



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

Пусть a - первый член арифметической прогрессии, b - разность арифметической прогрессии

Поскольку ~~вторая~~ третья сумма ~~равна~~ сумме первых трех членов, то тогда и только тогда, когда верно следующее:

$$\begin{cases} 5x+3 = a+2b & (1) \\ (x+2x)^2 = a+4b & (2) \\ 5x^2 = a+9b & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 = a+2b \\ (x+2x)^2 = a+4b & (*) \\ 3(x^2-x-1) = 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 = a+2b \\ (x+2x)^2 = a+4b & (*) \\ b = \frac{x^2-x-1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 = a+x^2-x-1 \\ (x+2x)^2 = a+4b \\ b = \frac{x^2-x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2+4x+4 \\ b = \frac{x^2-x-1}{2} \\ (x+2x)^2 = a+4b & (2) \end{cases} (*)$$

Подставим ~~мы~~ значения a и b в (2) и решим

$$(x+2x)^2 = a+4b \Leftrightarrow (x+2x)^2 = -x^2+4x+4 + 2x^2-2x-2 \Leftrightarrow x^4+4x^3+4x^2 = x^2+2x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+3x^2-2x-2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3+3x^2-2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x+2x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1) = 0 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2+2x-2 = 0 & (**)$$

Решим (**)

$$x^2+2x-2 = 0 \Leftrightarrow D = 2^2 - 4 \cdot (-2) = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1+\sqrt{3} \\ x = -1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Вернемся к совокупности (***)

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1+\sqrt{3} \\ x = -1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Вернемся к системе (*)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a = -x^2 + 4x + 4 \\ b = \frac{x^2 - x - 1}{2} \\ (x^2 + 2x)^2 = a + 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x + 4 \\ b = \frac{x^2 - x - 1}{2} \\ x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{5} \\ x = -1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Получим условие задачи верно тогда и только тогда, когда верно условие (~~и~~ $x \in \{ \}$) и все преобразованные равенства, то есть $(3x+3)$, $(x^2+x)^2$, $(3x^2)$ являются соответственно третьим, пятым и ~~шестым~~ четным членами прогрессии - то есть арифметической прогрессии (мы можем её увидеть: первый член $(-x^2+4x+4)$, разность $x^2 - x - 1$) тогда и только тогда, когда $x \in \{-1; -1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\}$

Ответ: $x \in \{-1; -1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |y-3x| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \quad | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ -7 \leq y-3x \leq 7 \quad | \cdot (-\frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \leq -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \quad | + \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \leq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 8x + 4y \leq 11$$

Значит выражение $8x + 4y$ принимает значения не больше 11

При $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$ $8x + 4y = 6 + 5 = 11$, $|x-3y| = |\frac{3}{4} - \frac{15}{4}| = |-3| = 3$,

$$|3x-y| = |\frac{9}{4} - \frac{5}{4}| = |1| = 1$$

Значит при $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$ значения берется и $8x + 4y = 11$

Значит наибольшее значение $8x + 4y$ равно 11

Ответ: 11



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - gm - gn = (m+n)^2 - g(m+n) = (m+n)(m+n-g)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

★ Теорема Штурма:

1. $A = 73p^2, B = 75q^2$

$$A = (m+n)(m+n-g) = 73p^2$$

Рассмотрим, могут ли оба числа $(m+n), (m+n-g)$ делиться на p
~~Если $m+n \equiv 0$ и $m+n-g \equiv 0$, то $g=0 \Rightarrow p=3$ (т.к. p простое)~~

~~Если $p=3$ и $m+n \equiv p$ и $m+n-g \equiv p$, то $m+n=73p, m+n-g=p$~~

$$(m+n)(m+n-g) = 73p^2 \Rightarrow \text{либо } m+n=73p, m+n-g=p, \text{ либо}$$

$$m+n=p, m+n-g=73p \text{ (рассмотрим числа на простом)}$$

$$m+n > m+n-g, 73p > p \Rightarrow \text{единственный вариант } m+n=73p,$$

$$m+n-g=p, \text{ но тогда } (m+n) - (m+n-g) = g = 72p \Rightarrow g:72$$

$$g:72 \Rightarrow \text{такое быть не могло} \Rightarrow \text{равно нулю из чисел } (m+n),$$

$$(m+n-g), \text{ кратно } p$$

Тогда верно, что $m+n=73, m+n-g=p^2$, либо $m+n=p^2, m+n-g=73$,
 либо $m+n=1, m+n-g=73p^2$, либо $m+n=73p^2, m+n-g=1$

Теорема Штурма по порядку

1) $m+n=73, m+n-g=p^2$

или $m+n=73$, то $m+n-g=p^2=4 \Rightarrow p=2$

$$B = mn(m+n-3) = 75q^2$$

$$m+n-3 = 73-3=70 \Rightarrow B = mn \cdot 70 = 75q^2 \Rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2$$

$$15:2 \Rightarrow q^2:2 \Rightarrow q:2 \text{ (т.к. } q \text{ простое)} \Rightarrow q=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mn \cdot 2 = 15 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow mn=30$$

Получается, $mn=30, m+n=73$

$m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ перебором вариантов m и n из условия, что

$mn=30$ (без порядка): $1 \times 30, 2 \times 15, 3 \times 10, 5 \times 6$

$m+n=73 \Rightarrow$ единственный подходящий вариант 3×10

2. $m+n=p^2, m+n-g=73$

$$m+n-g=73 \Rightarrow m+n=72=p^2, \text{ но } 72 \text{ не является квадратом}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим $m \neq 1$ (иначе $n \neq 1$, т.к. $4 \nmid$ в уравнении симметрично относительно m, n)

Если $m+n-3=1$, то $m+n=4$

$$A = (m+n-3)(m+n-9) = 4 \cdot (-5) = -20 = -5^2, \text{ но } -5^2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$$

\Rightarrow такого не могло быть

Заметим верно, что ни одно из чисел $m, n, (m+n-3)$ не равно 1

$m, n, (m+n-3) = 13 \cdot p, p$ и ни одно из чисел $m, n, (m+n-3)$ не равно 1 \Rightarrow всего три варианта $m=13, n=p, m+n-3=p$ (1);
 $m=p, n=13, (m+n-3)=p$ (2), $m=p=n, m+n-3=13$ (3)

1) $n=p, m=13, m+n-3=p$
 $n=p, m+n-3=p \Rightarrow m-3=0 \Rightarrow m=3 \neq 13$, но $m=13 \Rightarrow$ такого не могло быть

2) $m=p, n=13, m+n-3=p$
аналогично (1) (т.к. в уравнении сим. относительно m, n)

3) $m=n=p, m+n-3=13$
 $m+n-3=13 \Rightarrow m+n=16=2p \Rightarrow p=8$, но 8 не простое число \Rightarrow
 \Rightarrow такого не могло быть

Заметим для вариантов $A=75^2, B=13^2$ пары (m, n) нет

Заметим единственные пары, удовлетворяющие все условия:
 $(10, 3), (3, 10)$

Проверим: $A = (10+3)(10+3-9) = 13 \cdot 4 = 13 \cdot 2^2$, 2-простое

$$B = 10 \cdot 3 \cdot (10+3-3) = 300 = 75 \cdot 4 = 75 \cdot 2^2, 2\text{-простое}$$

(уравнения сим. относительно m, n) \Rightarrow пары $(3, 10)$ тоже удовлетворяют.

Ответ: $(m, n) \in \{(10, 3), (3, 10)\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

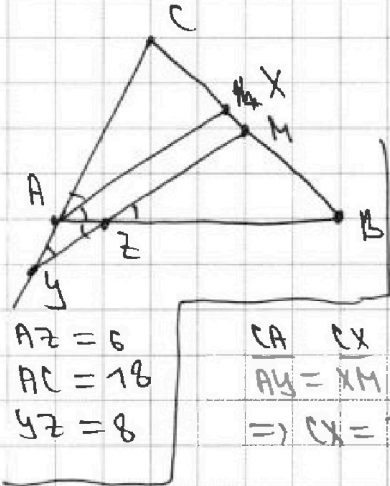


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$\begin{aligned} \angle XAB &= \angle MZB \quad (\text{м.к. } AX \parallel ZM) \\ \angle CAZ &= \angle XAB \quad (\text{м.к. } AX \text{ - бисс.-сн}) \\ \angle MZB &= \angle AZY \quad (\text{м.к. как верт.}) \\ \angle AYZ &= \angle CAZ \quad (\text{м.к. } AX \parallel YM) \end{aligned} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AZY \text{ р/с и } AY = AZ = 6$$

$$\begin{aligned} AZ &= 6 \\ AC &= 18 \\ YZ &= 8 \end{aligned}$$

$$\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} \quad (\text{м.к. } AX \parallel YM) \Rightarrow \frac{18}{6} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow CX = 3XM$$

$$BM = CM = CX + XM = 4XM \quad (\text{м.к. } M \text{ - середина } BC)$$

$$\frac{BM}{MX} = \frac{BZ}{ZA} \quad (\text{м.к. } XM \parallel ZA) \Rightarrow \frac{4XM}{XM} = \frac{BZ}{ZA} \Rightarrow \frac{BZ}{ZA} = 4 \Rightarrow BZ = 4ZA = 4 \cdot 6 = 24 \Rightarrow AB = AZ + ZB = 6 + 24 = 30$$

пусть $\angle ZAY = \alpha$, тогда по теореме косинусов для $\triangle YAZ$:

$$YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cos \alpha \cdot AZ \cdot AY \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow 2 \cos \alpha \cdot 36 = 8 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ZAY = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \angle BAC = -\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

по теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AB \cdot AC \Rightarrow BC^2 = 30^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 30 = 900 + 324 + 120 = 1344 \Rightarrow BC = \sqrt{1344}$$

Ответ: $BC = \sqrt{1344} = 8\sqrt{21}$

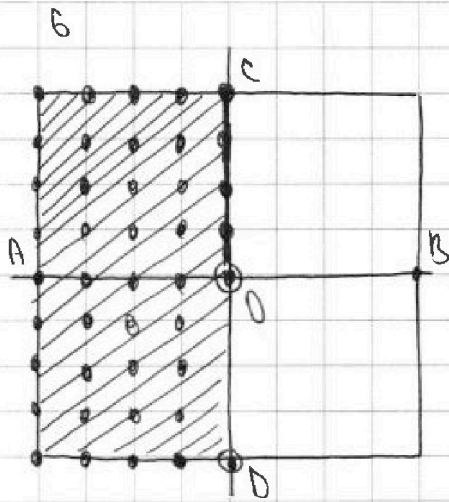


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим, какие раскраски узлов пересекают в себя при повороте *

При повороте на 180° в себя переходят раскраски, симметричные относительно центра O

При повороте на 90° и 270° никакие раскраски узлов в себя не переходят (узел тогда придется покрасить либо ровно один (центральный) узел, либо хотя бы четыре узла)

* (раскраска из узлов \equiv покрасить свои узлы в белый цвет) тогда O

Рассмотрим, сколько раскрасок симметричны относительно ~~центра~~ O

Взв симметричны ~~по оси~~ раскраски мы выбираем 1 узел ~~в симметричной области~~ в заштрихованной области (вместо узла на $(c, 0)$ и не вместо узла на $(0, d)$ (они будут повторен) и ~~стремимся~~ симметрично O

То есть всего раскраска столько сколько узлов в заштрихованной области (они не повторяются)

В обл. области всего $9 \cdot 4 + 4 = 40$ узлов \Rightarrow всего 40 раскраски, пересекающие в себя при повороте

Всего способов покрасить свои узлы $\frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40 = 3240$, причем если считать, что раскраски, пересекающие в себя при повороте, считаются то всего 40 раскраски мы посчитали свои раскраски (ровно 40 раскраски, пересекающие в себя при повороте на 180° , остальные при любой повороте в себя не переходят)

Значит всего различных раскрасок ~~3240~~ $3240 - 40 = 3200$

Ответ: 3200

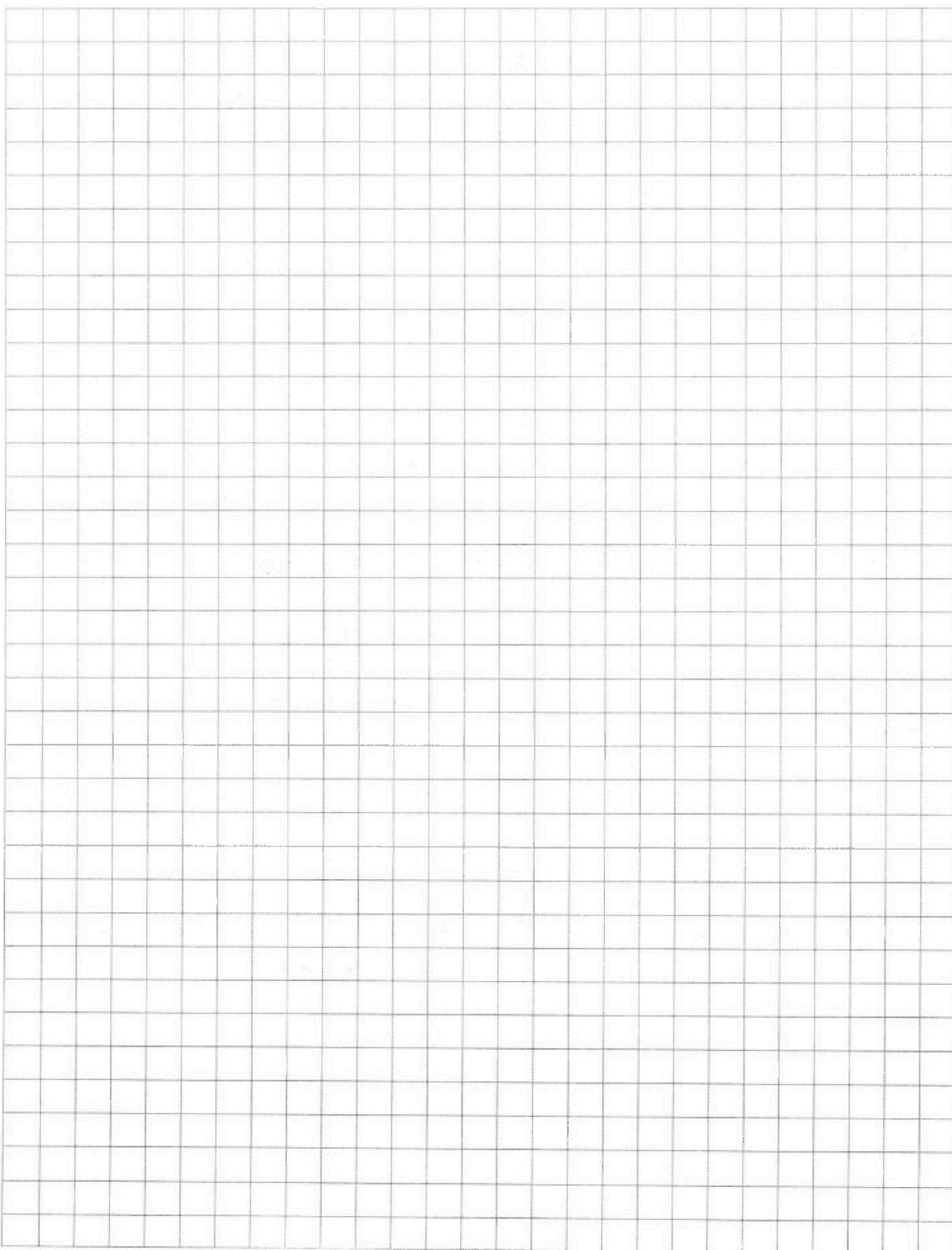


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

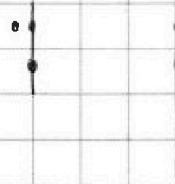
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{b-y} + 5 = 2\sqrt{b+5x-y^2} \\ x+5x^2 - \sqrt{y} = y - \sqrt{x} + 5y^2 \\ x=y \end{cases}$$

(a, b)
(b, a)



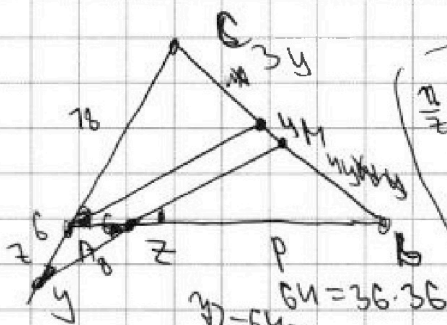
РМ

$$\frac{18}{6} = \frac{x}{y} = 3$$

$$y^2 + 5y^2 + \sqrt{y} = 5x^2 + \sqrt{x}$$

$$(b-x)(x+1) = 6+5x-1^2$$

$$\frac{18}{6} = \frac{b}{y} = 3$$

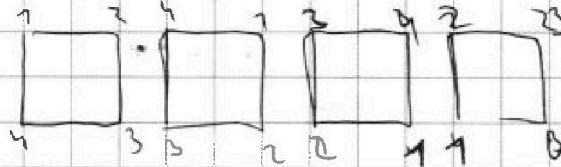
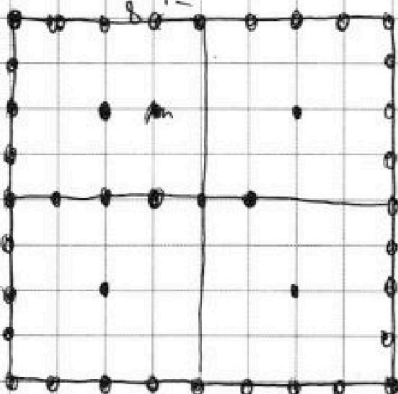


$$a - b + 5 = 2ab$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{P}{G} = \frac{xy}{y} \quad \frac{G+P}{xy} = \frac{18}{x}$$

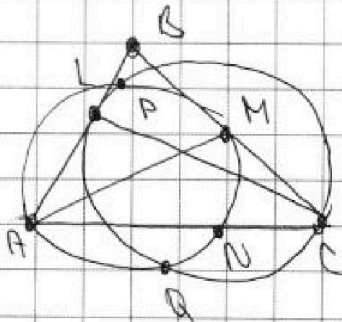
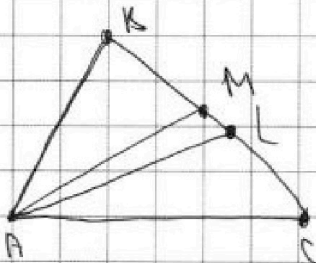
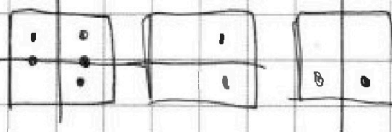


$$y \cdot y = 81$$

$$\frac{81 \cdot 80}{2}$$

$$40 \cdot 81$$

$$94 = 36 \quad 36$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 \quad a \quad c \cdot a \cdot b$$

$$\frac{ac}{a \cdot b} \quad \frac{bc}{a \cdot b} \quad a \cdot b \cdot x = c \quad x = \frac{c}{a \cdot b}$$

$$a^2 + x^2 - k \cdot \frac{ac}{a \cdot b} \cdot x \quad a^2 - b^2 = \frac{c}{a \cdot b} (a-b)x$$

$$b^2 + x^2 - k \cdot \frac{bc}{a \cdot b} \cdot x \quad (a-b)(a+b)$$

$$a^2 + x^2 - k \cdot x \cdot a = \frac{ac}{a \cdot b}$$

$$b^2 + x^2 - k \cdot x \cdot b = \frac{bc}{a \cdot b}$$

$$a \cdot b = \frac{c}{a \cdot b} \cdot x$$

$$2 \cdot (\sqrt{x-7} - 5) \cdot (\sqrt{6-y} - 5)$$

$$\sqrt{x-7} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6-y}$$

$$x^2 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^2 + 5y^2 - \sqrt{x}$$

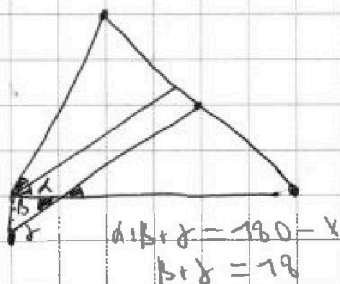
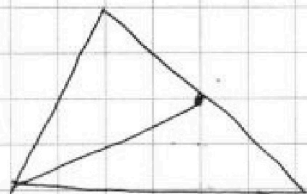
$$2(6-y) = 25 + x + 7 + 6 - y - 10\sqrt{6-y} - 2\sqrt{x-7} - 2\sqrt{6-y} + 10\sqrt{x-7}$$

$$2(10x - 2y^2) - 25 - x - 7 - 6 + y = 2(\sqrt{x-7} - 5)(\sqrt{6-y} - 5) -$$

$$- 50$$

$$12 - 25 + 50 - 7 - 6 = 25 + x - 7 - 6 = 25 + 6 - 7 = 25 + 5 = 30$$

$$30 + 10x - 2y^2 + y = 2(\sqrt{x-7} - 5)(\sqrt{6-y} - 5)$$



$$\begin{array}{r} 1344 \quad 4 \quad 336 \quad 4 \\ - 72 \quad 16 \quad - 32 \quad 16 \\ \hline 12 \quad 24 \quad 444 \quad 4 \\ 2350 \quad 4 \\ - 84 \quad 14 \quad 4 \\ \hline 852 \end{array}$$

852

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

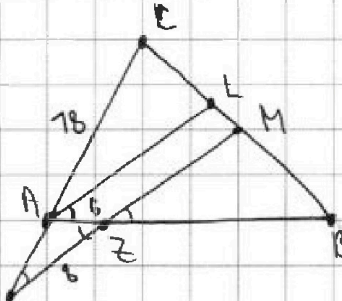


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$\begin{aligned} \angle LAB &= \angle MZB \text{ (м.к. } AL \parallel ZM) \\ \angle AZY &= \angle MZB \text{ (конт. верш.)} \\ \angle CAL &= \angle LAB \text{ (м.к. } AL \parallel BC) \\ \angle AYZ &= \angle CAL \text{ (м.к. } AL \parallel ZM) \end{aligned} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle YAZ \text{ п/с} \Rightarrow AY = AZ = 6$$

5

$$\frac{CA}{AY} = \frac{CL}{LM} \text{ (м.к. } AL \parallel MY), \quad \frac{CA}{AY} = \frac{ZY}{6} = 4 \Rightarrow \frac{CL}{LM} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CL = 4LM$$

$$CM = CL + LM = 5LM = \cancel{MB} \text{ (м.к. } M \text{ - середина } BC)$$

$$\frac{BZ}{ZA} = \frac{BM}{ML} \text{ (м.к. } AL \parallel ZM), \quad \frac{BM}{ML} = \frac{5LM}{LM} = 5 \Rightarrow \frac{BZ}{ZA} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BZ = 5ZA = 5 \cdot 6 = 30$$

пусть $\angle ZAY = \alpha$, тогда по теореме косинусов для $\triangle ZAY$

$$ZY^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cos \alpha \cdot AZ \cdot AY \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos \alpha \cdot 36 = 8 \Rightarrow \cos \alpha \cdot 36 = 4 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\angle BAC = \cancel{180^\circ} 180^\circ - \angle YAZ \Rightarrow \cos \angle BAC = -\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

по теореме косинусов для $\triangle ABC$



$$\begin{array}{r} c \\ + 76 \\ \hline 76 \\ + 144 \\ \hline 76 \\ \hline 374 \end{array}$$

76
76

$$\begin{aligned} 7020 + 724 &= \\ &= 7744 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 30 &= \\ &= 72 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

никого крестом т.к. \Rightarrow т.к. и мало быть

3. $m+n=1, m+n-9=73p^2$
 т.к. к.к. $m, n \in \mathbb{N}$, то $m \geq 1, n \geq 1 \Rightarrow m+n \geq 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m+n$ не может быть равно 1 \Rightarrow никого не могло быть

4. $m \cdot n = 73p^2, m+n-9=1$
 $m+n-9=1 \Rightarrow m+n=10=73p^2$, но $10 \times 73 \Rightarrow$ никого не могло быть

Значит, к.к. $A=73p^2, B=75q^2$, то следующие пары (m, n) : $(3, 10); (10, 3)$

2. $A=75q^2, B=73p^2$

Предположим, может и быть т.к., то $m=1$

$B=mn(m+n-3)=73p^2 = n(n-2)$

Тогда рассмотрим варианты: $n=73, n-2=p^2; n=p^2, n-2=73;$
 $n=73p, n-2=p; n=p, n-2=73p; n=1, n-2=73p^2; n=73p^2, n-2=7$

1. $n=73, n-2=p^2$
 $n-2=73-2=71 \neq p^2$, т.к. у.к. какого простого p p^2 не равно 71 \Rightarrow никого не могло быть

2. $n=p^2, n-2=73$
 $n-2=73 \Rightarrow n=75=p^2$, т.к. у.к. какого простого p p^2 не равно 75 \Rightarrow никого не могло быть

3. $n=73p, n-2=p$
 $n-2=p \Rightarrow n=73p-2=p \Rightarrow 72p=2 \Rightarrow p=\frac{1}{36}$, но $p \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 \Rightarrow никого не могло быть

4. $n=p, n-2=73p$
 $n-2=73p \Rightarrow n=73p+2=p \Rightarrow 72p=2 \Rightarrow p=\frac{1}{36}$, но $p \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 \Rightarrow никого не могло быть

5. $n=1, n-2=73p^2$
 $n=1 \Rightarrow n-2=-1=73p^2$, но $73p^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ никого не могло быть

6. $n=73p^2, n-2=7$
 $n-2=7 \Rightarrow n=9=73p^2$, но $3 \times 73 \Rightarrow$ никого не могло быть



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x - 3y = 3$
 $-3x = 7$

$3x - 6y = 9$
 $y - 3x = 7$

$-8y = 10 \Rightarrow y = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$

$-\frac{5}{4} - 3x = 7$
 $3x = -\frac{35}{4} \Rightarrow x = -\frac{35}{12}$

$-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$ax - 3ay = 3a$
 $3y - (a+b)x = \frac{a-b}{3}$

$3b + a = 6 \Rightarrow 3b = 6 - a \Rightarrow b = \frac{6-a}{3}$

$\frac{a-b}{3} - 3a = 4$
 $a - b - 9a = 12$
 $-8a = 12$
 $a = -\frac{3}{2}$

$\frac{7}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}y \leq -\frac{15}{2}$
 $\frac{7}{2} = (-\frac{5}{2})x - (-\frac{15}{2})y \leq -\frac{15}{2}$

$\frac{17}{2} \leq \frac{5}{2}x + \frac{27}{2}y \leq \frac{27}{2}$

$x = -\frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$
 $y = \frac{5}{4}, x = \frac{3}{2}$

$m(m-2) = 13p^2$
 $x - 3y = 3$
 $3x - 6y = 9$
 $y - 3x = 7$
 $x - 3y = -3$
 $y - 3x = -1$

$x - 3y = -3$
 $y - 3x = -1$

$-\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}y = -\frac{15}{2}$

$x - 3y = -3$
 $y - 3x = -1$

$3x - 6y = -9$
 $6y - 3x = 7$
 $-8y = -10$

$y = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$
 $x = \frac{3}{4}$

$\frac{5}{4} - 3x = -1$
 $3x = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

$\frac{5}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$

$\frac{5}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -7 \leq 3x-y \leq 7 \end{cases} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{15}{2} \leq \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y \leq \frac{15}{2} \\ -\frac{15}{2} \leq \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y \leq \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2 = g(m+n) = (m+n)(m+n-g)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$\begin{matrix} 13 \cdot p \cdot p \\ 13 \cdot 5 \cdot q \cdot q \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (m+n)(m+n-g) \\ mn = 13p \\ mn-g = p \\ mn = \end{aligned}$$

$$h=7$$

$$\begin{aligned} (m+7)(m-8) \\ m(m-2) \\ m=13, m-2=13 \\ m=13p, m-2=p \\ m=16m \\ m+7=13p \\ m=13 \end{aligned}$$

или $h=7$, то рассмотрим
какие варианты $13p^2$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 11 \\ 2 \cdot p = p = 2 \\ m-8=p \\ m=8 \cdot p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn-g=7 \Rightarrow mn=10 \\ mn-3=7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \equiv -7m \pmod{p} \\ m-8 \equiv -7-8 \equiv -15 \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn-g=13 \quad q=7 \\ mn=22 \\ mn-g=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q=19 \\ m=19 \\ q=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13p \cdot p \\ p=3 \quad 13p=39 \end{aligned}$$

$$13p \cdot p$$

$$\begin{aligned} g:p \\ g:q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p=3 \\ q=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 3^2 \\ 13 \cdot 5 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn=3 \\ mn=39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn=13 \\ mn-g=13 \\ mn=22 \end{aligned}$$

$$g=$$

$$mn=13$$

$$\begin{aligned} 15q \quad 15 \\ q \quad 3 \\ 5q \quad 15 \\ 13q \quad 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \cdot mn = 13 \cdot 5q \cdot q \\ 2 \cdot mn = 13 \cdot q^2 \\ q=2 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3y - x \\ x - 3y \\ 3x - y \\ y - 3x \end{cases}$$

$$300 = 25 \cdot 4$$

$$3ax - ay$$

$$3x$$

$$3ax - ay$$

$$3x - y$$

то

$$3ax - ay$$

$$3(3a-8)y - (3a-8)x$$

3

$$9a - 24 - a = 4$$

$$12x - 4y$$

$$12$$

$$9a - 24 - a = 4$$

$$8a - 24 = 8$$

$$4 - 3 = 7 \quad a = 4$$

$$8a = 28$$

$$a = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 7 \leq 3 \frac{x}{4} - \frac{7}{4} y \leq \frac{1}{4} \cdot 7$$

$$3 \left(\frac{7}{4}\right) y - \left(\frac{7}{4}\right) x$$

$$6a - 24 = 4$$

$$4a - 6 = 7$$

$$4a = 7$$

$$a = \frac{7}{4}$$

$$\frac{27}{4}$$

$$\frac{73}{4}$$

$$\frac{3y}{4} - 8 = \frac{34-32}{4} = \frac{2}{4}$$

$$3 \frac{x}{4}$$

$$\frac{27}{4} - 8 = \frac{27-32}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{27}{4}$$

$$-a - 9a + 24 = 4$$

$$-10a + 24 = 4$$

$$-5a + 12 = 2$$

$$\frac{32}{4} = 8$$

$$6x - 2y$$

$$y \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}y = \frac{15}{2}$$

$$x - 3y = 3$$

$$3x - y = 1$$

$$x - 3y = 3$$

$$y - 3x = -1$$

$$3 \cdot \frac{73}{4} \cdot x - \frac{73}{4} y$$

$$3 \cdot \frac{7}{4} y - \frac{7}{4} x$$

$$5a = -10 \quad a = 2$$

$$-\frac{27}{4} \leq \frac{27}{4} y - \frac{7}{4} x \leq \frac{27}{4}$$

$$\frac{34}{4} = \frac{17}{2} = 8,5$$

$$-33 = 0$$

$$3x - 6y = 9$$

$$y - 3x = 1$$

$$ax - 3ay$$

$$(a-8) - 3 \left(\frac{a-8}{3}\right) x$$

$$ax - 3ay - 8y = 10$$

$$\frac{(a-8)}{3} y - (a-8) x$$

$$y = -1$$

$$-ay - a + 3b = 8$$

$$-3(b-a)$$

$$21 \cdot 36x - 21 \cdot 13y = 13 \cdot 21$$

$$\frac{(a-8)}{3} - 3a = 4$$

$$y = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$$

$$a - 3(b-a) = 21 \cdot 13y - 4 \cdot 13x = 11 \cdot 13$$

$$4 - 8 - 9a = 12$$

$$-8a = 20$$

$$a = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2}$$

$$3x - y = 1$$

$$x - 3y = 3$$

$$21 \cdot 36x = 4 \cdot 13x$$

$$9x = x$$

$$x = 0$$

$$y =$$

$$\frac{34}{4} x - \frac{73}{4} y = \frac{73}{4}$$

$$\frac{27}{4} y - \frac{7}{4} x = \frac{27}{4}$$

$$36x - 13y = 13$$

$$21y - 4x = 21$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, a|b, a|2b$

$3x|3 = a|2b$
 $(x^2+2x)^2 = a+4b = x^4+4x^2+4x^2$
 $3x^2 = a|8b$
 $x(x|2)^2 = x^2(x|2)^2 = a|4b$
 $x^2 = \frac{a|8b}{3}$
 $x|2 = \frac{a|2b}{3}$

$6b = 3x^2 - 3x - 3 = 3(x^2 - x - 1)$
 $\frac{a|8b}{3} (x|2)^2 = a|4b$
 $(a|8b)(x|2)^2 = 3(a|4b)$

$b = \frac{x^2 - x - 1}{2}$

$4b = 3x^2 - x^2 (x|2)^2 = x^2(3 - (x|2)^2)$
 $2b = x^2(x|2)^2 - 3(x|2)$
 $x - 3y$
 $y - 3x$
 $4|24 = 11$
 $x = -1$
 $x =$

$3x|3 = a + (x^2 - x - 1)$

$3x^2 = a + 4x^2 - 4x - 4$

$-x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 2x - 2 = x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^2 + 4x^2$

$a = -x^2 + 4x + 4$

$a = -x^2 + 4x + 4$

$x^4 + 4x^2 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 = 0 = x^4 + 4x^2 + 3x^2 - 2x - 2$

$0 \quad 2b = 1$
 $1 \quad 4b = 2$
 $3 \quad 6b = 3$

$30x - 70x$
 $70x - 6y$
 $8x + 20y$
 $144 - 1 - 2 - 2$
 $7 - 4 + 4 - 1 + 2 - 2$
 $-1 \quad 1 - 3 \quad 7 - 8 \quad 6$
 $144 - 1 - 2 - 2$
 $1 \quad 15 \quad 9 \quad 8 - 6 \quad 4$

$3(1 + \sqrt{3}) + 3$
 $3(1 + \sqrt{3}) + 3$
 $3\sqrt{3} = a|2b$

$3\sqrt{3}$
 4
 $3(4 - 2\sqrt{3})$
 $3 \cdot 17 - 2\sqrt{3}$
 $143 - 2 - 2$
 $-1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 - 0 \quad 0$
 $130 - 2$
 $(x+1) - 1 \quad 1 \quad 2 - 20$

$(x+1)(x^2+3x-2) = \sqrt{3x^2-2x+1} \sqrt{3x^2-2x-2}$
 $= \sqrt{3x^2-2x+1} \sqrt{3x^2-2x-2}$

$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7 \end{cases}$

$(x+1) \cdot 3(1+\sqrt{3})^2 = 0$
 $= 3(4-2\sqrt{3})$
 $2b = 4 - 3\sqrt{3}$
 $4b = 8 - 6\sqrt{3}$
 $72 - 6\sqrt{3} - 4$

$x^2 + 9y^2 + 6xy \leq 9$
 $9x^2 + y^2 + 6xy \leq 7$

$4 - 2\sqrt{3} + 2(1 - \sqrt{3})$
 $-3 \leq x - 3y \leq 3$
 $-1 \leq 3x - y \leq 7$
 $-3 \leq 3y - x \leq 3$
 $-7 \leq 3x - y \leq 7$
 $8 \quad 12 - 4$
 $8 \quad 12 - 4$
 $8x - 6y$
 $2y \quad 12 \quad 4y$
 $9x - 3y$