



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Обозначим 1-ый член прогрессии за  $a_0$ , а разность за  $d$ , тогда из условия: ( $a, d$  - любые  $\in \mathbb{R}$ )

$$\begin{array}{l} 3\text{-ий член: } a_0 + 2d = 3x + 3 \cdot 4 \\ 5\text{-ый член: } a_0 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \cdot 2 \\ 9\text{-ый член: } a_0 + 8d = 3x^2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 8d = 12x + 12 - 4a_0 \\ 8d = 2(x^2 + 2x)^2 - 2a_0 \\ 8d = 3x^2 - a_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - a_0 = 12x + 12 - 4a_0 \\ 3x^2 - a_0 = 2x^2(x+2)^2 - 2a_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a_0 = 4x + 4 \\ 3x^2 + a_0 = 2x^2(x+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \ominus$$

$$2x^2 = 2x^2(x+2)^2 - 4x - 4 \quad (\text{приведем заметим, что по какому-то } x \text{ мы всегда сможем определить } a_0 \text{ и } d)$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0, \text{ заметим, что } x = -1 \text{ - корень}$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0, \text{ заметим, что у } (*) \text{ } x = -1 \text{ - корень}$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ:  $-1; -1 \pm \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Исходная система  $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 3y - x \leq 3 \\ -1 \leq y - 3x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 3 \leq x \leq 3y + 3 \\ 3x - 1 \leq y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

тогда  $x \geq 3y - 3 \geq 3 \cdot (3x - 1) - 3 = 9x - 6 \Leftrightarrow 6 \geq 8x$ . Приём равенства достигается при  $y = \frac{5}{4}$ ,  $x = \frac{3}{4}$ , аналогично

~~$y \leq 3x + 1 \leq 3y + 1 = 3y + 1 \Leftrightarrow$~~  тогда  $\max(4y + 8x)$

достигается при  $x = \frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{5}{4}$ , а  $\max = 6 + 5 = 11$ .

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Из условия:

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

Заметим, что если  $m+n$  - чётное, то и  $A$  чётное, а

если  $m+n$  - нечётное, то  $m+n-9$  - чётное, а значит

$A: 2$  при любых  $m, n \in \mathbb{N}$ , ~~значит  $\beta = mn^2 + m^2n - 3mn = mn(m+n-3)$~~

~~$= mn(m+n-3)$  тогда либо  $13p^2: 2 \Leftrightarrow p: 2 \Leftrightarrow p=2$ , т.к.  $p$ -простое~~

либо  $75q^2: 2 \Leftrightarrow q: 2 \Leftrightarrow q=2$ , т.к.  $q$ -простое, тогда

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 52 \\ (m+n)(m+n-9) = 300 \end{cases}; \begin{cases} (m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0 & (1) \\ (m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0 & (2) \end{cases}, \text{ из первого:}$$

$m+n = -4$  или  $m+n = 13$ , но  $m, n \in \mathbb{N}$ , значит  $m+n = 13$ , а

из второго:  $D = 81 + 1200 = 1281 = 3 \cdot 7 \cdot 61 \neq k^2, k \in \mathbb{Z}$ , значит  $m+n = \frac{9 \pm \sqrt{1281}}{2}$

но  $m+n \in \mathbb{N}$  - противоречие, значит число  $A = 13p^2 = 52$ , а

$m+n = 13$ , тогда  $\beta = 75q^2 = mn^2 + m^2n - 3mn = mn(m+n-3) = 10mn: 2$ ,

а значит  $75q^2: 2 \Leftrightarrow q: 2 \Leftrightarrow q=2$ , т.к.  $q$ -простое, тогда

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ 10mn = 300 \\ m, n \in \mathbb{N} \end{cases}; \begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \\ m, n \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ а значит по м. Виета: } m, n \text{ - корни ур-ния } t^2 - 13t + 30 = 0, t_1 = 3, t_2 = 10,$$

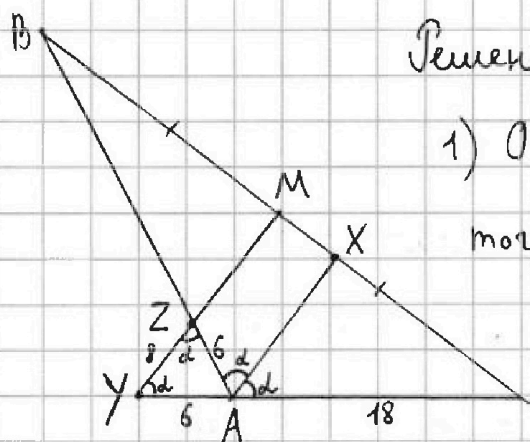
тогда  $\begin{cases} n = 3 \in \mathbb{N} \\ m = 10 \in \mathbb{N} \\ n = 10 \in \mathbb{N} \\ m = 3 \in \mathbb{N} \end{cases}$  Ответ:  $(3; 10), (10; 3)$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) Обозначим  $\angle BAX = \angle CAX = \frac{1}{2} \angle BAC = \alpha$ ,

тогда  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $\angle MYA = \angle XAC = \alpha$  -

как соотв. при  $MY \parallel AX$  и сек. AY и

$\angle = \angle YZA = \angle BAX$  - как накрест лежащ.

при  $MY \parallel AX$  и сек. AB, тогда  $\triangle AZY$  - р/б, тогда  $AZ = AY = 6$

2) По т. косинусов в  $\triangle YZA$ :  $\cos \alpha = \frac{YZ^2 + ZA^2 - YA^2}{2 \cdot YZ \cdot ZA} = \frac{64 + 36 - 36}{2 \cdot 8 \cdot 6} =$

$= \frac{64}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$ , тогда  $\cos \angle BAC = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

3) По т. Менелая в  $\triangle ABC$ :  $\frac{CM}{BM} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{YC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$   
M - серед. BC

Отсюда  $BZ = 24$ , а  $AB = BZ + AZ = 24 + 6 = 30$ .

4) По т. косинусов в  $\triangle ABC$ :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC =$

$= 900 + 324 + 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 12 \cdot 75 + 12 \cdot 27 + 12 \cdot 10 = 12 \cdot 112$

$= 24 \cdot 56 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 = 21 \cdot 8^2$ , тогда  $BC = 8\sqrt{21}$

Ответ:  $8\sqrt{21}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Рассмотрим второе ур-ние системы:

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2, \text{ где из } 0.2.3. \ x, y \geq 0.$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0; (x^2 + y^2)(x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0;$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \underbrace{\left( \underbrace{(x + y)}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(x^2 + y^2 + 5)}_{> 0} + 1 \right)}_{> 0} = 0, \text{ а значит } \sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y \geq 0, \text{ тогда подставим в 1-е ур-ние системы:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ заметим, что } 6+5x-x^2 = (x+1)(6-x) \text{ а } 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = \sqrt{(x+1)^2 + (6-x)^2} - (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 7 - (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}) - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+1 = 1 + 2\sqrt{6-x} + 6-x \\ x+1 = 4 - 2\sqrt{6-x} + 6-x \\ x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x-3 = \sqrt{6-x} \\ 4\sqrt{6-x} = 9-2x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 6-x \\ 96 - 16x = 81 - 36x + 4x^2 \\ x \geq 3 \\ 2x \leq 9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \quad (1) \\ 4x^2 - 20x - 15 = 0 \quad (2) \\ 3 \leq x \leq \frac{9}{2} \end{cases} \quad (1): D = 25 - 12 = 13$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ заметим, что } \frac{5 - \sqrt{13}}{2} < \frac{5}{2} < 3, \text{ а } \frac{5 + \sqrt{13}}{2} > \frac{5+1}{2} = 3 \text{ и } \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2} \checkmark.$$

$$(2) D/4 = 100 + 60 = 160, x = \frac{10 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}, \text{ при этом } \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} < \frac{5}{2} < 3$$

$$\text{и } \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} > \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}, \text{ значит единственный подходящий корень:}$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2}. \text{ Ответ: } \left( \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right).$$



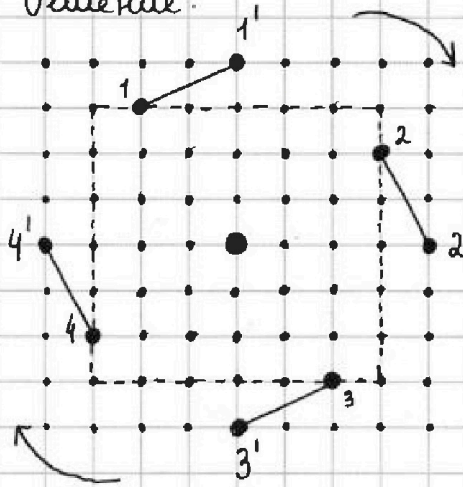
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:



Заметим, что для каждой точки (узла) в квадрате (крае центральной) существует ещё ровно 3 точки в квадрате, которые в неё переходят при повороте, т.к. квадрат симметричен по вертикали и горизонтали,

а значит и для любой пары точек (крае центральной) существует ровно 3 другие пары, которые в неё переходят при повороте. В случае, когда в паре участвует центральная точка, пара определяется второй (не центральной) точкой, а, как мы выяснили, их всего 4 для каждой такой пары.

Тогда кол-во способов перекрасить 2 узла в белый цвет равно кол-ву способов выбрать 2 точки, согласно условию

$$\frac{C_{81}^2}{4} = \frac{81!}{79! \cdot 2! \cdot 4} = \frac{81 \cdot 80 \cdot 79!}{79! \cdot 2 \cdot 4} = 810$$

(т.к. всего точек  $9 \times 9 = 81$ )

Ответ: 810.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} x \geq 3y \\ 3x \geq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ x \geq 3y \end{cases} \quad 3y \geq y \Leftrightarrow y \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} \geq 1 \quad \sqrt{6-x} \geq -\sqrt{6}$$

$$|8x-24y| \leq 24; \quad \begin{cases} |8x+4y-28y| \leq 24 \\ |4y+8x-20x| \leq 4 \end{cases}$$

$$6+5x-x^2 \leq ?$$

~~$|8x-24y| \leq 24$~~

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |9x-3y| \leq 3 \end{cases}$$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 5$$

$$D/4 = 9 - 25 \leq 0$$

~~$x^2 - 5x - 6 + ? \geq 0$~~

~~$x^2 - 5x - 6 + ? \geq 0$~~

~~$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n)$~~

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$A = (m+n)(m+n-9) = 13q^2, \quad q=2$$

$$B = mn(m+n-3) = 75p^2, \quad p=2$$

$$3 \cdot 427 = 3 \cdot 7 \cdot 61$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 52 \\ mn(m+n-3) = 300 \\ (mn)(m+n-9) = 300 \\ (m+n)(m+n-3) = 52 \end{cases}$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0$$

$$m+n = 13$$

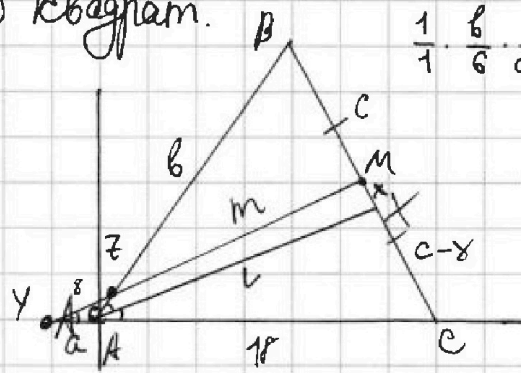
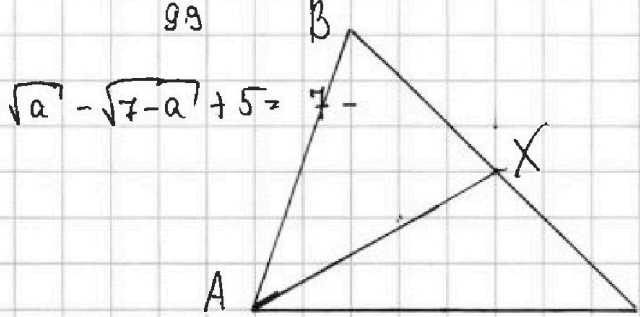
$$mn = 30$$

$$m=3 \quad n=10 \quad n=10 \quad m=3$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0 \quad x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - 6 \quad \frac{18}{c-x} = \frac{b+6}{c+x}$$

$D = 81 + 1200 = 1281$  - не полный квадрат.

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{b}{6} \cdot \frac{a}{a+18} = 1$$



$$(m+n)(m+n-9) = 52; \quad m+n = 13$$

$$y - 6 = \frac{25}{4}$$

$$y = \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \frac{49}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 1-бид:  $a-2d$ , 2-бид:  $a-d$  3-бид:  $a$  (3x+3), 4-бид:  $a+d$ , 5-бид:  $a+2d$  ( $x^2+2x$ )  
 9-бид:  $\frac{a+6d}{3x^2}$ ;  $\begin{cases} 3x+3+2d = (x^2+2x)^2 \\ 3x+3+6d = 3x^2 \\ x+1+2d = x^2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 3x+3+2d = (3x+1+2d)^2 \\ x+1+2d = x^2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} 3x+3+2d = 9x^2+1+4d^2+4d+6x+12xd \\ x^2 = x+1+2d \Rightarrow 2d = x+1-x^2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 9x+9+18d+1+4d^2+4d+6x \\ +12xd-3x^2-3-2d=0 \end{cases}$   
 $3x(3+2+4d-1) + 7 + 4d^2 + 20d = 0$   $\begin{cases} a+2d = 3x+3 \cdot 4 \\ a+4d = x^4+4x^3+4x^2 \cdot 2 \\ a+8d = 3x^2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} 8d = 12x+12-4a \\ 8d = 2x^4+8x^3+8x^2-2a \\ 8d = 3x^2-a \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 3x^2-a = 12x+12-4a \\ 3x^2-a = 2x^4+8x^3+8x^2-2a \end{cases}$   
 $\begin{cases} x^2+a = 4x+4 \\ 3x^2+a = 2x^4+8x^3+8x^2 \end{cases}$ ;  $2x^2 = 2x^4+8x^3+8x^2-4x-4$   
 $2x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$  2.  $\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} |6y-2x| \leq 6 \\ |6x-2y| \leq 2 \end{cases}$   
 $(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$   $4y+8x = ax-3ay+3bx-8y$   
 $(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$   $y(4+3a+b) = x(a+3b-8)$   
 $D = 1+2 = 3$   $y(4+3a+b) = x(a+3b-8)$   
 $(x+1)^2(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{1})(x - \frac{\sqrt{3}-1}{1}) = 0$   $\begin{cases} 4+3a+b=0 \\ a+3b-8=0 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 4+3(8-3b)+b=0 \\ a=8-3b \end{cases}$   
 $\begin{cases} x = -1 \\ x = -1+\sqrt{3} \end{cases}$   $3y-x+3x-y$   $\begin{cases} 28-8b=0 \\ a=8-3b \end{cases}$ ;  $\begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ a = \frac{16-21}{2} \end{cases}$ ;  $\begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases}$   
 $x \geq 3y$ ;  $x-3y \leq 3$ ;  $x \leq 3+3y$   $x^2-6xy+9y^2 \leq 9$   
 $9x^2-6xy+y^2 \leq 1$ ;  $\frac{10x^3+10y^3}{x^2+y^2} \leq 10$   
 $4(x+2y)$   $2x^4+8x^3+8x^2 = 3x^2+3x+3$   
 $2x^4+8x^3+5x^2-3x-3 = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$C_{81}^2$$

$$\frac{81!}{79! \cdot 2! \cdot 4} \rightarrow \frac{81 \cdot 80 \cdot 79!}{79! \cdot 2 \cdot 4} = 810$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} ; \begin{cases} -3 \leq x+3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq x-y \leq 1 \quad | \cdot 2 & \quad -2 \leq 2x-2y \leq 2 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \quad | \cdot 2 & \quad -2 \leq 6x-2y \leq 2 \end{aligned}$$

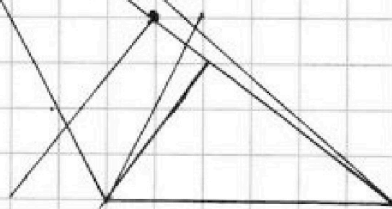
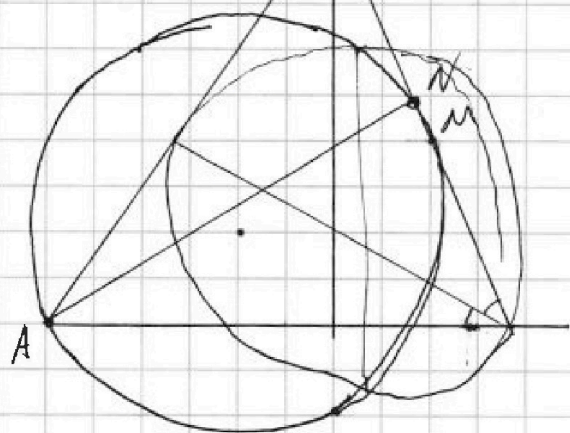
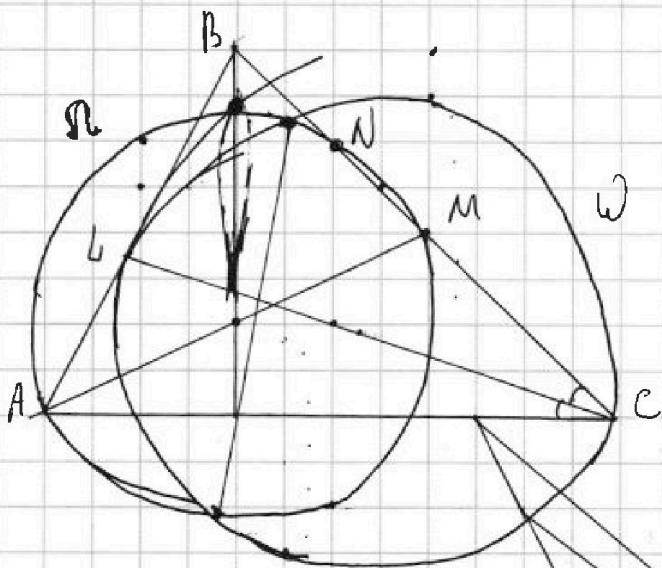
$$8x-4y \leq 4$$

$$3y-3 \leq x \leq 3y+3$$

$$3x-3 \leq y \leq 3x+3$$

$$3y-3 \leq 9x \leq 3y+3$$

$$\begin{aligned} x &\leq \frac{3y+3}{9} \\ y &\leq \frac{3x+3}{3} \end{aligned}$$



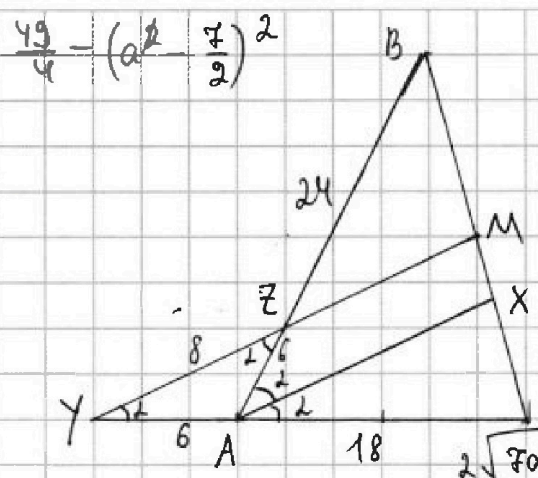


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{64 + 36 - 36}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$$

По м. косинусов:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$= 900 + 324 + 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} =$$

$$= 900 + 324 + 120 = 6 \cdot 224 =$$

$$= 12 \cdot 112 =$$

$$= 24 \cdot 56 =$$

$$= 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7$$

$$2\sqrt{7a - a^2} - 5$$

$$7a - a^2 \leq \frac{49}{4}$$

$$a^2 - 7a + \frac{49}{4} \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 = 2\sqrt{a(7-a)}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$7 - 2\sqrt{a(7-a)} = 4a(7-a)$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$-10\sqrt{a(7-a)} + 25$$

$$(x^2 + y^2)(x-y)(x+y) + 5(x-y)(x+y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})((x^2 + y^2 + 5)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1) = 0$$

$$x = y \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 =$$

$$= 2\sqrt{a(7-a)}$$

$$\sqrt{a+5} = \sqrt{7-a}(2\sqrt{a+1})$$

$$a+10\sqrt{a}+25 =$$

$$(7-a)(4a+4\sqrt{a}+1)$$

$$a - b + 5 = 2ab; \quad 5 = b - 2ab - a$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{6-x}(2\sqrt{x+1} + 1)$$

$$4a^2 + 4a\sqrt{a} - 26a - 18\sqrt{a} + 18 = 0$$

$$x+1 + 5\sqrt{x+1} + 25 = (6-x)(4x+4 + 4\sqrt{x+1} + 1)$$

$$2x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 18x + 9 = 0$$

$$2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 + 27 + 9$$

$$4 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 - 3^2$$