



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть (a_n) - арифметическая прогрессия; d - разность

$$\Rightarrow \frac{a_7 - a_5}{2} = d = \frac{a_{11} - a_5}{6} \Rightarrow \frac{(x^2 - 4x)^2 - (6x + 18)}{2} = \frac{-3x^2 - 4x + 18}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 4x)^2 = -3x^2 + 12x + 36 \Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 = -x^2 + 4x + 12$$

Заменим:
 $t = x^2 - 4x$ $t^2 = -t + 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 - 2\sqrt{7} \\ x = 3 - 2\sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: $-2 - \sqrt{7}$; $-2 + \sqrt{7}$; 2

~~Ван~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2. Заметим, что $|a|+|b| \geq ||a|+|b|| \geq |a+b|$ (м.к. ~~$|a|+|b|$~~)

$$\S \quad |a|+|b| \geq |a+b| \quad (\text{м.к. } \frac{|a|+|b|}{|a+b|})^2 = a^2+b^2+2|ab| \geq a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$$

2) ~~$|5a+6b|$~~ $|5|+|6|+2 \cdot 8 \leq 16 \leq |5(9a-39)| \cdot 2$

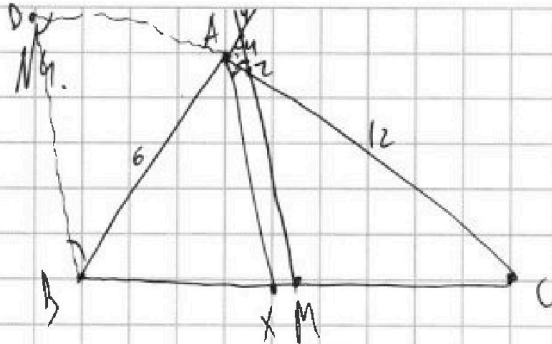


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $AX \parallel YM$, то $\angle XMY = \angle AYX$
как накрест лежащие, аналогично
 $\angle BAX = \angle BYM$ как \angle в Δ .
 \Rightarrow по признаку ΔYAZ \angle в Δ ,
 $AZ = AY$

Тогда по св-ву биссектрисы $\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{CA}$; т.к. $AX \parallel ZM$, то
по признаку $\Delta AXC \sim \Delta ZMC$ $\Rightarrow \frac{AC}{ZC} = \frac{AC}{AC - AZ} = \frac{CX}{CM} = \frac{CX}{\frac{1}{2}BC}$

$\Rightarrow \frac{12}{12-3} = \frac{CX}{\frac{1}{2}BC} \Rightarrow CX = \frac{2}{3}BC$ $\Rightarrow BX = \frac{1}{3}BC$; Т.к. $AX \parallel YM$,

то $\Delta BYM \sim \Delta BAX \Rightarrow \frac{AY}{AB} = \frac{BY}{BX} = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \frac{BY}{AB} = 1,5 \Rightarrow \frac{AB + AY}{AB} = \frac{AB + 3}{AB} = 1,5 \Rightarrow AB = 6$. Пусть $DE \parallel AC$

$BD \parallel AX$, $DE \parallel AC$. Тогда $BD \parallel YZ$ \Rightarrow по признаку $\Delta AYZ \sim \Delta ABD$

$\Rightarrow \frac{DB}{AZ} = \frac{AB}{AY} = \frac{DA}{AZ} \Rightarrow BA = 6; DB = 8$; по признаку (н.к.)

$DB \parallel AX$) $\Delta CDB \sim \Delta CAX \Rightarrow \frac{AX}{PB} = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{AC - AD} \Rightarrow \frac{AX}{8} = \frac{2}{3} \cdot 8 = 5\frac{1}{3}$

AX - биссектриса $\Rightarrow AX = \sqrt{AB \cdot AC - BX \cdot XC} = \sqrt{6 \cdot 12 - \frac{2}{3}BX^2} = 5\frac{1}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow A \quad BC^2 = \frac{4 \cdot 196}{2} = 196 \Rightarrow (BC > 0) BC = 14$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y+5} = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^2 + x - 5\sqrt{y} = 4y^2 - 5\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$$

(2) $4x^2 + x + 5\sqrt{x} = 4y^2 + y + 5\sqrt{y}$. Рассмотрим $f(t) = 4t^2 + t + 5\sqrt{t}$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

$f_1(t) = 4t^2$ - возрастает. $\Rightarrow f(t)$ - возрастает. \Rightarrow применим свое условие

$f_2(t) = t$ - возрастает. свое значение равно 1 раз \Rightarrow ~~тогда~~ если

$f_3(t) = 5\sqrt{t}$ - возрастает. $f(x) = f(y)$, но $x = y$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y+5} = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x+5} = 2\sqrt{30-x-x^2} & (1) \\ x = y \end{cases}$$

Замечая $\Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{x+6} \\ v = \sqrt{5-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v + 5 = 2uv \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2uv + v^2 + u - v = 6 \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u-v)(u+v+1) = 6 \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u-v)^2 + (u-v) + 6 = 0 \\ u^2 + v^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v = -3 \\ u-v = 2 \\ u+v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u-v+5 = 2uv \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u-v = -3 \\ 2 = 2uv \\ u-v = 2 \\ 7 = 2uv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v-3 \\ v + v^2 - 3v - 1 = 0 \\ u = v+2 \\ 2 + 2v^2 + 4v - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ v = -1 \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \sqrt{5-x} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ \sqrt{5-x} = -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20-4x = 22+6\sqrt{13} \\ 20-4x = 22+12\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1+3\sqrt{13}}{2}$; $-\frac{1+6\sqrt{2}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

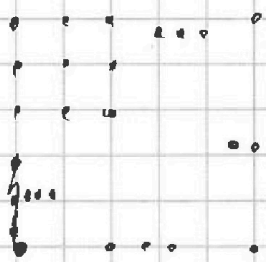


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№.



Всего 100 узлов, каждый из которых можно перекрасить белым цветом. Из каждой раскраски поворотом можно получить ровно 3 другие

и больше никакие (т.к. 4 поворота 90° возвращают в исходную раскраску).

При любой раскраске хотя бы 1 из вершин имеет своё положение, и если отслеживать её перемещение при поворотах, то она вернётся в исходную только через 4 поворота. Если вершины не стоят симметрично, то относительно центра вращения, то они вернутся в исходное состояние через 2 поворота.

Получаем,

$$100 \cdot \frac{99 \cdot 98}{4} + 100 \cdot \frac{98 \cdot 98}{2} = 100 \cdot \frac{98 \cdot 98}{2} + 100 \cdot \frac{1 \cdot 98}{2}$$

$$= \frac{100^2}{8} = 1250 \text{ раскрасок}$$

Ответ: 1250 по способу.

2 - не зависит от перво-входа вершин

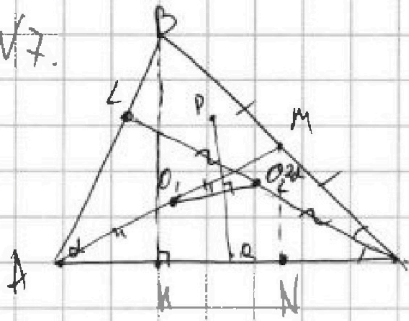


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7.



Пусть O_1 - центр $\triangle ABC$, а O_2 - центр $\triangle AHC$
 \Rightarrow по $O_1P = O_2Q$; $O_1P \perp AC$; $O_2Q \perp AC$ O_1, O_2 лежат на перпендикуляре к AC
 O_1 - середина AM (т.к. AM - диаметр ω)
 O_2 - середина LC (т.к. LC - диаметр ω')

$\Rightarrow O_1P = O_2Q$; $O_1P \perp AC$; $O_2Q \perp AC \Rightarrow$ по признаку $\triangle PO_1Q$; $\triangle PO_2Q$ - р/дг .

$\Rightarrow O_1$ и O_2 лежат на перпендикуляре к AC по две точки $\Rightarrow O_1O_2 \perp AC$.

П.к. $PQ \parallel BH$ (BH - высота), а $BH \perp AC$, то $O_1O_2 \parallel AC$.

Пусть $F = BH \cap O_1O_2$; $E = AC \cap O_1O_2$ по признаку O_1E - средняя линия в $\triangle ABC$, аналогично FO_2 - средняя линия в $\triangle AHC \Rightarrow$

т.к. $LM \parallel AC$ Пусть K_1, K_2, K_3, K_4 - основания высот из O_1, O_2 на AC .

П.к. $O_1K_1 \parallel MK_4 \parallel O_2K_2 \parallel LK_3$, т.к. $\frac{AO_1}{AK_1} = \frac{1}{2} = \frac{AO_2}{LK_3}$ по признаку $\triangle AO_1K_1 \sim \frac{1}{2} \triangle AMK_4$; $\triangle CO_2K_2 \sim \frac{1}{2} \triangle CLK_3 \Rightarrow LK_3 = 2O_2K_2$ т.к. $O_1O_2 \parallel AC$

$O_1K_1 = O_2K_2 \Rightarrow LK_3 = 2O_2K_2 = 2O_1K_1 = MK_4 \Rightarrow$ по признаку $LM \parallel AC \Rightarrow$ по признаку LM - средняя линия $\triangle ABC$ т.к. CL - медиана

и биссектриса $\Rightarrow \triangle ABC$ по признаку р/дг . ($BC = AC$). По св-ву н/по $\triangle AMK_4$; $O_1K_4 = AO_1 = O_1M \Rightarrow K_4$ лежит на $\Omega \Rightarrow K_4 = N$

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $AK = AB \sin \alpha$ | $BK \parallel MN$ | $\triangle BKC \sim \triangle MNC$

$\frac{BK}{MC} = \frac{CN}{CM} = 2$. т.к. CL - высота по св-ву р/дг $\triangle A$ $\angle A = \frac{1}{2} \angle B =$

$\Rightarrow AC \cos \alpha$; $CN = \frac{1}{2} (AC - AK) = \frac{1}{2} AC (1 - \cos \alpha)$ \Rightarrow ~~$AB = 2AC \cos \alpha$~~

~~$AB = 2AC \cos \alpha$~~ $\Rightarrow AN = AC (1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha})$ | $AB = 2AC$ | $AB = 2AC \cos \alpha$
 ~~$AN = AC (1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha})$~~ $\Rightarrow AB = AN = AC (1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha})$

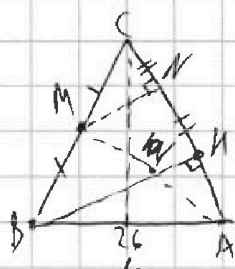
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AC = a = BC$; CL - высота и медиана

$\Rightarrow \triangle \triangle CLA$ - n/n ост.

$\triangle BNA \sim \triangle CLA$ по острым углам в n/n ост $\triangle \Rightarrow$ (з.А.одн.)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CL} = \frac{BA}{NA} = \frac{a}{13} \quad (\text{м.к. } CL = \frac{1}{2} BA = 13 \text{ м.к. } (L\text{-дегнание}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NA = \frac{26 \cdot 13}{a}. \quad \text{П.к. } \triangle CNB \sim \triangle CMN, \text{ но } CN = \frac{1}{2} CB =$$

$$= \frac{1}{2} (CA - NA) = \frac{1}{2} \left(a - \frac{26 \cdot 13}{a} \right); \quad AN = AC - CN = a - \frac{1}{2} \left(a - \frac{26 \cdot 13}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(a + \frac{26 \cdot 13}{a} \right) \Rightarrow a + \frac{26 \cdot 13}{a} = 40 \quad (\text{А} > 0) \Rightarrow a^2 - 40a + 26 \cdot 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 20 \pm \sqrt{400 - 338} = 20 \pm \sqrt{62}, \text{ но м.к. } AN = 20, \text{ а } N \text{ лежит на}$$

$$\text{отрезке } AC \Rightarrow a = 20 + \sqrt{62}$$

$$\text{Ответ: } 20 + \sqrt{62}.$$

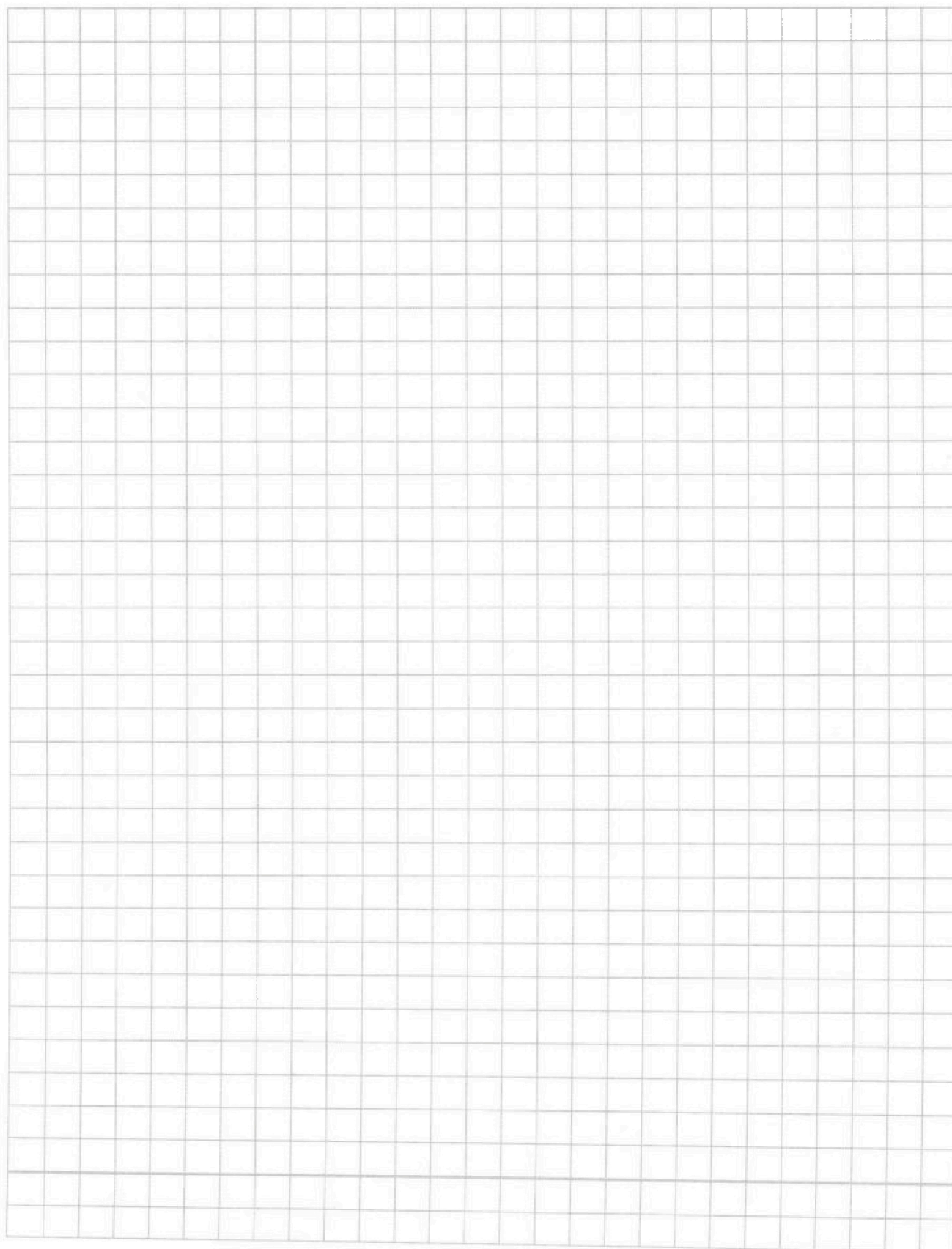


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$9(16x^2 + 9y^2) - 24xy \leq 36$
 $144x^2 + 81y^2 - 24xy \leq 36$
 $3(4x^2 + 9y^2 - 2xy) \leq 12$
 $4x^2 - 2xy + 9y^2 - 4 = 0$
 $(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 = d = -3x^2 - (6x + 18)$
 $3(x^2 - 4x)^2 - 18x - 54 = -3x^2 - 6x - 18$
 $3(x^2 - 4x)^2 = -3x^2 + 12x + 36$
 $3(x^2 - 4x)^2 = -3(x^2 - 4x - 12)$
 $t = x^2 - 4x \quad 3t^2 = -3(t - 12)$
 $t^2 + 3t - 12 = 0 \Rightarrow t^2 + 3t - 12 = 0$
 $t = -4 \quad t = 3$
 $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
 $x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{7}$
 $4x - 3y \leq 6$
 $3x - 4y \leq 8$
 $4x - 3y \geq -30$
 $2(3x - 4y) \geq 16$
 $a_1 + 4a_2 = 7$
 $a_1 + a_2 = 3$
 $a_2 = -2$
 $a_1 = 5$
 $a = 10 \Rightarrow \sqrt{100 - 169} = 10 \pm \sqrt{15.5} \approx 10 \pm \sqrt{16.25}$
 $a = 20$
 $a^2 - 20a + 13^2 = 20$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

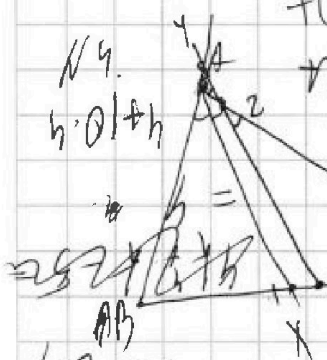
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3. $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$

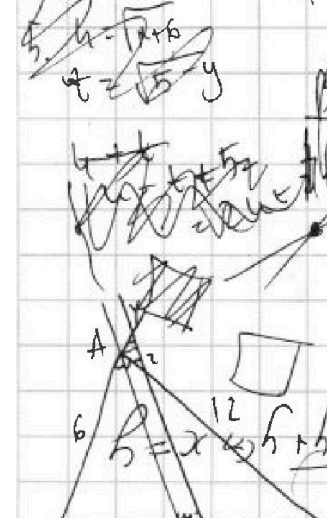
$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$

$4x - 3y = 8$
 $4x - 3y = -6$
 $x - y = \frac{2}{7}$
 $x + y = 2$



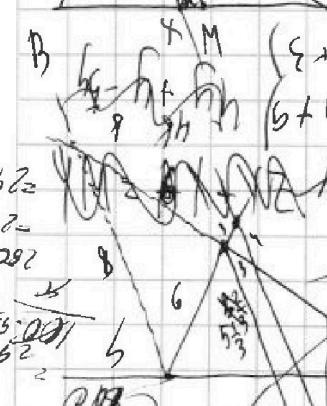
$f(t) = 4t^4 + t - 5t^2$
 $AC = 12$
 $AZ = 3 + 4 + 7 = 4$

$\frac{BX}{BA} = \frac{AX}{AC}$
 $\frac{1}{2}BC = \frac{BA + AY}{AC - AZ} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$



$\frac{BC - x}{12} = \frac{BA}{BA + 9}$
 $\frac{2x}{BC} = \frac{BA}{BA + 9}$
 $6 = x + h + 2h + 2h = x + 5h$

$\frac{BC - x}{AC - AZ} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$
 $\frac{1}{2}BC = \frac{BA}{AC - AZ}$



$\angle BC = 3AC - 3x$
 $\frac{1}{2} = \frac{BA}{12}$
 $BA = 6$
 $648 - 256 = 392 = \frac{256}{9}$
 $BC = \sqrt{196} = 14$

$AB \cdot BC - BX \cdot CX = \sqrt{16 \cdot 12 - \frac{1}{9} BC^2} = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$
 $AB \cdot BC = \sqrt{256} = 16$