \\ b = \frac{x^2 - x - 1}{2} \\ x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{5} \\ x = -1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Получим, что условие задачи верно тогда и только тогда, когда верно условие (~~и~~  $x \in \dots$ ) и все преобразованные равенства, то есть  $(3x+3)$ ,  $(x^2+x)^2$ ,  $(3x^2)$  являются соответственно третьим, пятым и ~~шестым~~ членами прогрессии - то есть арифметической прогрессии (мы можем её увидеть: первый член  $(-x^2+4x+4)$ , разность  $x^2 - x - 1$ ) тогда и только тогда, когда  $x \in \{-1; -1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\}$

Ответ:  $x \in \{-1; -1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |y-3x| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \quad | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ -7 \leq y-3x \leq 7 \quad | \cdot (-\frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \leq -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \quad | + \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \leq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 8x + 4y \leq 11$$

Значит выражение  $8x + 4y$  принимает значения не больше 11

При  $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$   $8x + 4y = 6 + 5 = 11$ ,  $|x-3y| = |\frac{3}{4} - \frac{15}{4}| = |-3| = 3$ ,

$$|3x-y| = |\frac{9}{4} - \frac{5}{4}| = |1| = 1$$

Значит при  $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$  имеют место и  $8x + 4y = 11$

Значит наибольшее значение  $8x + 4y$  равно 11

Ответ: 11



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - gm - gn = (m+n)^2 - g(m+n) = (m+n)(m+n-g)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

★ Подборка чисел:

1.  $A = 13p^2, B = 75q^2$

$$A = (m+n)(m+n-g) = 13p^2$$

Поскольку, могут ли оба числа  $(m+n), (m+n-g)$  делиться на  $p$   
~~Если  $m+n \equiv 0 \pmod p$  и  $m+n-g \equiv 0 \pmod p$ , то  $g \equiv 0 \pmod p \Rightarrow p=3$  (т.к.  $p$  простое)~~

~~Если  $p=3$  и  $m+n \equiv p \pmod p$  и  $m+n-g \equiv p \pmod p$ , то  $m+n \equiv 13p \pmod p$ ,  $m+n-g \equiv p \pmod p$~~

$$(m+n)(m+n-g) = 13p^2 \Rightarrow \text{либо } m+n = 13p, m+n-g = p, \text{ либо}$$

$$m+n = p, m+n-g = 13p \quad (\text{рассмотрим числа на простом})$$

$$m+n > m+n-g, 13p > p \Rightarrow \text{единственный вариант } m+n = 13p,$$

$$m+n-g = p, \text{ но тогда } (m+n) - (m+n-g) = g = 12p \Rightarrow g: 12p$$

$$g: 12 \Rightarrow \text{также делит на } m+n \Rightarrow \text{равно делит на } (m+n),$$

$$(m+n-g), \text{ кратно } p$$

Тогда верно, что  $m+n = 13p, m+n-g = p^2$ , либо  $m+n = p^2, m+n-g = 13p$ ,  
 либо  $m+n = 1, m+n-g = 13p^2$ , либо  $m+n = 13p^2, m+n-g = 1$

Подборка чисел по порядку

1)  $m+n = 13, m+n-g = p^2$

или  $m+n = 13$ , но  $m+n-g = p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$

$$B = mn(m+n-3) = 75q^2$$

$$m+n-3 = 13-3 = 10 \Rightarrow B = mn \cdot 10 = 75q^2 \Rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2$$

$$15:2 \Rightarrow q^2:2 \Rightarrow q:2 \quad (\text{т.к. } q \text{ простое}) \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mn \cdot 2 = 15 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow mn = 30$$

Получается,  $mn = 30, m+n = 13$

$m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  подборка вариантов  $m$  и  $n$  из условия, что

$mn = 30$  (без порядка):  $1 \times 30, 2 \times 15, 3 \times 10, 5 \times 6$

$m+n = 13 \Rightarrow$  единственный подходящий вариант  $3 \times 10$

2.  $m+n = p^2, m+n-g = 13$

$$m+n-g = 13 \Rightarrow m+n = 22 = p^2, \text{ но } 22 \text{ не является квадратом}$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим  $m \neq 1$  (иначе  $n \neq 1$ , т.к.  $4 \nmid$  в уравнении симметрично относительно  $m, n$ )

Если  $m+n-3=1$ , то  $m+n=4$

$$A = (m+n-3)(m+n-9) = 4 \cdot (-5) = -20 = -5^2, \text{ но } -5^2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  такого не могло быть

Заметим верно, что ни одно из чисел  $m, n, (m+n-3)$  не равно 1

$m, n, (m+n-3) = 13 \cdot p, p$  и ни одно из чисел  $m, n, (m+n-3)$  не равно 1  $\Rightarrow$  всего три варианта  $m=13, n=p, m+n-3=p$  (1);  
 $m=p, n=13, (m+n-3)=p$  (2),  $m=p, n=13, m+n-3=13$  (3)

1)  $n=p, m=13, m+n-3=p$   
 $n=p, m+n-3=p \Rightarrow m-3=0 \Rightarrow m=3 \neq 13$ , но  $m=13 \Rightarrow$  такого не могло быть

2)  $m=p, n=13, m+n-3=p$   
аналогично (1) (т.к. в уравнении сим. относительно  $m, n$ )

3)  $m=n=p, m+n-3=13$   
 $m+n-3=13 \Rightarrow m+n=16=2p \Rightarrow p=8$ , но 8 не простое число  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  такого не могло быть

Заметим для вариантов  $A=75 \cdot 4^2, B=13 \cdot 3^2$  пары  $(m, n)$  нет

Заметим единственные пары, удовлетворяющие все условия:  
 $(10, 3), (3, 10)$

Проверим:  $A = (10+3)(10+3-9) = 13 \cdot 4 = 13 \cdot 2^2$ , 2-простое

$$B = 10 \cdot 3 \cdot (10+3-3) = 300 = 75 \cdot 4 = 75 \cdot 2^2, 2\text{-простое}$$

(уравнения сим. относительно  $m, n$ )  $\Rightarrow$  пары  $(3, 10)$  тоже удовлетворяют.

Ответ:  $(m, n) \in \{(10, 3), (3, 10)\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

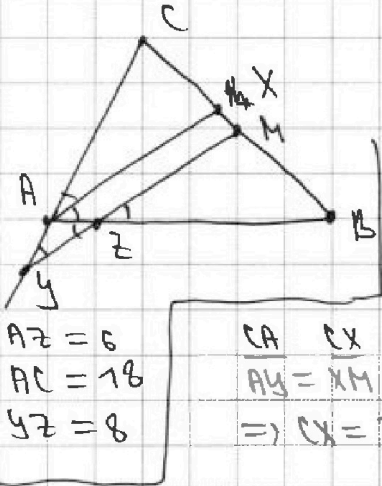


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$\begin{aligned} \angle XAB &= \angle MZB \quad (\text{м.к. } AX \parallel ZM) \\ \angle CAZ &= \angle XAB \quad (\text{м.к. } AX \parallel ZM) \\ \angle MZB &= \angle AZY \quad (\text{м.к. } ZM \parallel AY) \\ \angle AYZ &= \angle CAZ \quad (\text{м.к. } AX \parallel YM) \end{aligned} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AZY \text{ р/о } \wedge AY = AZ = 6$$

$$\begin{aligned} AZ &= 6 \\ AC &= 18 \\ YZ &= 8 \end{aligned}$$

$$\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} \quad (\text{м.к. } AX \parallel YM) \Rightarrow \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow \frac{CX}{XM} = 3 \Rightarrow CX = 3XM$$

$$BM = CM = CX + XM = 4XM \quad (\text{м.к. } M - \text{середина } BC)$$

$$\frac{BM}{MX} = \frac{BZ}{ZA} \quad (\text{м.к. } XM \parallel AZ) \Rightarrow \frac{4XM}{XM} = 4 \Rightarrow \frac{BZ}{ZA} = 4 \Rightarrow BZ = 4ZA = 4 \cdot 6 = 24 \Rightarrow AB = AZ + ZB = 6 + 24 = 30$$

пусть  $\angle ZAY = \alpha$ , тогда по теореме косинусов для  $\triangle YAZ$ :

$$YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cos \alpha \cdot AZ \cdot AY \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow 2 \cos \alpha \cdot 36 = 8 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{9}$$

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ZAY = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \angle BAC = -\cos \alpha = -\frac{2}{9}$$

по теореме косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AB \cdot AC \Rightarrow BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot 30 \cdot 18 = 900 + 324 + 160 = 1384 \Rightarrow BC = \sqrt{1384}$$

Ответ:  $BC = \sqrt{1384} = 8\sqrt{29}$

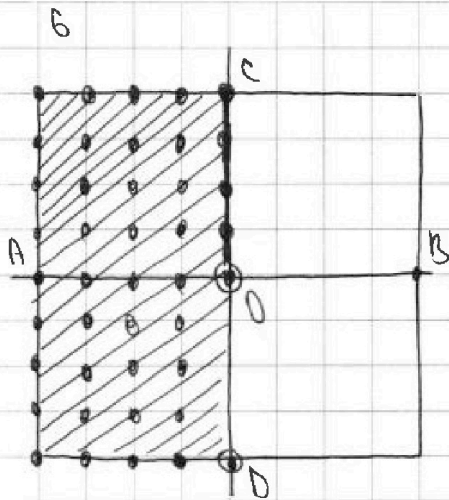


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим, какие раскраски узлов пересекают в себя при повороте \*

При повороте на  $180^\circ$  в себя переходят раскраски, симметричные относительно центра O

При повороте на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  никакие раскраски узлов в себя не переходят (узел тогда придется покрасить либо ровно один (центральный) узел, либо хотя бы четыре узла)

\* (раскраска из узлов  $\equiv$  покрасить свои узлы в белый цвет) тогда O

Рассмотрим, сколько раскрасок симметричны относительно ~~центра~~ O

Вз симметричной ~~раскраски~~ раскраски мы выбираем 1 узел ~~в симметричной области~~ в заштрихованной области (белый узел на  $(0,0)$  и не белый узел на  $(0,0)$  (они будут повторен) и ~~стремимся~~ симметрично O

То есть всего раскраска столько сколько узлов в обозначенной области (они не повторяются)

В обоз. области всего  $4 \cdot 4 + 4 = 40$  узлов  $\Rightarrow$  всего 40 раскрасок, пересекающие в себя при повороте

Всего способов покрасить свои узлы  $\frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40 = 3240$ , причем если считать, что раскраски, пересекающие в себя при повороте, считаются то всего 40 раскрасок мы посчитали свои раскраски (ровно 40 раскрасок, пересекающих в себя при повороте на  $180^\circ$ , остальные при любой повороте в себя не переходят)

Значит всего различных раскрасок ~~3240~~  $3240 - 40 = 3200$

Ответ: 3200



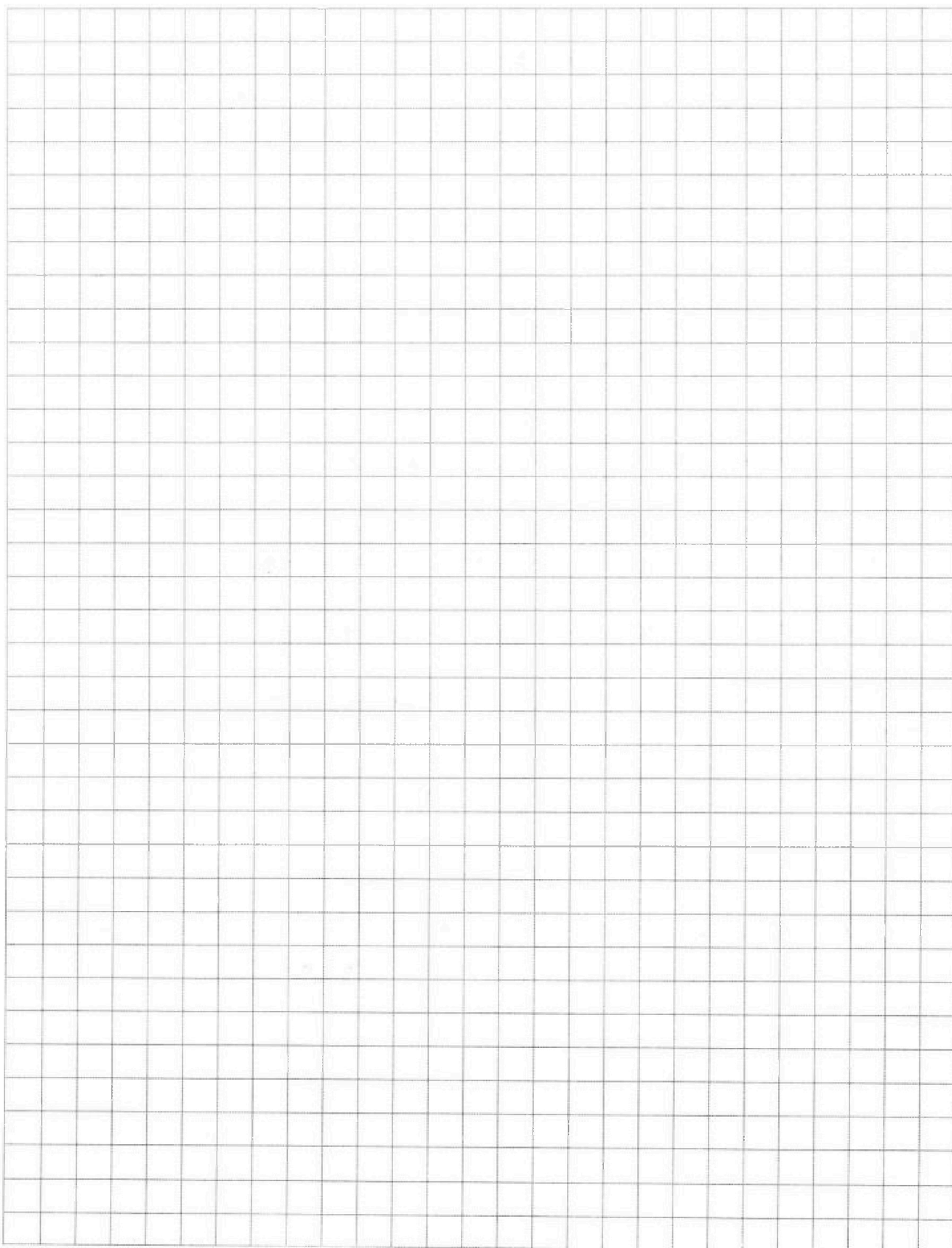


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





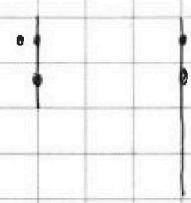
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

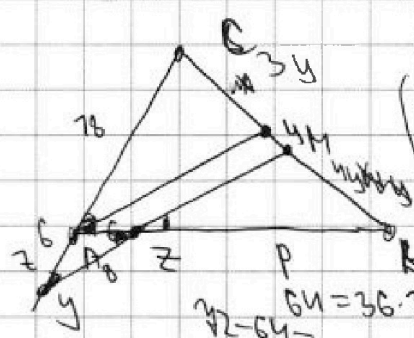
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{b-y} + 5 = 2\sqrt{b+5x-y^2} \\ x+5x^2 - \sqrt{y} = y - \sqrt{x} + 5y^2 \\ x=y \end{cases} \quad \begin{matrix} (a,b) \\ (b,a) \end{matrix}$$



Ры  
 $\frac{18}{6} = \frac{x}{y} = 3$   
 $x = 3y$

$$(b-x)(x+1) = 6+5x-1^2$$

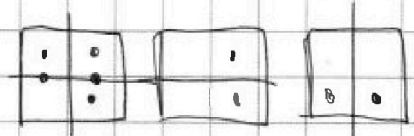
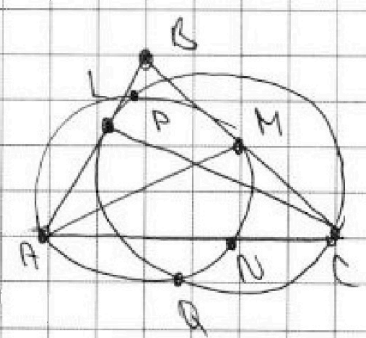
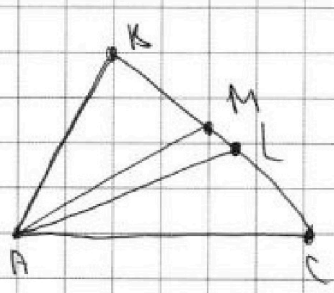
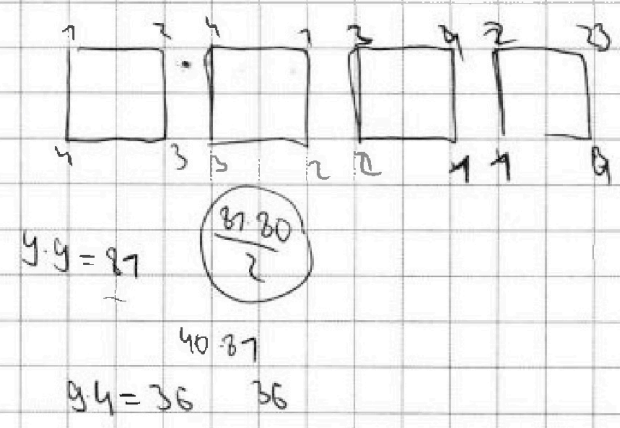
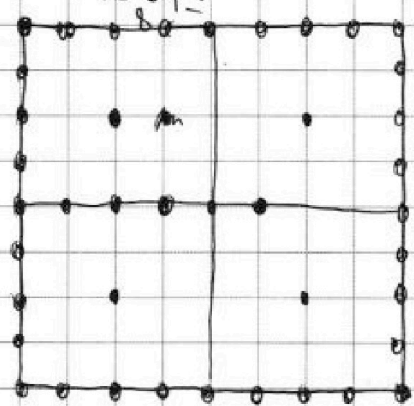
$$\frac{18}{6} = \frac{3y}{y} = 3$$



$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3y}{y} = 3$$

$$\frac{a+p}{b} = \frac{18}{x}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 \quad a \quad c \cdot a \cdot b$$

$$\frac{ac}{a \cdot b} \quad \frac{bc}{a \cdot b} \quad a \cdot b \cdot x = c \quad x = \frac{c}{a \cdot b}$$

$$a^2 + x^2 - k \cdot \frac{ac}{a \cdot b} \cdot x \quad a^2 - b^2 = \frac{c}{a \cdot b} (a-b)x$$

$$b^2 + x^2 - k \cdot \frac{bc}{a \cdot b} \cdot x \quad (a-b)(a+b)$$

$$a^2 + x^2 - k \cdot x \cdot a = \frac{ac}{a \cdot b}$$

$$b^2 + x^2 - k \cdot x \cdot b = \frac{bc}{a \cdot b}$$

$$a \cdot b = \frac{c}{a \cdot b} \cdot x$$

$$2 \cdot (\sqrt{x-7} - 5) (\sqrt{6-y} - 5)$$

$$\sqrt{x-7} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6-y}$$

$$x^2 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^2 + 5y^2 - \sqrt{x}$$

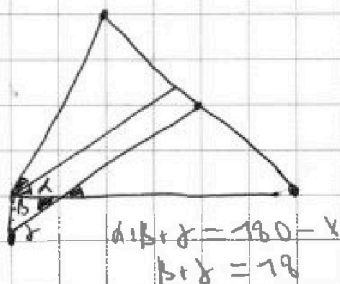
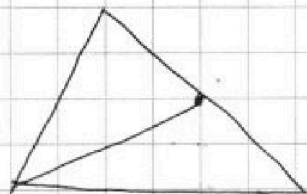
$$2(6-y) = 25 + x + 7 + 6 - y - 10\sqrt{6-y} - 2\sqrt{x-7} \sqrt{6-y} + 10\sqrt{x-7}$$

$$2210x - 2y^2 - 25 - x - 7 - 6 + y = 2(\sqrt{x-7} - 5)(\sqrt{6-y} - 5) -$$

$$- 50$$

$$12 - 25 + 50 - 7 - 6 = 25 + x - 7 - 6 = 25 + 6 - 7 = 25 + 5 = 30$$

$$30 + 10x - 2y^2 + y = 2(\sqrt{x-7} - 5)(\sqrt{6-y} - 5)$$



$$\begin{array}{r} 1344 \quad 4 \quad 336 \quad 4 \\ - 72 \quad 16 \quad - 32 \quad 16 \\ \hline 1216 \quad 16 \quad 304 \quad 16 \\ - 12 \quad 16 \quad 84 \quad 16 \\ \hline 1204 \quad 16 \quad 220 \quad 16 \\ - 23 \quad 16 \quad 84 \quad 16 \\ \hline 1181 \quad 16 \quad 136 \quad 16 \\ - 84 \quad 16 \quad 52 \quad 16 \\ \hline 1097 \quad 16 \quad 84 \quad 16 \end{array}$$

6524

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

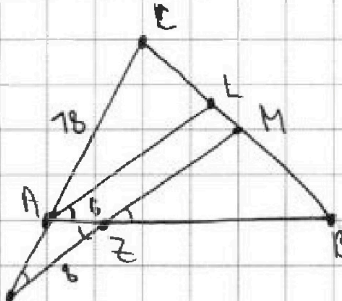


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$\begin{aligned} \angle LAB &= \angle MEB \quad (\text{м.к. } AL \parallel EM) \\ \angle AZY &= \angle MZB \quad (\text{к.к. } \beta) \\ \angle CAL &= \angle LAB \quad (\text{м.к. } AL - \text{биссектриса}) \\ \angle AYZ &= \angle CAL \quad (\text{м.к. } AL \parallel EM) \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle YAZ \text{ п/с} \Rightarrow AY = AZ = 6$$

5

$$\frac{CA}{AY} = \frac{CL}{LM} \quad (\text{м.к. } AL \parallel MY), \quad \frac{CA}{AY} = \frac{ZY}{6} = 4 \Rightarrow \frac{CL}{LM} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CL = 4LM$$

$$CM = CL + LM = 5LM = MB \quad (\text{м.к. } M - \text{середина } BC)$$

$$\frac{BZ}{ZA} = \frac{BM}{ML} \quad (\text{м.к. } AL \parallel EM), \quad \frac{BM}{ML} = \frac{5LM}{LM} = 5 \Rightarrow \frac{BZ}{ZA} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BZ = 5ZA = 5 \cdot 6 = 30$$

пусть  $\angle ZAY = \alpha$ , тогда по теореме косинусов для  $\triangle ZAY$

$$ZY^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cos \alpha \cdot AZ \cdot AY \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos \alpha \cdot 36 = 8 \Rightarrow \cos \alpha \cdot 36 = 4 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\angle BAC = 180 - \angle YAZ \Rightarrow \cos \angle BAC = -\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

по теореме косинусов для  $\triangle ABC$



$$\begin{array}{r} c \\ + 76 \\ \hline 76 \\ + 144 \\ \hline 76 \\ \hline 374 \end{array}$$

76  
76

$$\begin{aligned} 7020 + 724 &= \\ &= 7744 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 30 &= \\ &= 72 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

никого крестом  $m+n=1$   $\Rightarrow$  только и могло быть

3.  $m+n=1$ ,  $m+n-9=73p^2$   
 так как  $m, n \in \mathbb{N}$ , то  $m \geq 1$  и  $n \geq 1 \Rightarrow m+n \geq 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow m+n$  не может быть равно 1  $\Rightarrow$  только и могло быть

4.  $m+n=73p^2$ ,  $m+n-9=1$   
 $m+n-9=1 \Rightarrow m+n=10=73p^2$ , но  $10 \times 73 \Rightarrow$  только и могло быть

Значит, если  $A=73p^2$ ,  $B=75q^2$ , то подходящие пары  $(m, n)$ :  $(3, 10)$ ;  $(10, 3)$

2.  $A=75q^2$ ,  $B=73p^2$

Предположим, может ли быть так, что  $m=1$

$B=mn(m+n-3)=73p^2 = m \cdot n(n-2)$

Тогда рассмотрим варианты:  $n=73$ ,  $n-2=p^2$ ;  $n=p^2$ ,  $n-2=73$ ;  
 $n=73p$ ,  $n-2=p$ ;  $n=p$ ,  $n-2=73p$ ;  $n=1$ ,  $n-2=73p^2$ ;  $n=73p^2$ ,  $n-2=1$

1.  $n=73$ ,  $n-2=p^2$   
 $n-2=73-2=71=p^2$ , ни для какого простого  $p$   $p^2$  не равно 71  $\Rightarrow$  только и могло быть

2.  $n=p^2$ ,  $n-2=73$   
 $n-2=73 \Rightarrow n=75=p^2$ , ни для какого простого  $p$   $p^2$  не равно 75  $\Rightarrow$  только и могло быть

3.  $n=73p$ ,  $n-2=p$   
 $n-2=p \Rightarrow n=73p-2=p \Rightarrow 72p=2 \Rightarrow p=\frac{1}{36}$ , но  $p \in \mathbb{N} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  только и могло быть

4.  $n=p$ ,  $n-2=73p$   
 $n-2=73p \Rightarrow n=73p+2=p \Rightarrow 72p=2 \Rightarrow p=\frac{1}{36}$ , но  $p \in \mathbb{N} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  только и могло быть

5.  $n=1$ ,  $n-2=73p^2$   
 $n=1 \Rightarrow n-2=-1=73p^2$ , но  $73p^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow$  только и могло быть

6.  $n=73p^2$ ,  $n-2=1$   
 $n-2=1 \Rightarrow n=3=73p^2$ , но  $3 \times 73 \Rightarrow$  только и могло быть



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x - 3y = 3$   
 $-3x = 7$

$3x - 6y = 9$   
 $y - 3x = 7$

$-8y = 10 \Rightarrow y = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$

$-\frac{5}{4} - 3x = 7$   
 $3x = -\frac{35}{4} \Rightarrow x = -\frac{35}{12}$

$-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$ax - 3ay = 3a$   
 $3y - (a+3)x = \frac{a-3}{3}$

$3b + a = 6 \Rightarrow 3b = 6 - a \Rightarrow b = \frac{6-a}{3}$

$\frac{a-3}{3} - 3a = 4$   
 $a - 9 - 9a = 12$   
 $-8a = 21 \Rightarrow a = -\frac{21}{8}$

$\frac{7}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}y \leq -\frac{15}{2}$   
 $\frac{7}{2} \leq (-\frac{3}{2})y - (-\frac{35}{2})x \leq -\frac{7}{2}$

$\frac{17}{2} \leq \frac{5}{2}x + \frac{21}{2}y \leq \frac{17}{2}$

$x = -\frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$   
 $y = \frac{5}{4}, x = \frac{3}{4}$

$m(m-2) = 13p^2$   
 $\frac{15 \cdot 4}{2} = 30$

$x - 3y = 3$   
 $3x - 6y = 9$   
 $y - 3x = 7$   
 $3x - 6y = 21$   
 $-5y = 12 \Rightarrow y = -\frac{12}{5}$   
 $x - 3(-\frac{12}{5}) = 3 \Rightarrow x - \frac{36}{5} = 3 \Rightarrow x = \frac{51}{5}$

$x - 3y = 3$   
 $y - 3x = 7$   
 $-\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}y = -\frac{15}{2}$

$x - 3y = -3$   
 $y - 3x = -7$   
 $3x - 6y = -9$   
 $6y - 3x = -7$   
 $-8y = -10 \Rightarrow y = \frac{5}{4}$   
 $3x - 6(\frac{5}{4}) = -9 \Rightarrow 3x - \frac{15}{2} = -9 \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} - \frac{15}{4}y \leq -\frac{15}{4}$   
 $-\frac{15}{8} + \frac{15}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$(-\frac{3}{2})\frac{5}{4} - (-\frac{35}{2})\frac{3}{4} =$   
 $= -\frac{15}{8} + \frac{63}{8} = \frac{48}{8} = 6$

$\frac{5}{4} - 3x = -7 \Rightarrow 3x = \frac{33}{4} \Rightarrow x = \frac{11}{4}$

$\frac{5}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -7 \leq 3x-y \leq 7 \end{cases} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{15}{2} \leq \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y \leq \frac{15}{2} \\ -\frac{17}{2} \leq \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}y \leq \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2 = g(m+n) = (m+n)(m+n-g)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$\begin{matrix} 13 \cdot p \cdot p \\ 13 \cdot 5 \cdot q \cdot q \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (m+n)(m+n-g) \\ mn = 13p \\ mn-g = p \\ mn = \end{aligned}$$

$$h=7$$

$$\begin{aligned} (m+7)(m-8) \\ m(m-2) \\ m=13, m-2=13 \\ m=13p, m-2=p \\ m=16m \\ m+7=13p \\ m=13 \end{aligned}$$

или  $h=7$ , то рассмотрим  
какие варианты  $13p^2$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 11 \\ 2 \cdot p = p = 2 \\ m-8=p \\ m=8 \cdot p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn-g=7 \Rightarrow mn=10 \\ mn-3=7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \equiv -7m \pmod{p} \\ m-8 \equiv -7-8 \equiv -15 \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn-g=13 \quad q=7 \\ mn=22 \\ mn-g=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q=19 \\ m=19 \\ q=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13p \cdot p \\ p=3 \quad 13p=39 \end{aligned}$$

$$13p \cdot p$$

$$\begin{aligned} g:p \\ g:q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p=3 \\ q=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 3^2 \\ 13 \cdot 5 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn=3 \\ mn=39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn=13 \\ mn-g=13 \\ mn=22 \end{aligned}$$

$$g=$$

$$mn=13$$

$$\begin{aligned} 15q \quad 15 \cdot 3 \\ q \quad 3 \\ 5q \quad 15 \\ 13q \quad 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \cdot mn = 13 \cdot 5q \cdot q \\ 2 \cdot mn = 13 \cdot q^2 \\ q=2 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3y - x \\ x - 3y \\ 3x - y \\ y - 3x \end{cases}$$

$$300 = 25 \cdot 4$$

$$30a - 9y$$

$$3x$$

$$30x - 9y$$

$$3x - y$$

то

$$30x - 9y$$

$$3(30a - 9y) - (30a - 9y)$$

3

$$90a - 27y - 30a + 9y = 4$$

$$12x - 4y$$

$$12$$

$$12$$

$$8a = 26$$

$$a = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 7 \leq 3 \cdot \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}y \leq \frac{1}{4} \cdot 7$$

$$3 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)y - \left(\frac{7}{4}\right)x$$

$$60a - 27y = 4$$

$$4a - 6 = 1$$

$$4a = 7$$

$$a = \frac{7}{4}$$

$$\frac{27}{4}$$

$$\frac{73}{4}$$

$$\frac{3y}{4} - 8 = \frac{34 - 32}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{3x}{4}$$

$$\frac{73}{4} - 8 = \frac{73 - 32}{4} = \frac{41}{4}$$

$$-a - 90a + 27y = 4$$

$$-100a + 27y = 4$$

$$-50a + 12 = 2$$

$$\frac{32}{4} = 8$$

$$50a = -10 \Rightarrow a = -2$$

$$\frac{27}{4} \leq \frac{27}{4}y - \frac{7}{4}x \leq \frac{27}{4}$$

$$\frac{34}{4} = \frac{17}{2} = 8,5$$

$$6x - 2y$$

$$y \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$-\frac{7}{2}x + \frac{15}{2}y = \frac{15}{2}$$

$$x - 3y = 3$$

$$3x - y = 1$$

$$x - 3y = 3$$

$$y - 3x = -1$$

$$3 \cdot \frac{73}{4} \cdot x - \frac{73}{4}y$$

$$3 \cdot \frac{7}{4}y - \frac{7}{4}x$$

$$-33 = 0$$

$$3x - 9y = 9$$

$$y - 3x = -1$$

$$a(30a - 9y) - 3(30a - 9y)$$

$$4x - 39y - 9y = 10$$

$$\frac{(48)}{3}y - (48)x$$

$$y = -1$$

$$a \cdot x$$

$$-9y = a \cdot 15b = 8$$

$$y = -\frac{8}{9}$$

$$\frac{(a-8)}{3} - 3a = 4$$

$$a - 8 - 9a = 12$$

$$-8a = 20$$

$$a = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2}$$

$$3x - y = 1$$

$$x - 3y = 3$$

$$\frac{34}{4}x - \frac{73}{4}y = \frac{73}{4}$$

$$x = 0$$

$$\frac{27}{4}y - \frac{7}{4}x = \frac{27}{4}$$

$$y =$$

$$36x - 13y = 13$$

$$27y - 7x = 27$$

$$27 \cdot 36x - 27 \cdot 13y = 13 \cdot 27$$

$$a - 3(b-a) = 27 \cdot 13y - 7 \cdot 13x = 13 \cdot 27$$

$$a - (a-b)$$

$$27 \cdot 36x = 4 \cdot 13x$$

$$9x = x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, a|b, a|2b$

$3x|3 = a|2b$   
 $(x^2+2x)^2 = a+4b = x^4+4x^2+4x^2$   
 $3x^2 = a|8b$   
 $x(x|2)^2 = x^2(x|2)^2 = a|4b$   
 $x^2 = \frac{a|8b}{3}$   
 $x|2 = \frac{a|2b}{3}$

$6b = 3x^2 - 3x - 3 = 3(x^2 - x - 1)$   
 $b = \frac{3(x^2 - x - 1)}{2}$   
 $\frac{a|8b}{3}(x|2)^2 = a+4b$   
 $(a|8b)(x|2)^2 = 3(a+4b)$

$3x|3 = a + (x^2 - x - 1)$   
 $3x^2 = a + 4x^2 - 4x - 4$   
 $2x^2 - 4x - 4 = 0$   
 $x - 3y$   
 $y - 3x$   
 $4|24 = 11$   
 $x = -1$   
 $x =$

$a = -x^2 + 4x + 4$

$a = -x^2 + 4x + 4$

$0 \quad 2b = 1$   
 $1 \quad 4b = 2$   
 $3 \quad 6b = 3$

$3(1+\sqrt{3})+3$   
 $3(3\sqrt{3}+1)$   
 $3\sqrt{3} = a|2b$

$3\sqrt{3}$   
 $4$   
 $3(4-2\sqrt{3})$   
 $3|7-2\sqrt{3}$   
 $1 \ 4 \ 3 \ -2 \ -2$   
 $-1 \ 1 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0$   
 $(x+1)(x^2+3x-2) = \sqrt{3}x^2-2x+1 \ 3x^2-2 = \sqrt{3}x^2-2x+1$

$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7 \end{cases}$

$x^2+9y^2+6xy \leq 9$   
 $9x^2+y^2+6xy \leq 7$

$(x+1)(x+1)(x^2+3x-2) = 0$   
 $3(1+\sqrt{3})^2 = 3(4-2\sqrt{3})$   
 $4-2\sqrt{3}+2(1+\sqrt{3})$   
 $-3 \leq x-3y \leq 3$   
 $-1 \leq 3x-y \leq 7$   
 $2b = 4-3\sqrt{3}$   
 $4b = 8-6\sqrt{3}$   
 $72-6\sqrt{3}-4$   
 $8 \ 12-4$   
 $8x-6y$   
 $2y \ 12 \ 4y$   
 $9x-3y$