



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ . ~~.....~~

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

~~.....~~

~~.....~~

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа. Решите!

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. ~~.....~~

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CE$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Пусть  $a_1$  - первый член заданной арифметической прогрессии,  $d$  - ее разность. Тогда пятый член прогрессии равен  $a_1 + 4d$ , седьмой равен  $a_1 + 6d$ , одиннадцатый равен  $a_1 + 10d$ .

По условию,

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 6x + 18 & (1) \\ a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2 & (2) \\ a_1 + 10d = -3x^2 & (3) \end{cases}$$

Вычтем (1) из (2):  $2d = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 \Rightarrow 2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$ . Разделим обе части полученного уравнения на 2:

$$4d = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 \quad (4)$$

Вычтем (2) из (3):  $4d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2 \Rightarrow 4d = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 \Rightarrow 4d = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \quad (5)$

Из (4) и (5) уравнения получаем:

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

Пусть  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$

Разделим  $f(x)$  на  $(x-2)$  по схеме Горнера:

	1	-8	17	-4	-12
2	1	-6	5	6	0

~~4x^3 - 12x^2 + 10x - 12~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что  $f(x) = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$

Разделим  $x^3 - 6x^2 + 5x + 6$  на  $x-2$  по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ & & 2 & -8 & 11 \\ \hline & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}$$

Получаем, что  $f(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x - 3)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$D/4 = 4 + 13 = 7$

Ответ:  $x \in \{ 2, 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7} \}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6-4x \leq -3y \leq 6-4x \\ -8-3x \leq -4y \leq 8-3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{4}{3}x \geq y \geq -2 + \frac{4}{3}x \\ 2 + \frac{3}{4}x \geq y \geq -2 + \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{4}{3}x \geq -2 + \frac{3}{4}x \\ 2 + \frac{3}{4}x \geq -2 + \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}) \geq -4 \\ x(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot \frac{7}{12} \geq -4 \\ x \cdot \frac{7}{12} \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{48}{7} \\ x \leq \frac{48}{7} \end{cases} \quad (1)$$

Пункт

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} -6+3y \leq 4x \leq 6+3y \\ -8+4y \leq 3x \leq 8+4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \leq x \leq \frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \\ -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \leq x \leq \frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \leq \frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \\ -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \leq \frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{6}{4} - \frac{8}{3} \\ y \cdot \frac{7}{12} \leq \frac{6}{4} + \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{50}{12} \\ 7y \leq \frac{50}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{50}{7} \\ y \leq \frac{50}{7} \end{cases} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 7(2x+y) \geq 7(2 \cdot -\frac{48}{7} - \frac{50}{7}) = -96 - 50 = -146$$

Равенство достигается при  $(x, y) = (-\frac{48}{7}, -\frac{50}{7})$

Заметим, что из начальных условий вытекает.

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn$$

1. Пусть  $A = 13p^2$

Разберём случаи, учитывая, что  $p$  - простое

$m-n$	1	13	$13p$	$13p^2$	$p$	$p^2$	-1	-13	-13p	-13p^2	-p	-p^2
$m-n+9$	$13p^2$	$p^2$	$p$	1	$13p$	13	-13p^2	-p^2	-p	-1	-13p	-13
$p$	$\sqrt{\frac{10}{13}}$	$\sqrt{22}$	$-\frac{3}{4}$	-	$\frac{9}{14}$	2	<del>1</del>	2	$\frac{8}{4}$	$\sqrt{\frac{10}{13}}$	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{22}$

Подходит только  $m-n = p^2 - 4$  и  $mn = -13$

Подставим в B:

$$\begin{cases} 7mn = 39^2 \\ -10mn = 39^2 \end{cases} \text{ - нет решений, т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

$$7mn = 39^2 \Rightarrow 39^2 : 7 \Rightarrow 9^2 : 7 \Rightarrow 9 = 7$$

Тогда  $\begin{cases} 7mn = 3 \cdot 49 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mn = 21 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ (m+n)^2 = 16 + 4 \cdot 21 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ m+n = 10 \\ m+n = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ m+n = 10 \\ m-n = 4 \\ m+n = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = (7, 3) \\ (m, n) = (-3, -7) \end{cases}$$

2. Пусть  $A = 39^2$

Разберём случаи. Будем обозначать "-" неподходящее  $q$

$m-n$	1	3	$39$	$39^2$	$9$	$9^2$	-1	-3	-39	-39^2	-9
$m-n+9$	$39^2$	$9^2$	$9$	1	$39$	3	-39^2	-9^2	-9	-1	-39
$q$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ни один случай не даёт цел.

Ответ: (7, 3), (-3, -7)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть  $\angle XAB = \alpha$ . Тогда  $\angle CAH = \alpha$ , т.к.  $AH$  - биссектриса  $\angle A$

Из параллельности  $MH$  и  $AH$  получаем, что  $\angle YZA = \angle ZAH = \alpha$

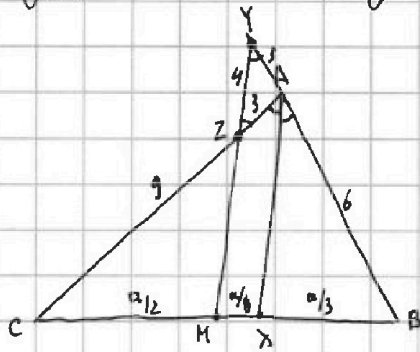
$\angle ZAB$  - внешний для  $\triangle AZY$ .

Значит,  $\angle ZYA + \angle YZA = \angle ZAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ZYA = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

То есть  $\angle AZY = \angle YZA$

Вывод:  $\triangle ZAY$  - р/б ( $AZ = AY = 3$ )



Пусть  $BC = a$ .  $AM$  - медиана  $\Rightarrow CM = MB = \frac{1}{2}a$

$MZ \parallel AH \Rightarrow \angle CZM = \angle CAH$ ,  $\angle ACH$  - общий для  $\triangle CZM$  и  $\triangle CAH$ .

Значит,  $\triangle CZM \sim \triangle CAH$  по двум углам.

Отсюда  $\frac{a}{2} = \frac{CZ}{CA} = \frac{CM}{CH} \Rightarrow \frac{a/2}{9} = \frac{3/2 + MX}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}a + 3MX = 2a$

$$\Rightarrow 3MX = \frac{a}{2} \Rightarrow MX = \frac{a}{6}$$

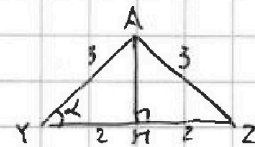
$$\frac{a}{2} = MB = MX + XB = \frac{a}{6} + XB \Rightarrow XB = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$$

По свойству биссектрисы,  $\frac{AB}{AC} = \frac{XB}{XC} \Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{6}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{a/3}{2a/3} \Rightarrow AB = 6$$

Рассмотрим р/б  $\triangle AYZ$ :

Высота  $AM$  этого равнобедренного треугольника является медианой. Значит,  $MY = \frac{YZ}{2} = 2$



$$\cos \alpha = \frac{MY}{AY} = \frac{2}{3}$$

По теореме косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow BC^2 = 144 + 36 - 144 \cos 2\alpha \quad (1)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1. \text{ Подставим значение } \cos \alpha = \frac{2}{3}:$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{8}{9} - 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Подставим в (1): } BC^2 = 180 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$\Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14



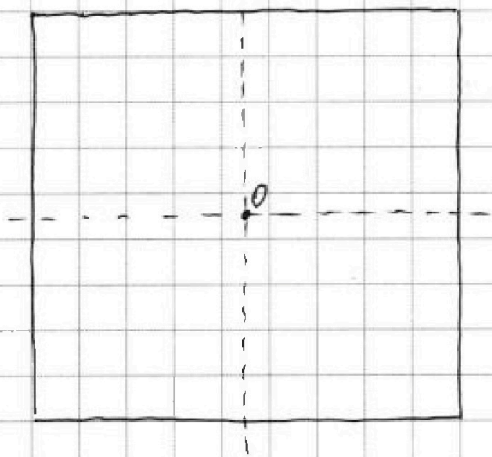
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



Заметим, что всего в границах  
цвет покрашено 100 точек

~~Назовем средними квадратами~~

Все симметрии, параллельные  
сторонам квадрата делят его  
на 4 ~~квадрата~~ части.

Назовем эти части четвертями.

Заметим, что на границе ~~четвертей~~ нет точек.

Если белые точки лежат в одной четверти, то есть еще 3  
<sup>одинаковые</sup> раскраски, поменяв их местами ~~на~~ ~~всего~~ наоборот.

Есть  $C_{25}^2$  способов выбрать 2 белые точки в четверти. Это

Если белые точки лежат в соседних по стороне четвертях,  
то таких раскрасок  $25 \cdot 25$

Если белые точки лежат в <sup>диагонально</sup> ~~разных~~ <sup>противоположных</sup>  
четвертях, то есть всего есть  $25 \cdot 25$  точек раскрасок

$$\text{Итого получим } \frac{25 \cdot 24}{2} + 2 \cdot 25^2 = 25 \cdot 12 + 25 \cdot 50 + 25 \cdot 62 =$$

$$= ~~1625~~ 1550 \text{ раскрасок}$$

Ответ: ~~1625~~ 1550





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} m-n = -1 \\ m-n+g = -13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 1 \\ p^2 = -\frac{2}{13} \end{cases} \text{ - не укл. усл.}$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ m-n+g = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 13 \\ p^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 13 \\ p = 2 \end{cases} \text{ - подходит}$$

$$\begin{cases} m-n = -13p \\ m-n+g = -p \end{cases} \Rightarrow g = 12p \text{ - не укл. усл.}$$

$$\begin{cases} mn = -13p^2 \\ m-n+g = -1 \end{cases} \Rightarrow 13p^2 = -10 \text{ - не укл. усл.}$$

Рассмотрим случай, когда  $p=2, m-n=13$ . Тогда  $3p^2 - B = (13+3)mn$

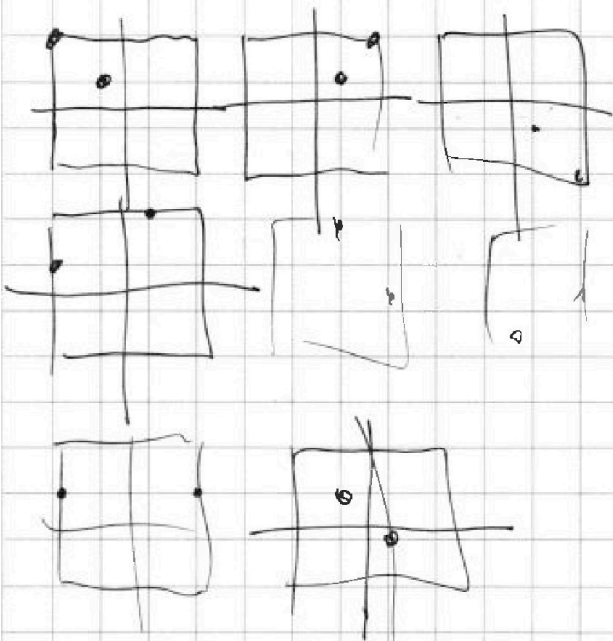
$$\Rightarrow 16mn = 3g^2$$

Отсюда  $3g^2 : 16 \Rightarrow g^2 : 16$   ~~$g = 4$~~ , но  $g$  - простое  
то есть  $6g^2$  2 входит в степень не больше 2

2. Пусть  $A = 3g^2, g$  - простое

Разберем случаи:

$m-n$	1	3	$3g$	$3g^2$	-1	-3	-3g	-3g^2
$m-n+g$	$3g^2$	$g^2$	$g$	$g$	$-3g^2$	$-g^2$	$-g$	-1
$g^2$	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{2}{2}$	<del>---</del>	-	-	-	-



$$|4x-3y| \leq 6$$

$$|3x-4y| \leq 8$$

$$7(2x+y)$$

$$4x-3y \leq 6$$

$$3x-4y \leq 8$$

$$-6 \leq 4x-3y \leq 6$$

$$-6 \leq 4x$$

$$-6-4x \leq$$

$$-6+3y \leq 4x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$(*) \begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq -3x + 4y \leq 8 \\ -14 \leq 7x - 7y \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14 \leq x + y \leq 14 \\ -2 \leq x - y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -14 \leq x + y \leq 14 \\ -2 \leq y - x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -16 \leq 2y \leq 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -24 \leq 2x + y \leq 24 \quad | \cdot 7 \Rightarrow -168 \leq 14x + 7y \leq 168$$

То есть  $14x + 7y \geq -168$ .  $4x^2 - 4y^2 + x - y \neq 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

Примем значение  $-118$  достигается при  $(x, y) = (-8, -8)$   
 ~~$x=0, y=2$~~

Действительно:  $14 \cdot (-8) + 7 \cdot (-8) = -112 - 56 = -118$ .

Проверим, что (\*) верно:

$$\begin{cases} |4 \cdot (-8) - 3 \cdot (-8)| \leq 6 \\ |3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-8)| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|-32 + 24| \leq 6$$

$$4x - 3y$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$\frac{48}{7}$$

$$50$$

$$\frac{625}{2}$$

$$1650$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 25 \\ \hline 310 \\ 124 \\ \hline 1550 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 25 \\ \hline 310 \\ 150 \\ \hline 1550 \end{array}$$

$$12 \cdot 25 = 3 \cdot 100$$

$$+ 2 \cdot 625 =$$

$$25 \cdot 12 = 25 \cdot 4 \cdot 3 = 500$$

$$2 \cdot 625$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

Дано:  $m, n \in \mathbb{N}$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn$$

1. Пусть  $A = 13p^2$ , где  $p$  - простое.

Разберём случаи; учитывая, что  $p$  - простое и  $13$  - простое

1)  $\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ p^2 = \frac{10}{13} \end{cases}$  - не удовл. условию

2)  $\begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ 22=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ p = \sqrt{22} \end{cases}$  - не удовл. условию

3)  $\begin{cases} m-n=13p \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ 13p+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ 13p = p^2 - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ p = \frac{-3}{4} \end{cases}$  - не удовл. усл.

4)  $\begin{cases} m-n=13p^2 \\ m-n+9=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ 13p^2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ p^2 = \frac{-8}{13} \end{cases}$  - нет решений.

Поэтому ни одна из задач не была решена.

2. Пусть  $A = 3q^2$ ,  $q$  - простое

Разберём случаи:

1)  $\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ q^2 = \frac{10}{3} \end{cases}$  - не удовл. усл.

2)  $\begin{cases} m-n=3 \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ 12=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ q = 2\sqrt{3} \end{cases}$  - не удовл. усл.

3)  $\begin{cases} m-n=3q \\ m-n+9=q \end{cases} \Rightarrow$

4)  $\begin{cases} m-n=3q^2 \\ m-n+9=q \end{cases} \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$12x - 9y = 18$     $4x - 3y = 6$     $3x - 9y = 8$     $2x + y = -24$     $4x$   
 $(2x - 16y = -32)$     $4x + 2y = -48$

$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) = 39^2$   
 $B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3) = 13p^2$

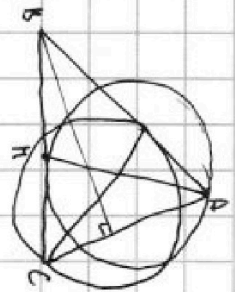
$(m-n+3)^2 = m^2 - 2mn + n^2 + 6m - 6n + 9 = A - 3m + 3n - 9$

$A = (m-n+3)^2 + 3(m-n+3) = (m-n+3)(m-n)$

$B = (m-n+3)(mn) = mn(m-n+3)$

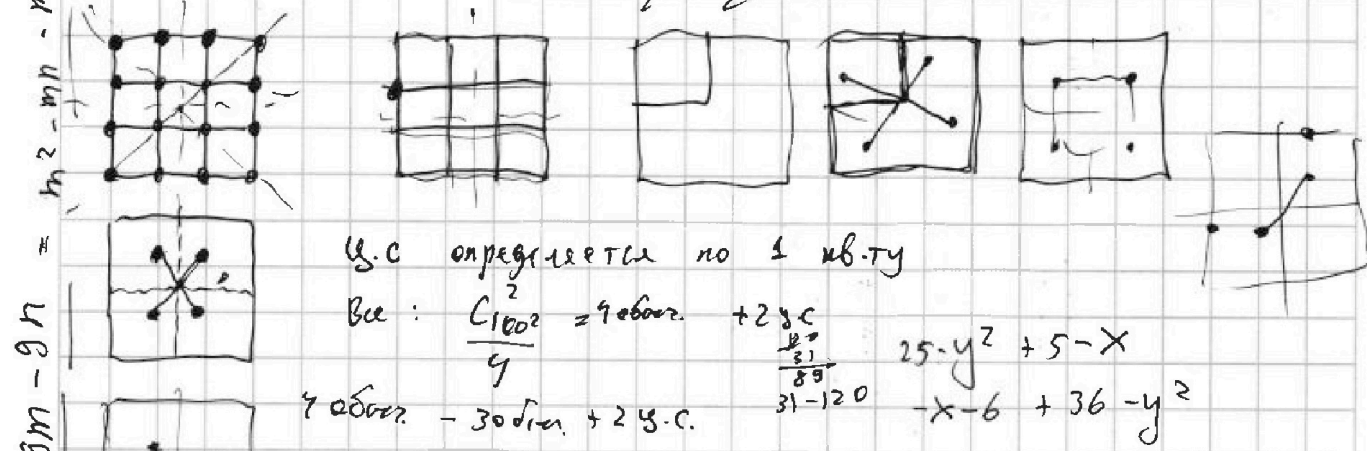
$-13+9 = -p \quad 9 =$

$(m-n+3)^2 = m^2 + n^2 + 9 - 2mn + 6m - 6n = m^2 + n^2 - 2mn + 9m - 9n - 6$



m-n  
m-n

$-13p^2 + 9 =$   
 $-3m + 3n + 9 = 2 \cdot 3 \cdot (m-n+3)^2 \quad A - 3(m-n+3)$   
 $13p^2 = -10$   
 $A = (m-n+3)^2 + 3(m-n+3)$   
 $B = (m-n+3)(mn) = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 13p^2$



Ц.С определяется по 1 кв.ту

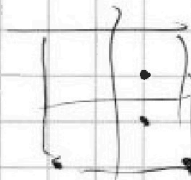
$Все: \frac{C_{100}^2}{4} = 9 \text{ обог.} + 2 \cdot 8 \text{ с.}$   
 $7 \text{ обог.} - 30 \text{ обог.} + 2 \cdot 8 \text{ с.}$

$25 - y^2 + 5 - x$   
 $-x - 6 + 36 - y^2$

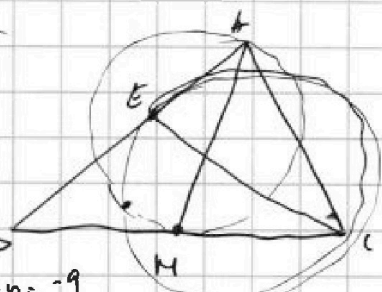
$x+6+5-y+25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{16} - 10\sqrt{5-y} =$   
 $= 120 - 4x - 9y^2$

$5x - y + 4y^2 + 89$

$(x+6)(5-y) =$   
 $= 30 - xy + 5x - 6y$



$m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$   
 $= m^2 - 2mp + 9m - 9n$   
 $m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$



$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy}$   
 $9x^4 + x - 5\sqrt{y} = 9y^4 - 5\sqrt{x} + y$

$m-n = -13p$   
 $m-n+9 = -p$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y} \end{cases}$$

$m = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n+3)^2$   
 $n = m^2n - mn^2 + 3mn$   
 $m+n = \frac{9}{2}$   
 $mn(m-n+3) = \frac{16+8^2}{2}$

$$4(x^2-y^2)/(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$x+6 + 5-y + 25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-y} = 60 - 2\sqrt{xy}$$

$$3x + 2y^2 - y - 26 = 0$$

$$x+y$$

$$4x - 3y = +6$$

$$7x - 7y = -14$$

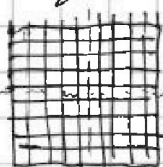
$$3x - 4y = -8$$

$$x - y = 2$$

$$x+y = 2 \quad Bp^2/3g^2$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{y} = 0$$

$$-2+9 = -30$$



$$A: m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n+3)^2$$

$$B: m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$m+n = \frac{9}{2}$$

$$mn(m-n+3)$$

$$16+8^2$$

$$x-6 \quad 25-10y+y^2$$

$$mn(m-n+3)$$

$$(m+n+g)^2 = m^2 + n^2 + g^2 - 2mn + 18m + 18n = A -$$

$$(m+n+g)^2 = 9(m-n+3)$$

$$7x - 7y = -2$$

$$+18m + 18n = A -$$

$$(m-n+g)(m-n+3) = A$$

$$x-y = \frac{2}{7}$$

$$A + 81 + 9m + 9n$$

$$mn(m-n+3) = B$$

$$x+y = 14$$

$$x = \frac{-32}{5}$$

$$\frac{96}{5} \quad \frac{170}{170}$$

$$(m-n)^2 - 9(m-n)$$

$$(m-n)mn + 3mn$$

$$-y = 2x + 24$$

$$2x + y = -24$$

$$(7x - 3y) \leq 8$$

$$(3x - 4y) \leq 8$$

$$2x + y = 24$$

$$\begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$4x + 6x + 72 \leq 6$$

$$110x + 72 \leq 6 \quad 2x + y$$

$$(5x + 36) \leq 8$$

$$(3x + 8x + 69) \leq 8$$

$$(11x + 96) \leq 8$$

$$\frac{82}{5} \quad 14 - \frac{2}{7} + \frac{14 + \frac{2}{5}}{2}$$

$$(a+b)^2 - ab$$

$$21 - \frac{3}{7}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy}$$

$$5 + (5-y)^2 - 10y$$

$$5 + 5^2 - y^2$$

$$(x-y)(x+y)/(x^2+y^2) = -5(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2) = -5(a-b)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) = -5(a-b)$$

$m = 1$   
 $(m-n)^2 + 9(m-n)$   
 $A: m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n+3)^2$   
 $B: m^2n - mn^2 + 3mn$   
 $mn(m-n+3)$   
 $m+n = \frac{9}{2}$   
 $mn(m-n+3) = \frac{16+8^2}{2}$   
 $(m+n+g)^2 = m^2 + n^2 + g^2 - 2mn + 18m + 18n = A -$   
 $+18m + 18n = A -$   
 $(m+n+g)(m-n+3) = A$   
 $mn(m-n+3) = B$   
 $(m-n)^2 - 9(m-n)$   
 $(m-n)mn + 3mn$   
 $-y = 2x + 24$   
 $2x + y = -24$   
 $(7x - 3y) \leq 8$   
 $(3x - 4y) \leq 8$   
 $4x + 6x + 72 \leq 6$   
 $110x + 72 \leq 6 \quad 2x + y$   
 $(5x + 36) \leq 8$   
 $(3x + 8x + 69) \leq 8$   
 $(11x + 96) \leq 8$   
 $(x-y)(x+y)/(x^2+y^2) = -5(\sqrt{x} - \sqrt{y})$   
 $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2) = -5(a-b)$   
 $(a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) = -5(a-b)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6}{9} + \frac{8}{3} = \frac{18+32}{9}$$

$$a_5 = -6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

$a_1, d$

$$a_1 + 4d = 6x + 18$$

$$a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_1 + 10d = -3x^2$$

$$a_1 + 4d = 6x + 18 = 6(x+3)$$

$$a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2 = x^2(x-4)^2$$

$$x^7 - 8x^3 + 16x^2$$

$$\frac{165}{12}$$

$$26d = x^2(x-4)^2 - 6(x+3) = x^2(x^2 - 8x + 16) - 6x - 18 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \quad | :2$$

$$4d = -3x^2 - (x^4 - 8x^3 + 16x^2) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -x^4 + 8x^3 - 19x^2$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$$

1	-8	17	-4	-12	
-1	1	-9	21	-30	
2	1	-6	5	6	0

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3)$$

$$D/4 = 4 + 3$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$\frac{65}{25} = \frac{13}{5}$$

1	-6	5	6
-2	1	-8	
3	1	-3	
-3	1	-9	
6	1	0	5
-6	1	-12	

1	-6	5	6	
2	1	-4	-3	0

$$(x^2 - 4x + 4) / (x^2 - 4x - 3) \quad | 625 \quad 2 + \frac{4}{3}x$$

$$x^2 - 4x^3 - 3x - 4x^3 + 16x^2 + 12x + 4x^2 - 16x - 12$$

$$14x - 3y \leq 6$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$-18 + 9y \leq 12x \leq 32 + 16y$$

$$-50 \leq 25y$$

$$-2 \leq y$$

$$\begin{cases} 14x - 3y \leq 6 \\ 13x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y \leq 41 \\ y \leq \frac{41}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28 - 30 \\ 21 - 40 \end{cases}$$

$$14x$$

$$2x + y = 24$$

$$\begin{cases} x = 8 + 8 \\ 4x - 72 + 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 - 24 \\ 24 - 32 \\ 10x - 72 \leq 6 \end{cases}$$

$$3x - 56 + 8x$$

$$-14 \leq x - 24 \leq 14$$

$$10 \leq x \leq 38$$

$$y = 24 - 2x$$

$$\begin{cases} 14x - 3y \leq 6 \\ 13x - 4y \leq 8 \\ 12x^2 + 12y^2 - 16xy \leq 15 \\ 12x^2 + 12y^2 - 25xy \leq 15 \\ 9x - 3y = 8 \\ 2x + y = 24 \\ 6x + 3y = 22 \\ -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

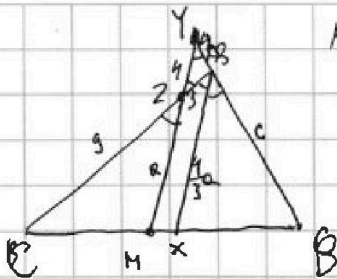
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 12$$

$$AZ = 3$$

$$YZ = 4$$

$$\frac{a}{AX} = \frac{9Z}{AZ}$$

$$7x - 3y = -6$$

$$3x - 4y = -8$$

$$\frac{c}{AZ} = \frac{\frac{4}{3}a}{4+a}$$

$$x - y = -2$$

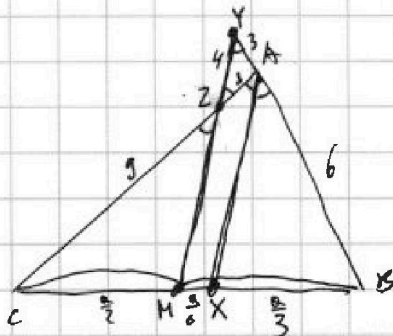
$$7c + ac = \frac{4}{3}ac + 4a \quad x + y = 2$$

$$c(7 - \frac{4}{3}a) = 4a - \frac{1}{3}ac = 4a \quad x = 0$$

$$c = \frac{12a}{12-a}$$



$$AC : AB = CX : XB$$



$$BC = a$$

$$AB = C$$

$$\frac{a}{3} = \frac{a/2}{4x}$$

$$\frac{CX}{XB} = \frac{12}{C}$$

$$3 = \frac{a}{24x}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{a/2}{4x}$$

$$CM + MX = a$$

$$CM + X = a$$

$$4x = \frac{a}{6}$$

$$\frac{a}{6} + \frac{a}{6} = 4a$$

$$3a + 34x = 4a/2$$

$$34x = \frac{a}{2}$$

$$\frac{24}{168} = 2$$

$$\frac{6}{9} = \frac{a}{3}$$

AX

$$\frac{3 \cdot 12}{2a}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{a}{4}$$

$$BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$$

$$180 - 144 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$180 - 144(2\cos^2 \alpha - 1)$$

$$324 - 288 \cdot \frac{7}{9}$$

x =

$$21x \geq -168$$

$$7x - 3y = 6$$

$$\frac{12}{AX} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{AX}{12+4}$$

$$3x - 4y = 8$$

$$\frac{9}{12} + \frac{4}{AX} = \frac{9}{6}$$

$$\frac{12+4}{AX} = \frac{9}{6}$$

$$168 = 14x + 7y$$

$$\frac{288}{9} = 32$$

$$\frac{144}{9} = 16$$

$$\frac{324}{128}$$

$$324 - 288 \cdot \frac{7}{9}$$

$$140$$

$$154$$

$$168$$

$$x - y = 2$$

$$\frac{16}{36}$$

$$\frac{14}{112}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$-16 \leq 2x \leq 16$$

$$21x \geq -168$$

$$12x - 5y = 18$$

$$12x - 12y = 32$$

$$-6 = 7x - 3y = 6$$

$$3y = -14$$

$$-8 = 3x - 4y = 8$$

$$-14 \leq x + y \leq 14$$

$$-91 \leq 7x - 7y \leq 14$$

$$-2 \leq x - y \leq 2$$

$$-3x$$

$$7x - 3y$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$-32 + 24$$

$$18 - 10$$

$$x = -8$$

$$x = \frac{168}{21} = \frac{24}{3} = 8$$