



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 12 - 12x = a_1 + b \quad ; \quad a_1 - \text{первый член прогрессии, } b - \text{шаг прогрессии}$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3b$$

$$a_8 = -6x^2 = a_1 + 7b$$

$$2((x^2 + 4x)(x^2 + 4x) - (12 - 12x)) = -6x^2 - (x^2 + 4x)(x^2 + 4x)$$

$$2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 16x^2 + 12x - 12) = -6x^2 - (x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$2(x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12) = -6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2$$

$$2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 + 6x^2 + x^4 + 8x^3 + 16x^2 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

Проверим угадывая корни $x_1, x_2 = -2 \Rightarrow$ ~~$x^4 - 2^4 + 18 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 8 = 0$~~
 $-64 + 72 - 8 = 0$ — подходит

Проверим угадывая корни $x_2, x_2 = -4 \Rightarrow$ ~~$4^4 - 8 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 8 = 0$~~
 $-(4^4) + 18 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 8 = 0$
 $4^2(18 - 16) - 40$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 & x + 2 \\ \hline x^4 + 2x^3 & \\ \hline 6x^3 + 18x^2 & \\ 6x^3 + 12x^2 & \\ \hline 6x^2 + 8x & \\ -6x^2 + 12x & \\ \hline -4x - 8 & \end{array}$$

Итого: $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 8)$; $x^3 + 6x^2 + 6x - 8 = (x + 2)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 6x - 8 & x + 2 \\ \hline x^3 + 2x^2 & \\ \hline 4x^2 + 6x & \\ 4x^2 + 8x & \\ \hline -2x - 4 & \end{array}$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x + 2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 = 24 = 4 \cdot 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 8x - 8 = (x+2)^2(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6}) = 0$$

и $(x^2 + 4x + 4) \cdot (-6x^2)$ — корни отрицательны.

Ответ: $\begin{cases} x = -2 \\ x = -2 - \sqrt{6} \\ x = -2 + \sqrt{6} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

$$10x + 5y - 8(3x - 2y) - 4(2x - 3y)$$

Максимальное значение $10x + 5y$ достигается при минимальном значении $(3x - 2y)$ и максимальном значении $(2x - 3y)$,

$$\text{т.е. } 3x - 2y = -4, \quad 2x - 3y = 6$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = -8 \\ 6x - 9y = 18 \end{cases} \quad \text{ЭВЭЭ - система разрешима,}$$

$$\text{значит } \min(10x + 5y) = 8 \cdot (-4) - 4 \cdot 6 = -32 - 24 = -56$$

Отв: -56



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Случай 2:

$$\begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 15q^2 \\ m(m-2n-2) = r^2 \end{cases}$$

Аналогично случаю 1: $q^2 = 1$ тогда q — либо равно только 2, тогда

$$(m-2n)(m-2n+13) = 60, \quad \exists a = m-2n, \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$a(a+13) = 60 \Rightarrow a^2 + 13a - 60 = 0$$

$$a^2 + 13a - 60 = 0$$

$$D = 169 + 4 \cdot 60 = 409 - \text{не квадрат}$$

$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} - \text{не целые} \Rightarrow \emptyset$$

Ответ: $(+0; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: AX - биссектриса, M - середина BC , $NZ \parallel AX$, $X = ABCMZX$

$$AC = 18, AZ = 6, XZ = 2$$

Найти: BC

Решение: $\triangle AXC \sim \triangle ZMC$ (2 угла)
 $\Rightarrow ZC = AC - AZ = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ZC}{AC} = \frac{MC}{CX} = \frac{2}{3} \Rightarrow X - \text{середина } BM, \text{ т.е. } BX = XC$$

по св-ву биссектрисы: $\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 3$

$$\Rightarrow AB = 6$$

$\triangle ABX \sim \triangle XBM$ (3 угла)

$$\frac{BM}{BX} = \frac{BX}{AB} = \frac{XM}{AX} = 2 \Rightarrow BX = 12 \Rightarrow AX = 6$$

$\Rightarrow \triangle XAZ$ равнобедрен $\Rightarrow \angle MZC = \angle AZX = \angle AXZ$

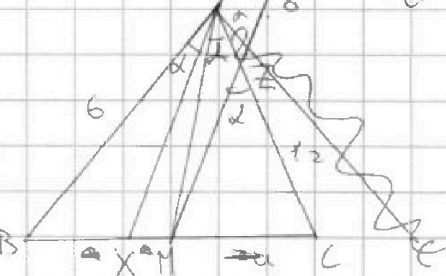
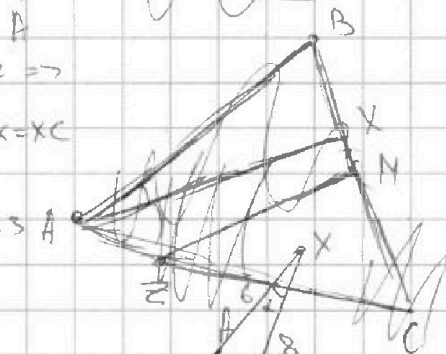
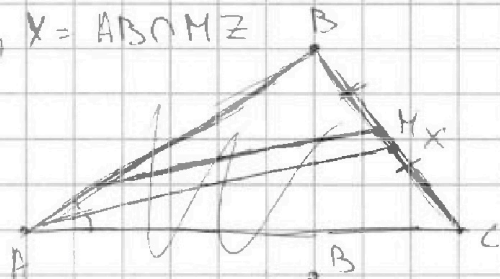
$$\Rightarrow \text{по косинусов в } \triangle AXZ: 8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cos(180 - 2\alpha)$$

$$64 = 72 - 72 \cos(180 - 2\alpha); \quad 8 = 72 \cos(180 - 2\alpha); \quad \cos(180 - 2\alpha) = \frac{1}{9}$$

тогда по кос в $\triangle ABC: a^2 = 6^2 + 18^2 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \cos 2\alpha$

$$a^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 360 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 360 + 24 = 384$$

$$BC = a = \sqrt{384}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + y^2 \end{cases} \quad \left| \quad x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3 \right.$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$$

$$2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 + \sqrt{3x} - \sqrt{3y} = 0$$

$$2(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + 4(x-y)(x+y) + \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

Допустим, $x > y$, тогда знаки всех слагаемых "+", равенство не и.о.в. выходящим, если же $x < y$, то знаки всех слагаемых "-", равенство тоже не и.о.в. выходящим, тогда остается, $x = y \geq 0$

~~$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2}$$~~

~~$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = \sqrt{(x+4)(3-x)} \cdot 2$$~~

~~$$5 = \sqrt{(x+4)(3-x)} - \sqrt{x+4} + \sqrt{(x+4)(3-x)} + \sqrt{3-x}$$~~

~~$$\text{Ид } a = \sqrt{x+4}; b = \sqrt{3-x}, a \geq 0, b \geq 0$$~~

~~$$a - b + 5 = 2ab; a - b + 5 - 2ab = 0$$~~

~~$$a(1-2b) - b + 5 = 0 = a(1-2b) + (0,5-b) + 4,5 = 0$$~~

~~$$(a+0,5)(1-2b) + 4,5 = 0$$~~

~~$$(2a+1)(1-2b) = -9, \quad 2a+1 = \frac{9}{2b-1}, \quad 2a = \frac{9}{2b-1} - 1 = \frac{9-2b+1}{2b-1}$$~~

~~$$2a = \frac{10-2b}{2b-1} \Rightarrow a = \frac{5-b}{2b-1}$$~~

~~$$\sqrt{x+4} = \frac{5-\sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}-1}$$~~

~~$$(2\sqrt{3-x}-1)\sqrt{x+4} = 5-\sqrt{3-x}; \sqrt{3-x} + \frac{1}{2}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2\sqrt{3-x} - 1)\sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{3-x}$$

$$(x+4)(4(3-x) - 4\sqrt{3-x} + 1) = 3-x - 10\sqrt{3-x} + 25$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2} + \sqrt{3-x}$$

$$x+4 + 10\sqrt{x+4} + 25 = 4x - 2x - 2x^2 + 4(3-x)\sqrt{x+4} + 3-x$$

$$10\sqrt{x+4} + x+29 = 2x - 2x^2 + 4(3-x)\sqrt{x+4}$$

$$10\sqrt{x+4} + 2 = -2x^2 - 4x + 4(3-x)\sqrt{x+4}$$

$$5\sqrt{x+4} + 1 = -x^2 - 2x + 2(3-x)\sqrt{x+4}$$

$$5\sqrt{x+4} - 2(3-x)\sqrt{x+4} = -(x+1)^2$$

$$5\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+4}(3-x)$$

$$5(2+4) - 20(3-x)(2+4) + 4(3-x)^2(2+4) = (x+1)^4$$

$$5x+20 - 20(6x+12-x^2-4x) + 4(x^3-2x^2-6x^2-24x+9x+36) = (x+1)^4$$

$$5x+20 + 20(x^2+x-12) + 4(x^3-2x^2-15x+36) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$5x+20 + 20x^2 + 20x - 240 + 4x^3 - 8x^2 - 60x + 144 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$4x^3 + 12x^2 - 35x - 46 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$6x^2 - 23x - 47 = x^4 - x^4 - 6x^2 + 31x + 47 = 0$$

$$\sqrt{x+4} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2} + \sqrt{3-x}$$

$$x+4 + 10\sqrt{x+4} + 25 = 4x - 4x - 4x^2 + 4(3-x)\sqrt{x+4} + 3-x$$

$$10\sqrt{x+4} - 4\sqrt{x+4}(3-x) + x+29 = 4x - 4x - 4x^2 + 3-x = 5 - 5x - 4x^2$$

$$10\sqrt{x+4} - 4\sqrt{x+4}(3-x) = -4x^2 - 6x - 22$$

$$5\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+4}(3-x) = -2x^2 - 6x - 11 = -(2x^2 + 6x + 11)$$

$$25(x+4) - 20(x+4)(3-x) + 4(x+4)(3-x)^2 = (2x^2 + 6x + 11)^2$$

$$25x+100 + 20(x^2+x-12) + 4(x^3-2x^2-15x+36) = 4x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 132x + 121$$

$$25x+100 + 20x^2 + 20x - 240 + 4x^3 - 8x^2 - 60x + 144 = 4x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 132x + 121$$

$$4x^3 + 12x^2 - 15x + 4 = 4x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 132x + 121$$

$$4x^4 - 20x^3 - 68x^2 + 144x + 117 = 0$$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2} = 2\sqrt{(1+x)(3-x)}$ при $x \uparrow$, левая часть \uparrow монотонно возрастает, правая монотонно убывает (на области $\text{sup-}x$)
 \Rightarrow ур-е имеет не более одного решения, найдем его:

при $x=0$: $2 - \sqrt{3} + 5 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$; $7 - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$; $7 = 5\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

В квадрате 4×4 , 64 узла сетки,

по свойству квадрата, он переходит себя

при осевом повороте на 90° , каждая сторона

соответствует конкретной позиции клетки цвет

клетки, следовательно положение квадрата при

осевом вращении - 4, если закрашенные клетки симметричны

от 90° осей симметрии квадрата, то у нас 2 различных положения

способов выбрать две разные клетки $64 \cdot 63$, способов "не брать"

4 - 2 различных положения $\frac{64-1}{2}$ - так первая клетка однозначно

задает вторую и $\frac{1}{2}$, так мы считаем пары $a \cdot b$ и $b \cdot a$, как разные

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 63}{2} = 4 + \frac{64}{2} : 2 = 16 \cdot 63 - \frac{1}{2} + 16 = 8 \cdot 63 + 16 = 520$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$m, n \in \mathbb{N}$; p, q — простые

$$\begin{cases} m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 14p^2 \\ m^2n - 2mn^2 - 2mn = 15q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 15q^2 \\ m^2n - 2mn^2 - 2mn = 14p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 14p^2 \\ mn(m-2n-2) = 15q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 15q^2 \\ mn(m-2n-2) = 14p^2 \end{cases}$$

~~Случай 1:~~

$$\begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 14p^2 \\ mn(m-2n-2) = 15q^2 \end{cases}$$

решим $(m-2n)(m-2n+13) = 14p^2$, посмотрим на скобки

$(m-2n)$ и $(m-2n+13)$, они разной четности, если $p \neq 2$, то

$14p^2 = 14 \cdot p \cdot p = \text{нечет} \cdot \text{нечет} \cdot \text{нечет} \Rightarrow$ все нечет множ. \Rightarrow

$(m-2n)$ и $(m-2n+13)$ не могут быть разной четности ~~$p=2$~~

\Rightarrow решим и при $p=2$, тогда:

$(m-2n)(m-2n+13) = 14 \cdot 4$, скобки разной четности и отличаются на 13, значит

$m-2n=4$; $m=2n+4$, подставим:

$$mn(m-2n-2) = (2n+4)n(2n+4-2n-2) = 15q^2$$

$2n(2n+4) = 15q^2$ $\Rightarrow 2n : 2$, $2n+4 : 2 \Rightarrow 15q^2 : 4 \Rightarrow q=3 \Rightarrow$

$2n(2n+4) = 15 \cdot 4 \Rightarrow n(n+2) = 15 \Rightarrow n=3$, $m=2n+4=10$