



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

$$a_n - \text{арифм. прогресс}, a_n = 6 - 9x, a_6 = (x^2 - 2x)^2, a_{10} = 9x^2$$

$$\frac{a_n - a_k}{n - k} = d \Rightarrow \frac{a_{10} - a_6}{4} = \frac{a_{10} - a_1}{6} = d$$

$$\frac{9x^2 - 6 + 9x}{6} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$6x^2 + 6x - 4 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 =$$

$$= (x^3 - 3x^2 - 2x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow (x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 4x + 4)(x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 2x - 4)(x - 1)^2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Ответ: } x = 1; 1 \pm \sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

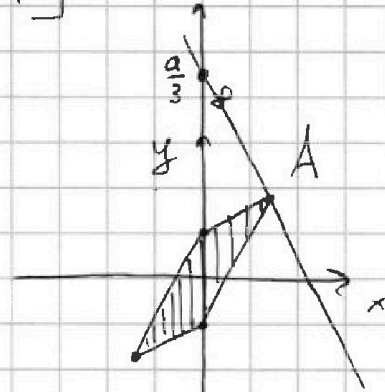
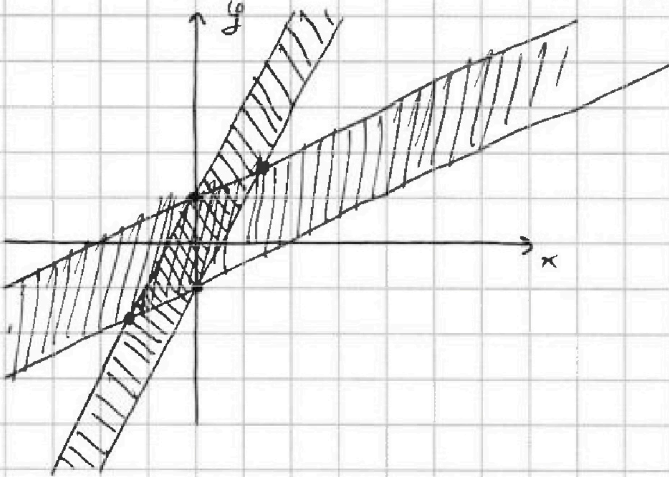
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√2

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y \in [-2; 2] \\ 2x-y \in [-1; 1] \end{cases}$$



$$3y + 6x = a$$

Найдём a_{\max} :

Из графика a_{\max} будет, если $3y + 6x = a$ будет проходить через точку $A(x_A, y_A)$

$$3y + 6x = a \Leftrightarrow y = \frac{a}{3} - 2x$$

Найдём x_A, y_A :

$$\begin{cases} x_A - 2y_A = -2 \\ 2x_A - y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_A = 5 \\ 3x_A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{5}{3} \\ x_A = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{a_{\max}}{3} - \frac{8}{3} \Rightarrow a_{\max} = 13 \Rightarrow (3y + 6x)_{\max} = 13$$

Ответ: $(3y + 6x)_{\max} = 13$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$\begin{cases} A = 11p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n} = (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 75q^2 \end{cases}$$

если $m+2n=11$:

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2, \quad mn \cdot 20 = 75q^2 \Rightarrow 4mn = 15q^2$$

$$\Rightarrow m=5, n=3, q=2 \text{ или } m=3, n=5, q=2$$

$m=3, n=5$ не подходит т.к. $3+10 \neq 11$

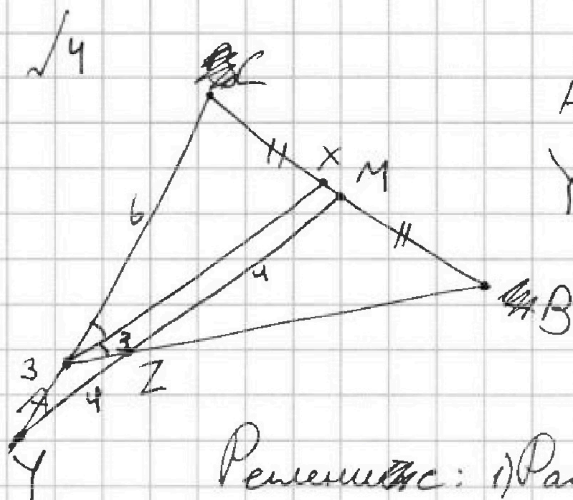
\Rightarrow первая пара $(5, 3)$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AC=6, AZ=3, YZ=4$
 $YM \parallel AX, AX$ - биссектриса
 $CM=MB$
 Найти BC

Решение: 1) Рассмотрим $\triangle YAZ$:

$$\angle AYZ = \angle CAX, \text{ т.к. } AX \parallel YM$$

$$\angle AZY = \angle XAB, \text{ т.к. } AX \parallel XM$$

$$\angle CAX = \angle XAB, \text{ т.к. } AX \text{ - биссектриса} \Rightarrow$$

$$\angle AZY = \angle AYZ \Rightarrow AY = AZ = 3$$

2) Рассмотрим $\triangle YCM$ и секущую AB :

$$\text{По т. Менелая: } \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{4}{ZM} = 1 \Rightarrow ZM = 4$$

3) Рассмотрим $\triangle YCM$ и $\triangle ACX$ из подобия

$$\text{По т. косинусов } AZ^2 = YA^2 + YZ^2 - 2YA \cdot YZ \cdot \cos \angle AYZ$$

$$\cos \angle AYZ \Rightarrow \cos \angle AYZ = \frac{9 + 16 - 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{4) По т. косинусов } CM^2 = YC^2 + YM^2 - 2YC \cdot YM \cos \angle AYZ =$$

$$= 81 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = 49 \Rightarrow CM = 7 \Rightarrow BC = 14$$

Ответ: $BC = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√5

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=y \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$7-x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 7]$$

$$14+5x-x^2 \geq 0$$

$$D = 25 + 56 = 81$$

$$x = \frac{-5 \pm 9}{-2} = -2, 7 \Rightarrow$$

$$-(x+2)(x-7) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} \quad \text{~~... x~~}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{7-x}} + \frac{7}{\sqrt{7-x}} = 2\sqrt{x+2}$$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} - \sqrt{7-x} + 7 = 0$$

$$\sqrt{x+2} = a, \quad \sqrt{7-x} = b$$

$$a - 2ab - b + 7 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

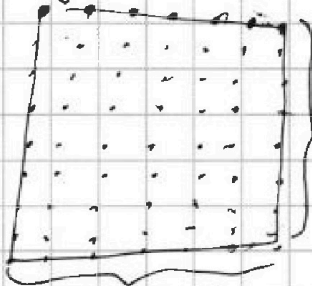
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

Всего 11 узел. Посчитаем всего количество раскрасок,

без учета поворотов: $N = \frac{12!}{2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} =$



11 узел

$= 7260$, учтём \neq вариации раскраски переходящие сами в себя при данной повороте:

$$7260 - \frac{7260}{4} = 1815$$

При повороте всего квадрата

11 узел

можно повернуть 4 раза, до момента,

когда все виды раскраски не перейдут сами в себя

$$\Rightarrow \frac{1815 \cdot 4}{4} = 1815, 1815 + 15 = 1830$$

Ответ: ~~1815~~ 1830

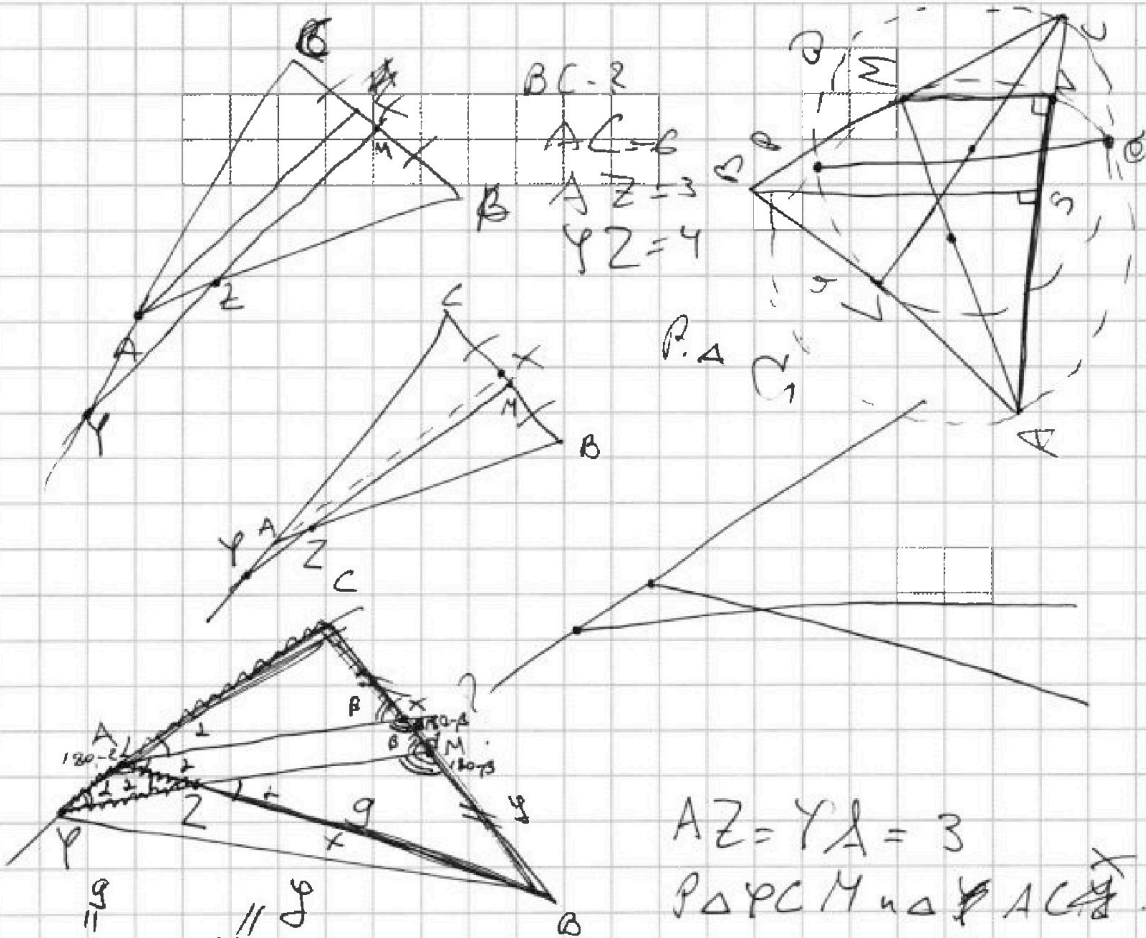


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$BC=2$
 $AC=6$
 $AZ=3$
 $YZ=4$

$P. \Delta$
 CM

$AZ = YZ = 3$
 $P. \Delta CM$ и ΔYAC

$P. \Delta AXB$ и ΔZMB

$$12 = \frac{AB}{MB} = \frac{x}{y+d}$$

$$ZB = x$$

$$12y = 9y + 9d$$

$$3y - 9d = 6y$$

$$3y = 9d$$

$$3y = 9d$$

$$y + d = \frac{1}{2} \cdot 12$$

$$\frac{PC}{AC} = \frac{MC}{XC}$$

$$\frac{6}{6} = \frac{y-d}{x}$$

T.M. на ΔACB

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

$$\frac{9}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y+d}$$

$$x = 9$$

$$\frac{9}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{y+d}$$

$$\Rightarrow 9 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2(y+d)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{1-y} + 7 = 2\sqrt{14+8x-y^2} \\ x^3+3x-\sqrt{2y} = y^3-\sqrt{2x+3y} \end{cases}$$

$$x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$$

$$x=y \geq 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{1-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$1-x \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 1] \Rightarrow y \in [0; 1]$$

$$14+5x-x^2=0$$

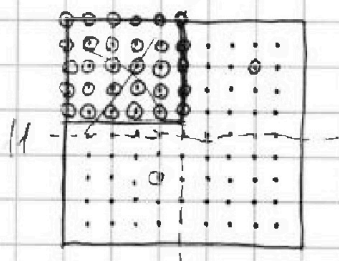
$$D = 25 + 56 = 81$$

$$x = \frac{-8 \pm 9}{-2} = \frac{5 \pm 9}{2} = 7, -2$$

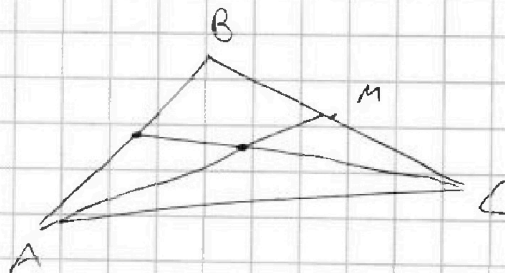
$$14+5x-x^2 = -(x-7)(x+2) = (7-x)(x+2)$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{1-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$6 \cdot 8 = 30 \text{ греек} \quad A_n = \frac{30!}{(30-2)!}$$



121000





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11

a_n - арифмет. прогресс.

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$

$$a_n = a_k + d(n-k), \quad \frac{a_n - a_k}{n-k} = d$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_4}{10-4} = \frac{9x^2 - 6 + 9x}{6} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

$$a_1 = a_4 - \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) \cdot 3 = 6 - 9x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 3 =$$

$$= -\frac{9}{2}x^2 - \frac{24}{2}x + 9$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = -\frac{9}{2}x^2 - \frac{24}{2}x + 9 + \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) \cdot 5 =$$

$$= 3x^2 - x + 4$$

$$3x^2 - x + 4 > 0 \quad (D < 0)$$

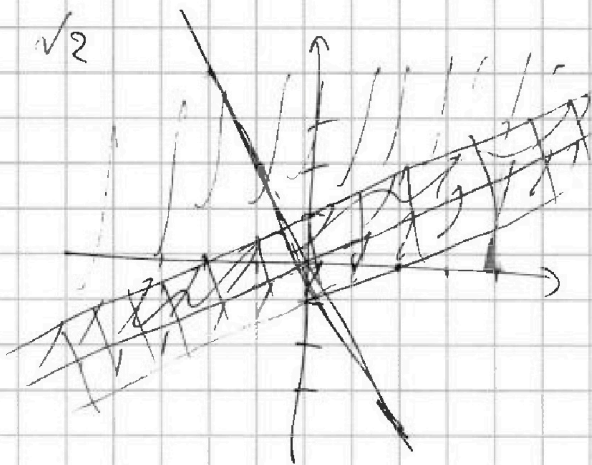
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$3y + 6x = 9$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2 - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$|2 - y| \leq 1$$

$$3y = 9 - 6x$$

$$y = \frac{9}{3} - 2x$$

если $x - 2y \geq 0$

$$y \leq \frac{x}{2}$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$2y \geq x - 2$$

$$y \geq \frac{x}{2} - 1$$

если $x - 2y < 0$:

$$y > \frac{x}{2}$$

$$2y - x \leq 2$$

$$y \geq \frac{x}{2} + 1$$

$\sqrt{13}$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m + 2n + 9)$$

$$1) A = 11p^2 = 11 \cdot p \cdot p$$

$$B = 75q^2 = 5^2 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$1) m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11 \cdot p \cdot p$$

$$(m + 2n)^2 - 7(m + 2n) = 11 \cdot p \cdot p$$

$$m + 2n = L \in \mathbb{N}$$

$$L^2 - 7L = 11 \cdot p \cdot p$$

$$L^2 - 7L - 11 \cdot p^2 = 0$$

$$D = 49 + 44p^2$$

$$L = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 44p^2}}{2}, 49 + 44p^2 = g^2, g - \text{нечёт}$$

$$49 - 44p^2 - g^2 = 0$$

$$7^2 + 2 \cdot 22 \cdot p^2 - g^2 = 0$$

$$1) mn(m + 2n + 9) = 5^2 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$(m + 2n)(m + 2n + 9) = 11 \cdot p \cdot p$$

$$\text{или } m + 2n = 11$$

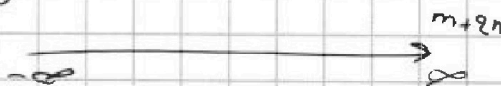
$$\Rightarrow m + 2n = 11$$

или $m + 2n = p$
или $m + 2n = p^2$

$$m + 2n \neq 11$$

$$m + 2n \neq 9 \quad (5, 3), (5, 5),$$

$$m + 2n \neq 3 \quad (3, 5) \text{ - не подходит}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2 \quad x = ?$$

~~$$\frac{(x^2 - 2x)^2 - 9x^2}{4} = \frac{9x^2 - 6 + 8x}{6}$$~~

$$9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 6x^2 + 6x - 4$$

$$(3x - x^2 + 2x)(3x + x^2 - 2x) = 2(3x^2 + 3x - 2)$$

$$(-x^2 + 5x)(x^2 + x) = 2(3x^2 + 3x - 2) = 6x(x+1) - 4$$

$$x^2(-x+5)(x+1) = 2(3x^2 + 3x - 2)$$

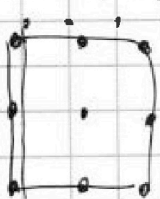
~~$$x^2(-x^2 + 4x + 5) = 2(3x^2 + 3x - 2)$$~~

$$-x^2(x-5)(x+1) - 6x(x+1) = -4$$

$$x(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 4$$

$$x(x+1)(x-3)(x-2) = 4$$

$x \neq 0, -1, 2, 3$ подбором $x = 1$



$$A_3^2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 2 + 1 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$$

~~$$= 36$$~~

~~$$= 36$$~~

~~$$= 36$$~~

$$\frac{49}{4} = 12$$

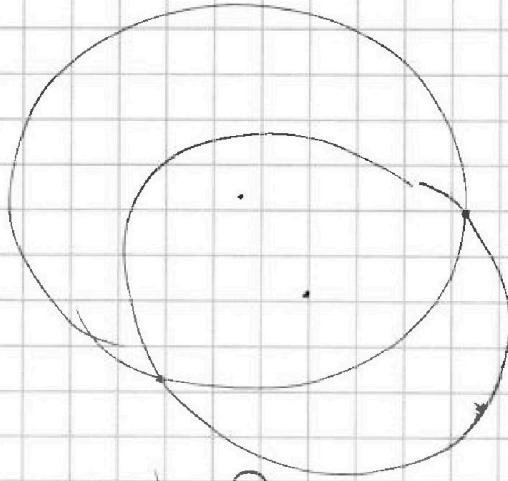


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$x-2y \in [-2; 2]$$

$$2x-y \in [-1; 1]$$

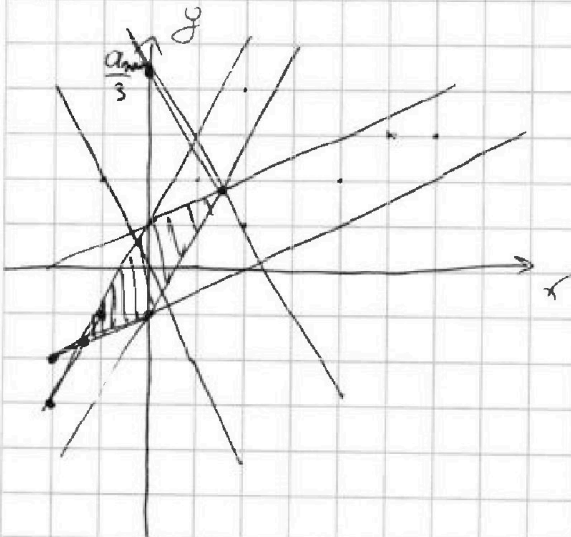
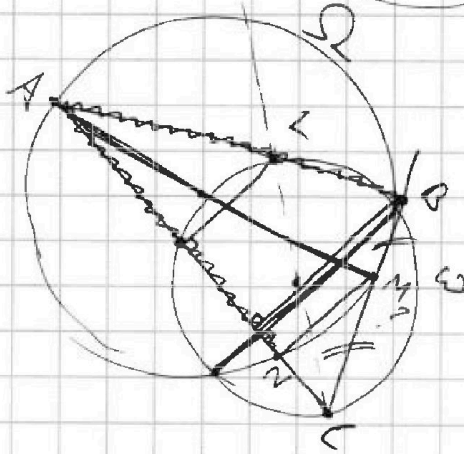
$$x-2y = [-2; 2]$$

$$2x-y = [-1; 1]$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - [-1; 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - [-1; 1] \end{cases}$$

11



$$3y+6x=9$$

$$y = \frac{9}{3} - 2x$$

$$\frac{5}{2} = \frac{0}{3} - \frac{6}{3}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$a = 13$$

$$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$$

$$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$