



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_3 = 3x + 3 \\ a_5 = (x^2 + 2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases}$$

$d$  - разность этой прогрессии

$$a_9 - a_3 = 6d = (9-3)d = 3x^2 - 3x + 3$$

$$6d = 3x^2 - 3x + 3$$

$$d = \frac{1}{2}(x^2 - x - 1)$$

$$a_5 = a_3 + 2d = (x^2 + 2x)^2$$

$$3x + 3 + x^2 - x - 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x^4 + 4x^3) + (3x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(x+1)(x^2(x+1) + 2x(x+1) - 2(x+1)) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4.3$$

$\Leftrightarrow$

$$x = -1$$

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

Ответ:  $x_1 = -1$ ,  $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$



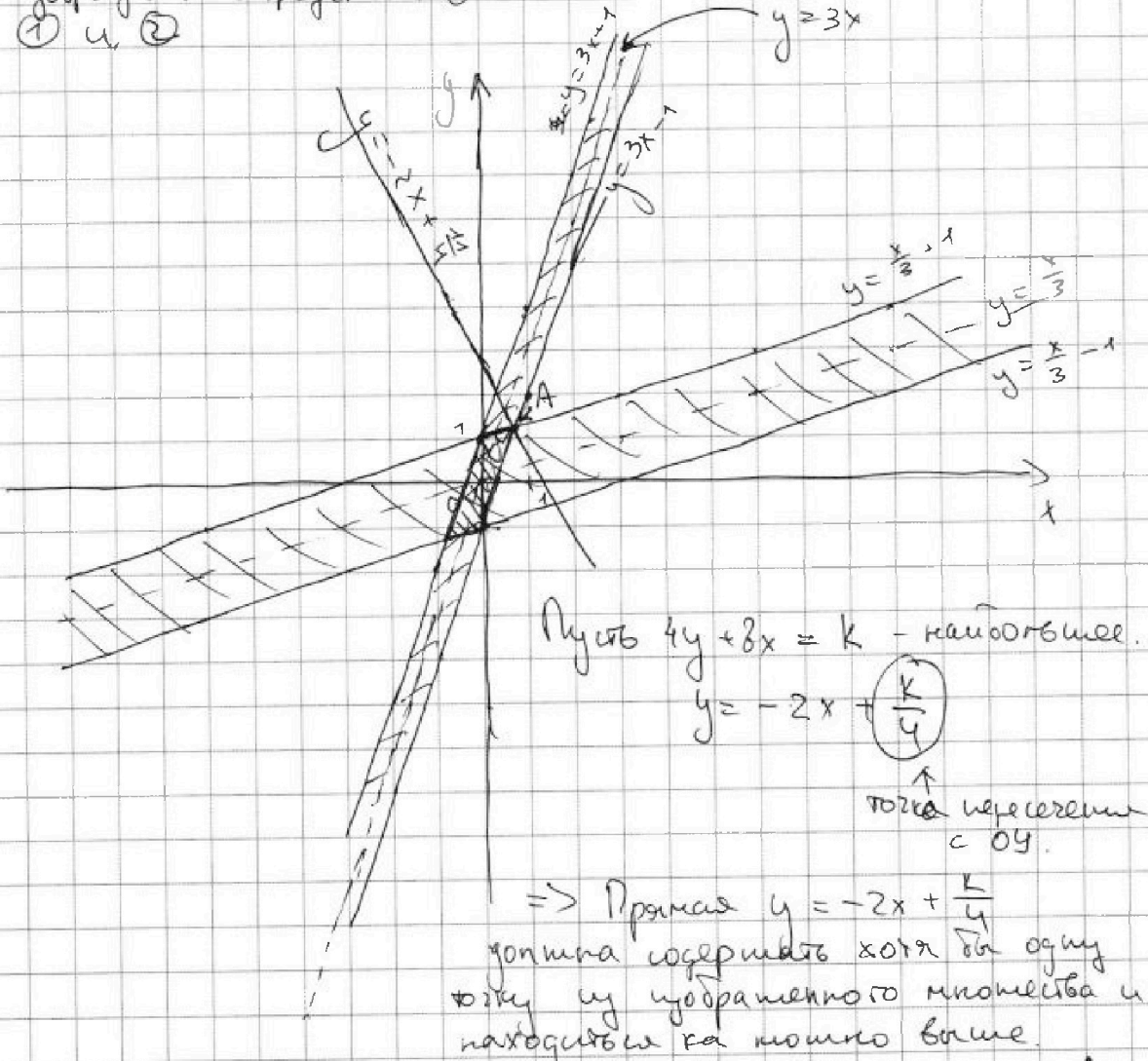
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Печать QR-кода недопустима!

Изобразим определенные нами множества точек  
① и ②



Так будет, если прямая будет проходить через точку А

$$\begin{cases} y = \frac{x}{3} + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \frac{x}{3} + 1 = 3x - 1$$

$$2 = \frac{8}{3}x \quad \&$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

удал  $\frac{5}{4} = -2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{k}{4}$   
 $5 = -6 + k$   
 $k = 11$

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\max (4y + 8x)$$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 & (1) \\ |3x - y| \leq 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x - 3y \geq 0$$

$$y \leq \frac{x}{3}$$

или

$$x - 3y \leq 0$$

$$y \geq \frac{x}{3}$$

$$x - 3y \leq 3$$

$$3y - x \leq 3$$

$$y \geq \frac{x}{3} - 1$$

$$y \leq 1 + \frac{x}{3}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{x}{3} \\ y \leq 1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq \frac{x}{3} - 1 \\ y > \frac{x}{3} \\ y \leq 1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$(2) \quad 3x - y \geq 0$$

$$y \leq 3x$$

или

$$3x - y < 0$$

$$y > 3x$$

$$3x - y \leq 1$$

$$y - 3x \leq 1$$

$$y \geq 3x - 1$$

$$y \leq 3x + 1$$

$$\begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq 3x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 3x \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq 3x - 1 \\ y > 3x \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 5m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

① Пусть  $A = 75q^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$   
 $(m+n-9)(m+n) = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2 \div 3$

Пусть так

Если  $(m+n) : 3$ , то  $(m+n-9) : 3$  (т.к.  $9 : 3$ )  
 Если  $(m+n-9) : 3$ , то  $(m+n) : 3$

~~то~~ (т.к. т.к.  $(m+n-9)(m+n) : 3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) : 9$

$\Rightarrow 9 : 3$ ,  $9 = 3$ , тогда  $(m+n-9)(m+n) : 27$ .

То есть хотя бы одна из скобок кратна 9.

Если  $(m+n) : 9$ , то  $(m+n-9) : 9$  (т.к.  $9 : 9$ )

Если  $(m+n-9) : 9$ , то  $(m+n) : 9$

$\Rightarrow (m+n)(m+n-9) : 81$ , но  $9^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 5^2 \div 81$

— противоречие.

② Пусть  $A = 13p^2$ .

$9$  — нечетное число  $\Rightarrow$  при добавлении его к  $(m+n)$  четность меняется  $\Rightarrow$  либо  $(m+n) : 2$ , либо  $(m+n-9) : 2$ .

$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 \div 2 \Rightarrow p : 2 \Rightarrow p = 2$ .

~~$m+n-9 = m+n$~~

Переберем все делители  $13 \cdot 2^4$ , ~~тогда будет ясно, что  $m+n$  или~~

1)  $m+n-9 = 1 \Rightarrow m+n = 10$

~~$m+n = 10$~~ .  $1 \cdot 10 \neq 13 \cdot 4$ . — не подходит

2)  $m+n-9 = 2 \Rightarrow m+n = 11$ .

$2 \cdot 11 \neq 13 \cdot 4$ . — не подходит

3)  $m+n-9 = 4 \Rightarrow m+n = 13$

$4 \cdot 13 = 13 \cdot 4$  — подходит

4)  $m+n-9 = 13 \cdot 2 = 26 \Rightarrow m+n = 35$

$35 \cdot 26 \neq 13 \cdot 4$ . — не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \quad m+n-5 = 13 \cdot 4 \quad m+n = (13 \cdot 4 + 5)$$

$$13 \cdot 4 * (13 \cdot 4 + 9) \neq 13 \cdot 4 \quad - \text{не подходит}$$

То есть нам подходит только вариант  $(m+n) = 13$

$$B = 75q^2 = mn(m+n-3) = mn(13-3) = 10mn : 2$$

$$\Rightarrow q \cdot 75q^2 : 2 \Rightarrow q : 2 \Rightarrow q = 2$$

$$75 \cdot 4 = 10mn$$

$$mn = 30$$

~~$m+n=13$   
 $mn=30$   
 $m=13-n$   
 $(13-n)n=30$   
 $n^2-13n+30=0$~~

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases} \quad \begin{cases} m=13-n \\ (13-n)n=30 \end{cases}$$

$$13n - n^2 - 30 = 0$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 30 = 169 - 120 = 49$$

$$n_1 = \frac{13-7}{2} = 3$$

$$m_1 = 10$$

$$n_2 = \frac{13+7}{2} = 10$$

$$m_2 = 3$$

Ответ:  $(10; 3) (3; 10)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle YZA = \angle ZYA$  а (к.т.к.  $YM \parallel AX$  и  $AX$ -диссектр)  
 $(\angle AZY = \angle ZAX = z - \text{верт}, \angle ZYA = \angle XAC = \text{соотв}, \angle BAX = \angle XAC - \text{т.к. } AX - \text{диссектр})$   
 $\Rightarrow \triangle YAZ - \text{р/д} \Rightarrow YA = AZ = x = 6$

$$BZ = (k+1)AZ = (k+1)x$$

M (к.т.к.)

$$\Rightarrow k = \frac{AC}{BY} = \frac{18}{6} = 3$$

T. меншая гна  $\triangle CYM$ ,  $AB$ -сек.

$$\text{т.к. } k = \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$\text{т.к. } 3 \cdot \frac{6}{2M} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{6}{2M} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2M} = 1$$

$$2M = 12 \Rightarrow YM = ZM + AZ = 20$$

$$\frac{YM}{AX} = \frac{CY}{AC} \Rightarrow AX = \frac{18 \cdot 20}{18 + 6} = \frac{40 \cdot 3 \cdot 20}{4} = 15$$

$$\text{т.к. } \frac{AX}{ZM} = \frac{AB}{BM} \Rightarrow \frac{BM}{BM} = \frac{AB}{AB - AZ} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

$$BX = \frac{15}{20} \cdot \text{т.к. } BM = \frac{3}{4} BM \quad \left| \quad AB = \frac{4}{3} AB - \frac{4}{3} \cdot 6 =$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Rightarrow XC = \frac{3}{4} BX \quad \left| \quad \text{т.к. } AB = AC = 24$$

$$\text{т.к. } \frac{BX}{XC} = \frac{4}{3} \Rightarrow BX + XC = BC \Rightarrow \frac{7}{4} BX = BC \Rightarrow BC =$$

$$\Rightarrow BX = \frac{4}{7} BC$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} YZ}{AZ} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$BX = \sqrt{AY^2 + AB^2 - 2 \cdot AY \cdot AB \cdot \cos \alpha} = \sqrt{25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{61 - 40} = 3 \cdot \sqrt{21}$$

$$BC = \frac{7}{4} \cdot BX = \frac{7 \cdot 3 \sqrt{21}}{4} = \frac{21 \sqrt{21}}{4} \quad \text{Ответ: } \frac{21 \sqrt{21}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BZ}{\left(\frac{1}{k+1} + 1\right)BZ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{AC}{AB}} \cdot BC} = \frac{1+d}{2} = \frac{2M}{AX}$$

$$\frac{EM}{\frac{1}{k+1} + 1} = \frac{1+d}{2}$$

$$d = \frac{2}{\frac{1}{k+1} + 1} - 1 = \frac{AC}{AB}$$

$$2M = \frac{(1+d)AX}{2}$$

$$AX = \frac{2 \cdot 2M}{1+d}$$

Т. Меленко  $g_{AB} \triangle EYM$  и сек.  $AB$ .

$$\frac{AC}{AY} \cdot \frac{YZ}{2M} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$k = \frac{4YZ}{2M} \cdot \frac{\frac{1}{2}BC}{BC} = 1$$

$$k \cdot \frac{YZ}{2M} = 2$$

$$2M = k \cdot \frac{YZ}{2} = 4k$$

$$AX = \frac{8k}{1+d}$$

$$\frac{YM}{AX} = \frac{YC}{AC}$$

$$\frac{YZ + 4k}{8k} = \frac{1+k}{k}$$

$$8 + 4k = \frac{8k(1+k)}{(1+d)k} = \frac{8(1+k)}{1+d}$$

$$8 + 4k = \frac{8(1+k)}{1 + \frac{2}{\frac{1}{k+1} + 1} - 1} = \frac{4(1+k)}{\frac{1}{\frac{1}{k+1} + 1}} = 4(1+k) \left( \frac{1}{k+1} + 1 \right)$$

$$8 + 4k = 4(1 + 1 + k) \quad k = k$$



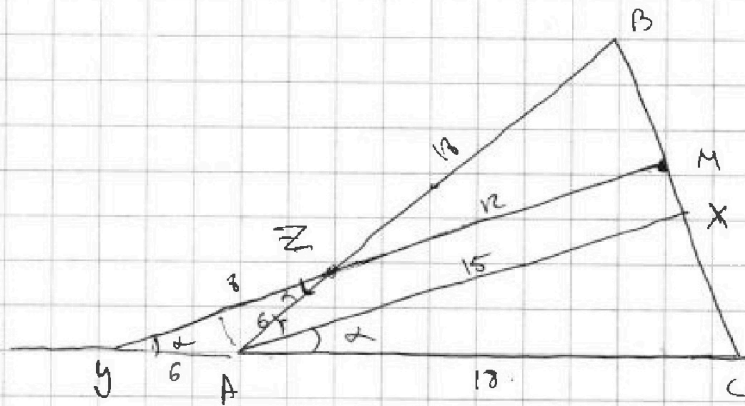


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC = 18  
AZ = 6  
YZ = 8

Пусть  $\frac{AC}{AY} = k$ .

$YM \parallel AX \Rightarrow \frac{AC}{AY} = \frac{CX}{MX} = k$  — по т. Фалеса.

$\begin{cases} CX + MX = CM = \frac{1}{2} BC \\ CX = k \cdot MX \end{cases} \Rightarrow (k+1)MX = \frac{1}{2} BC = BM$   
 $BC = 2(k+1)MX$ .

Всн  $\frac{BM}{MX} = \frac{BZ}{AZ}$  — по т. Фалеса

$\frac{1}{2} BC (k+1)MX = \frac{BZ}{AZ}$

$BZ = (k+1)AZ$ .  $AB = BZ + AZ = (k+2)AZ =$   
 $AC = kAY$   $AC = kAY$ .  $= \left(\frac{1}{k+1} + 1\right) BZ$ .

$YC = AC + AY = (1+k)AY = \frac{1+k}{k} AC$ .

$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$  — по св-ву двух пересекающихся

$BX = \frac{AB}{AC} \cdot XC$   $XC = \frac{AC}{AB} \cdot BX = \frac{1}{k} \cdot BC$ .

$k \cdot BX + XC = \left(1 + \frac{AC}{AB}\right) BX = BC \Rightarrow BX = \frac{1}{1 + \frac{AC}{AB}} BC = \frac{AB}{AB+AC} BC$

$\triangle ZBM \sim \triangle BXZ$  ( $ZM \parallel AX$ )  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{ZM}{AX} = \frac{AB}{BZ} = \frac{ZB}{AB} = \frac{BM}{BX}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} - y^4 + \sqrt{x} + 5y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) (x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0.$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$1) \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad x \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5.$$

$$x+1 + 6-x - 2\sqrt{x+1}\sqrt{6-x} = 4(6+5x-x^2) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{-x^2+5x+6} = 4(6+5x-x^2) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25.$$

$$\begin{matrix} t \\ t \geq 0 \end{matrix}$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 9 = 81 - 36 = 45 = 9 \cdot 5$$

$$t_1 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{4}$$

$$t_2 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{4}$$

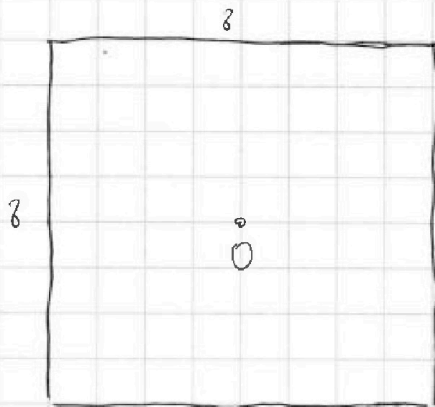


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов в каждом ряду - 9  
в каждом столбце - 9  
⇒ Всего  $9 \cdot 9 = 81$  узлов.

Не считая раскраски, поугатонущей друг у друга поворотом одинаковыми поминим это всего раскрасок:  
 $\frac{81 \cdot 80}{2} = 40 \cdot 81$  раскрасок.

\*<sup>3</sup> Здесь каждая раскраска симметрична относительно центра поугатонущая 2 раза (т.к. при повороте на  $180^\circ$  она переходит сама в себя), а несимметричная - 4 раза (т.к. при повороте квадрата должен перейти в себя, то его можно повернуть на  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ$ )

Для каждого узла, кроме центрального (точка 0) можно построить раскраску симметричную относительно центра и при этом только одну (точка 0 переходит при симметрии в себя)

Всего точек поугатонущая  $\frac{80 \cdot (81-1)}{2} = 40$  симметричных раскрасок (делим на 2, т.к. каждую раскраску считаем дважды: относительно точки и симметричной ей).

Пусть у нас а несимметричных раскрасок.  
⇒  $4a + 2 \cdot 40 = 40 \cdot 81$  - по утверждению \*  
↑ кол-во симметричных раскрасок    ↑ все раскраски (не учитывая поворот)

$$4a + 80 = 3240$$

$$4a = 3160$$

Всего раскрасок:  $a + 40 = 790 + 40 = 830$

Ответ: 830.

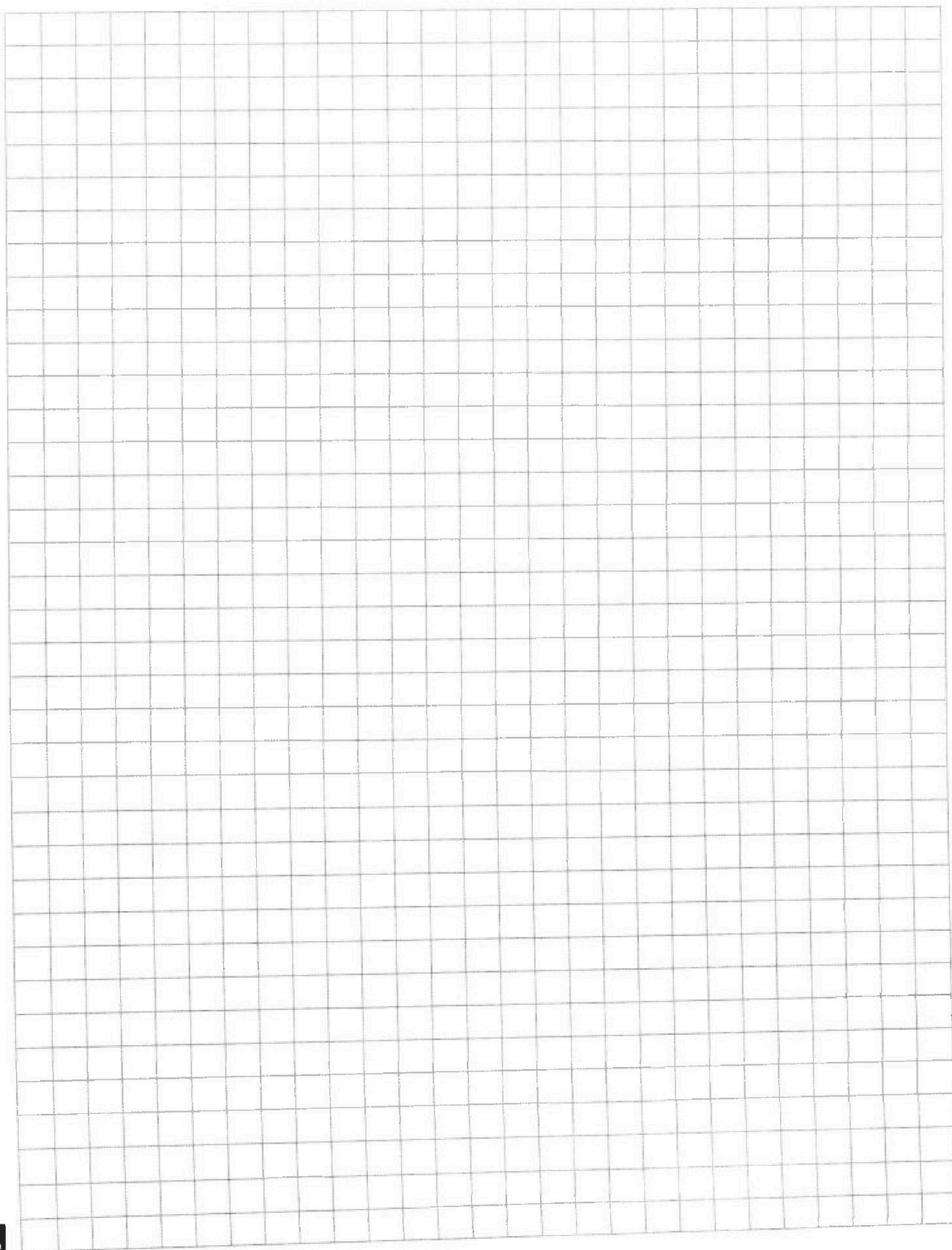


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





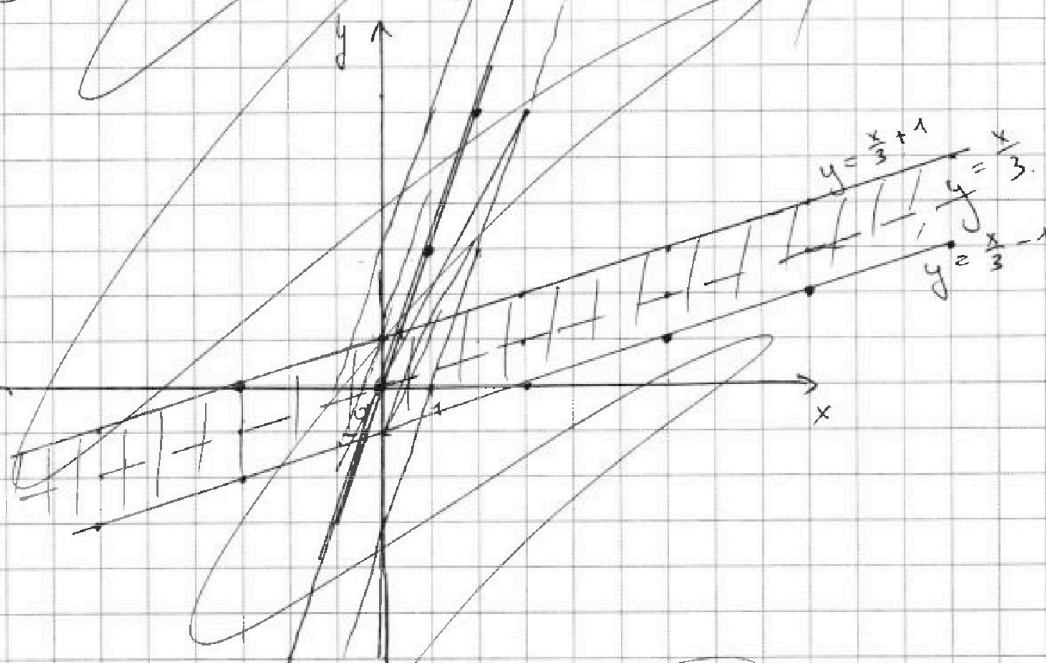
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нарисовать изображения определенных пар из множества точек  
① и ② и нарисовать их пересечения.



$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\frac{d}{a-d} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{b-k}{b} = \frac{1}{2} \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(c+y)z}{c(z+x)}$$

$$\frac{b-k}{k} = \frac{y}{c+y} = 1$$

$$\frac{1}{2} \frac{a}{d} = \frac{b-k}{k} = \frac{c}{c+y} \cdot \frac{x}{z} = \frac{2}{4} = 2$$

c - узл.  
k - узл.  
x - узл.

$$\frac{e}{z+x} = \frac{c}{c+y}$$

$$e = \frac{c(z+x)}{c+y}$$

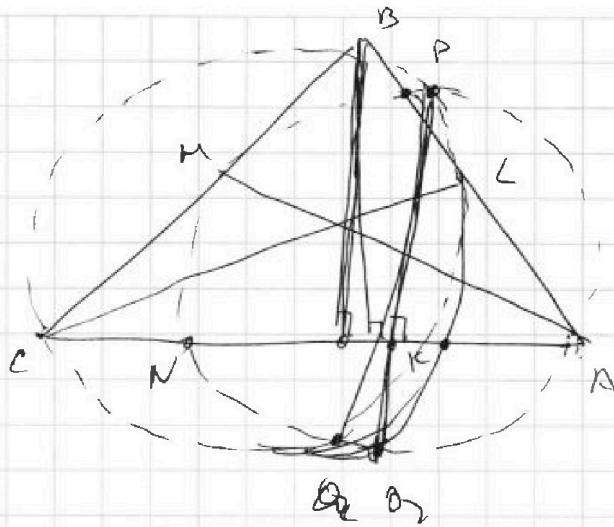


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

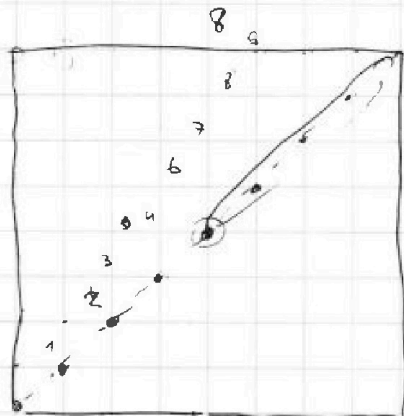
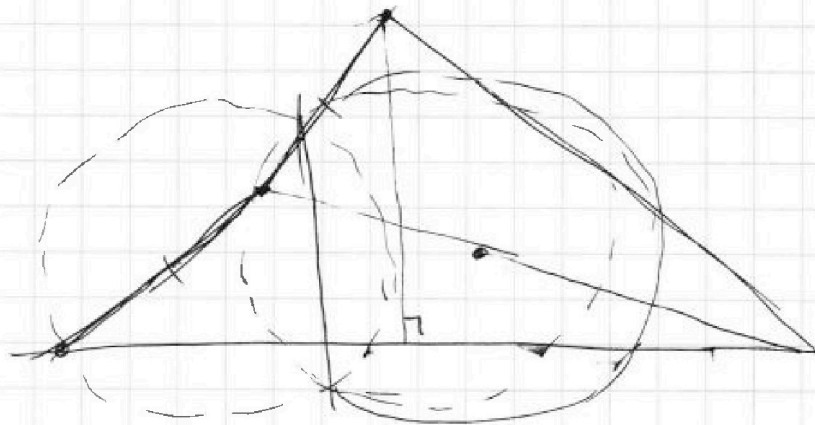
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AM = 8$   
 $AB = 10$   
 ~~$PK = AK = \frac{1}{2} AM = 4$~~



81 yjwob

$$\frac{81 \cdot 80}{2} = 40 \cdot 81$$

~~10 \cdot 81~~

8

$$4 + 5 + 8 + 7$$

$$\frac{(1+9) \cdot 10 + 9}{2} - 5 = \boxed{40}$$

$$810 \quad \frac{40 \cdot 81 + 40 \cdot 2}{4} = 810 + 20 = \boxed{830}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{6-y} = +5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 - 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases} \quad 5x+5+6y-y^2$$

$$x^2(x^2-5) \quad x^4 - y^4 - 5x^2 + 5y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(x^2+y^2)(x^2-y^2) - 5(x^2-y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2+y^2)(x^2-y^2-5) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-1-y^2+6}{(x^2-1)(y^2-6)} \quad x \geq -1 \quad y \leq 6 \\ & -xy + 6x - y + 6. \quad 0 \leq x^2+y^2 \leq \infty \end{aligned}$$

$$(x^2-y^2)(x^2+y^2) - 5(x^2-y^2)(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) - 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

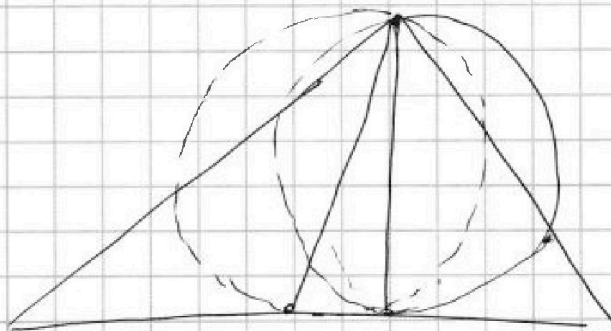
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) - 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2-5) = -1$$

$$x \geq -1 \quad 6+5x-y^2 \geq 0 \quad (6-y)(6+y)+5x \geq 0$$

$$5x \geq y^2 - 6 \geq -6$$

$$5x+1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 3$$

$$d = \frac{a_5 - a_3}{6} = \frac{3x^2 - 3x + 3}{6} = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_5 = a_3 + 2d$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_9 = a_5 + 4d$$

$$a \cdot (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$3x^2 = (x^2 + 2x)^2 + 4d$$

$$3x^2 - 4d = 3x + 3 + 2d$$

$$3x^2 - 3x - (3d + 2d) = 0$$

$$D = 9x^2 + 12(3 + 2d) = 9x^2 + 24d + 36$$

$$a_5 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^2 + 2x + 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$1 \quad -4 \quad +3 \quad +2 \quad -2$$

$$x = -1$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad (x+1) \\ x^3 + x^2 \\ \hline 2x^2 + 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x \\ -2x - 2 \\ \hline -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$D = 4 + 8 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ x^4 + x^3 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \\ 3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 3$$

$$-1 \pm \sqrt{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\max (4y + 8x) - ?$$

$$4y + 8x = m$$

$$y = -\frac{8x}{4} + \frac{m}{4} = -2x + \frac{m}{4}$$

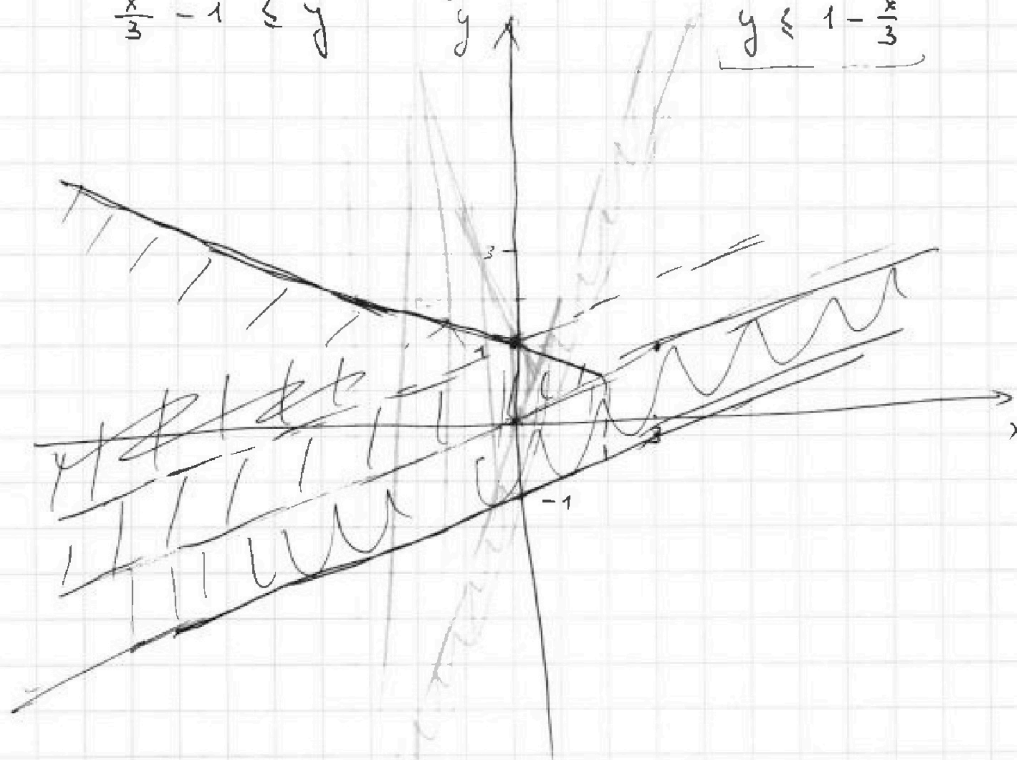
$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 & \textcircled{1} \\ |3x - y| \leq 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x \geq 3y \Rightarrow y \leq \frac{x}{3}$$

$$x \leq 3y \quad y \geq \frac{x}{3}$$

$$\frac{x}{3} - 1 \leq y$$

$$y \leq 1 - \frac{x}{3}$$



$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 3x \geq y \\ y \geq 3x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \leq y \\ y \leq 1 - 3x \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$p, q \in \mathbb{N}, \text{ простое}$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

$$6n \quad 45$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) = \underbrace{(m+n-9)}_{p} \underbrace{(m+n)}_{q} = 13p^2$$

①  $9: p, q \quad p=3 \quad m+n=10$

~~$m+n=9=3$~~   $m+n-9=3$   
 $m+n=12$

②  $(m+n)q = 13$   
 $(m+n) - 9 = 4$   
 $m+n = 13$   $p=2$

$$B = mn(m+n-3) =$$

$$A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2 = 5^2 \cdot 3 \cdot q^2 = 5^2 \cdot 3^3 \quad X$$

$q=3$

$$B = mn(13-3) = 10mn = 5^2 \cdot 3 \cdot q^2$$

$$mn \cdot 10 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$mn = 5 \cdot 3 \cdot 2$$

1	30
2	15
3	10
5	6
15	2
10	3
6	5
30	1

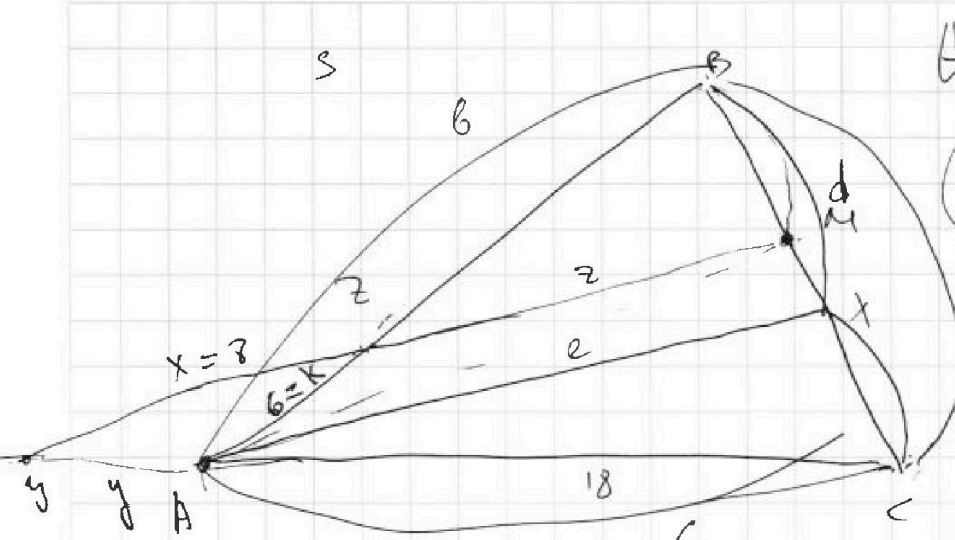


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{18}{a} = S_{ABC}$$

$$\frac{AB}{18} = \frac{S_{ABX}}{S_{ABC} - S_{ABX} - S_{BXM} - S_{AMX}}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC} = \frac{BX}{a - BX}$$

$$\frac{AB}{18} = \frac{BX}{a - BX}$$

$$\frac{BM}{MC} = 1$$

$$AB \cdot a - BX \cdot AB = BX \cdot 18$$

$$AB \cdot a = BX \cdot (AB + 18)$$

$$\frac{AB \cdot a}{AB + 18} = BX$$

$$BM = \frac{1}{2} a$$

$$\frac{MX}{\frac{1}{2} a} = \frac{BZ}{6}$$

$$\frac{BM}{BX} = \frac{BZ}{AB}$$

$$\frac{AB}{BX} = \frac{BZ}{BM} = \frac{AB \cdot (AB + 18)}{AB \cdot a} = \frac{AB \cdot AB - 6}{\frac{1}{2} a}$$

$$\frac{1}{2} a (AB + 18) = AB - 6$$

$$\frac{1}{2} a \cdot AB + 9a = AB - 6$$

$$AB = \frac{9a + 6}{1 - \frac{1}{2} a}$$

$$\frac{AC}{CY} = \frac{CX}{CM}$$

$$\frac{BM}{MZ} = \frac{AX}{AZ}$$

$$\frac{AX}{BM} = \frac{BX}{CM}$$

$$\frac{MC \cdot BZ}{CY \cdot BM} = \frac{BC}{AC}$$

$$BZ \cdot \frac{MC}{BM} = \frac{BZ}{6} \cdot \frac{AY}{18 + AY} = 1 - \frac{BAC \cdot ZM}{CY \cdot AX} = \frac{12}{AB}$$

$$\frac{18}{AY} \cdot \frac{8}{ZM} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$