



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть последовательность - $\{a_n\}$

$$a_3 = 3x+3, \quad a_5 = (x^2+2x)^2, \quad a_9 = 3x^2$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x+3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2+2x)^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 3x+3 \\ a_1 + 4d = (x^2+2x)^2 \\ a_1 + 8d = 3x^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 3x^2 - 8d \\ 3x^2 - 6d = 3x+3 \\ a_1 + 4d = (x^2+2x)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - 2d = x+1 \\ a_1 = 3x^2 - 8d \\ a_1 + 4d = (x^2+2x)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2d = x^2 - x - 1 \\ a_1 = 3x^2 - 4x^2 + 4x + 4 \\ 3x^2 - 4x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 2x - 2 = (x^2+2x)^2 \end{cases};$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 3 & -2 & -2 & \\ -1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \end{cases};$$

$$x^3 + 2x^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2(x+1) + 2(x^2-1) = 0$$

$$(x+1)(x^2+2(x-1)) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$x = -1$ - не подходит

$$a_3 = 0$$

$$a_1 = -1 - 4 + 4 = -1$$

$$d = \frac{1 + x - x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d = 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$

Ответ: -1

$x = -1 \pm \sqrt{3}$ - не подходит

$$a_3 = -3 - 3\sqrt{3}$$

$$a_3 = -3 + 3\sqrt{3}$$

$$a_1 = -(-1 - \sqrt{3})^2 + 4(-1 - \sqrt{3}) + 4 =$$

$$= -4 - 2\sqrt{3} - 4 - 4\sqrt{3} + 4 = -4 - 6\sqrt{3}$$

$$d = 4 + 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 4 + 3\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 4 + 3\sqrt{3} +$$

$$+ 8 + 6\sqrt{3} = 12 + 9\sqrt{3}$$

$$12 \neq -3 - 3\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

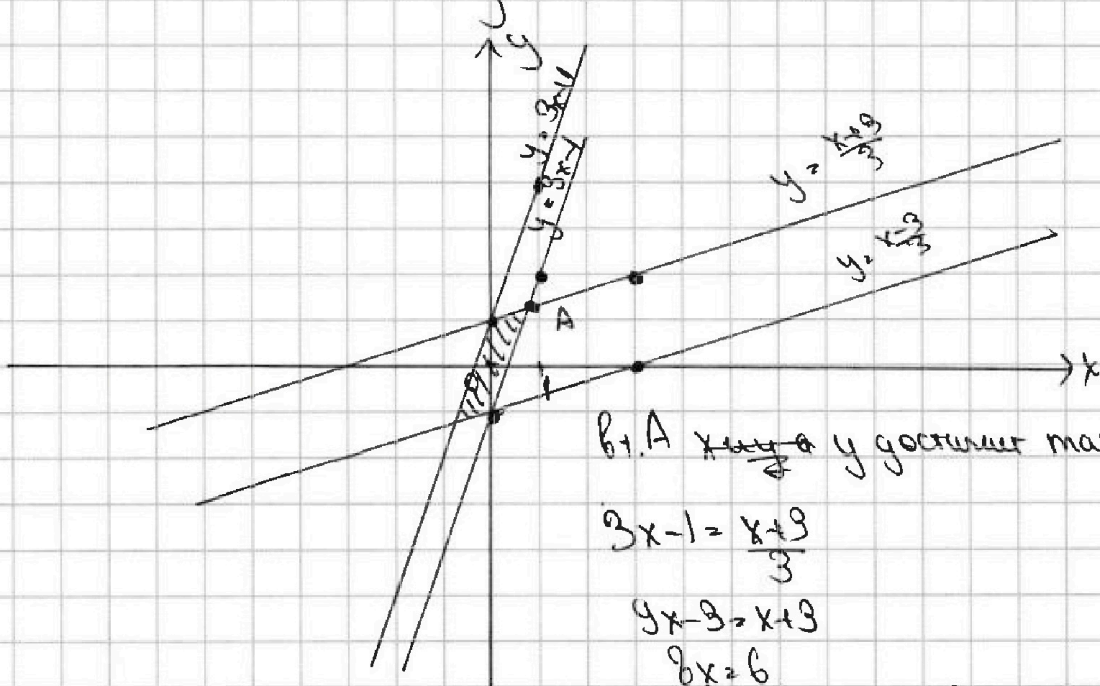
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \quad \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \geq -3 \\ x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y \leq \frac{x+3}{3} \\ y \geq \frac{x-3}{3} \\ y \geq 3x-1 \\ y \leq 3x+1 \end{cases}$$



В т. А $4y + 8x$ достигнет макс.

$$3x-1 = \frac{x+3}{3}$$

$$9x-3 = x+3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{9}{4} - 1$$

$$y = 1,25$$

$$4y + 8x = 4 \cdot 1,25 + 8 \cdot 0,75 = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Пусть $A = 45q^2, B = 13p^2$

тогда $m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9) = 45q^2$

$m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) = 13p^2$

Множители:

mn	n	$m+n-3$
1		$13p^2$
13		p^2
p		$13p$
$13p$		p
p^2		13
$13p^2$		1

возможные значения
 $13p^2$: $(1+1)(2+1) = 6$ делителей,
 т.е. 6 возможных случаев, но
 $m+n$ симметричное уравнение
 $mn(m+n-3) \rightarrow$ отн. m, n .

Значит можно рассмотреть ~~следующие~~

① $mn = 1$
 $m+n-3 = p^2 \cdot 13$, $m, n \in \mathbb{N}$, p - простое
 \downarrow
 $m = n = 1$

$m+n-3 = 1+1-3 = -1$
 $p^2 \cdot 13 = -1$ - неверно

② $mn = p$, p - простое
 $m+n-3 = 13p$
 $m = p$
 $n = 1$

③ $mn = 13$
 тогда $m = 1, n = 13$
 $m+n-3 = 11$
 $11 = p^2 \cdot 13$ - неверно

$1+p-3 = 13p$
 $12p = -2$ - неверно

④ $mn = p^2$
 $m = n = p$ либо $m = p^2, n = 1$
 $2p-3 = 13$
 $p = 8, p$ - простое \Rightarrow не подходит

⑤ $m \cdot n = 13p$
 $m+n-3 = p$
 $m = 13, n = p$
 $13+p-3 = p$ - неверно
 $m = 13p, n = 1 \Rightarrow 13p+1-3 = p$
 $13p-2 = p$
 $12p = 2$ - неверно

$p^2+1-3 = 13$
 $p^2 = 15$ - неверно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6) \begin{cases} mn = 13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} m+n=4 \\ m=13 \\ n=p^2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} m=13p^2 \\ n=1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} m=13p \\ n=p \end{cases}$$

$$1. 13+p^2=4$$

$p^2=9$ - неверно

$$2. 13p+1=4 \text{ - неверно}$$

$$3. 13p^2+1=4 \text{ - неверно}$$

\Rightarrow 6-я тема не подходит

(Уравн симметрично отн m и n)
Можно рассмотреть 3 случая!

Значит $13 \neq 13q^2$

Пусть $A=13p^2, B=45q^2$

$$(m+n)(m+n-9)=13p^2$$

$$mn(m+n-9)=45q^2$$

Рассм аналогичные случаи:

~~$$\begin{cases} mn=13p \\ m+n-9=13p \end{cases}$$~~

$$(m+n)(m+n-9)=13p^2$$

- | | |
|---|---------|
| 1 | $13p^2$ |
| 2 | $13p$ |
| 3 | 13 |
| 4 | p |
| 5 | p^2 |
| 6 | p^2 |

$$1) \begin{cases} m+n=1 \\ 1-9=13p^2 \text{ - неверно} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} mn=13p \\ m+n-9=p \\ 13p-9=p \text{ - неверно} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} mn=p \\ p-9=13p \text{ - неверно} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} mn=13p^2 \\ 13p^2-9=1 \text{ - неверно} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} mn=p^2 \\ p^2-9=13 \text{ - неверно} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} m+n=13 \\ 13-9=p^2 \\ p^2=4 \\ p=2 \checkmark \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 - простое $\Rightarrow p = 2$ - подходит, значит $mn = 13$

тогда $mn = 10 = 5q^2$

$$2mn = 5q^2 \Rightarrow \begin{cases} mn \equiv 0 \pmod{5} \\ q^2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow q \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

q - простое, значит q принимает единств. значение $q = 2$

$$\begin{cases} 2mn = 15 \cdot 4 \\ mn = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ \frac{30}{n} + n = 13 \end{cases}$$

$$30 + n^2 = 13n$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0$$

$$D = 49$$

$$n_{1,2} = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$\begin{cases} n_1 = 3 \Rightarrow m = 10 \\ n_2 = 10 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$$

Для

дискриминант равен, где дискриминант принимает

значения < 0 , невозможны, так $m, n \in \mathbb{N}$

$$m+n > 0$$

mn не может быть < 0

Ответ: $(10, 3); (3, 10)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по т. sin в $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$$

$$\angle A = 2\alpha \Rightarrow \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{18}{\sin \angle B}$$

$$\frac{\sin 2\alpha \cdot 18}{BC} = \frac{2 \sin \alpha \cdot 12}{BC}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot 9 = \sin \alpha \cdot 12$$

$$2 \cos \alpha \cdot 9 = 12$$

$$3 \cos \alpha = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

по т. cos в $\triangle ABC$
~~по т. sin~~

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle A \cdot AC \cdot AB$$

$$BC = \sqrt{16^2 + 90^2 - \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 16^2 \cdot 90} = \sqrt{324 + 8100 + 120} =$$

$$= \sqrt{900 + 444} = \sqrt{1344} = 2\sqrt{336} = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$

по т. sin в $\triangle MZB$:

$\angle MZB = \angle AZB$ (вершины)

$$\frac{MB}{\sin \angle MZB} = \frac{ZM}{\sin \angle B}$$

$$\frac{\frac{1}{2} BC}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin \angle B}$$

$$\frac{BC}{2 \sin \alpha} = \frac{12}{\sin \angle B}$$

$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi$ - не подходит по условию

$\sin \alpha \neq 0$

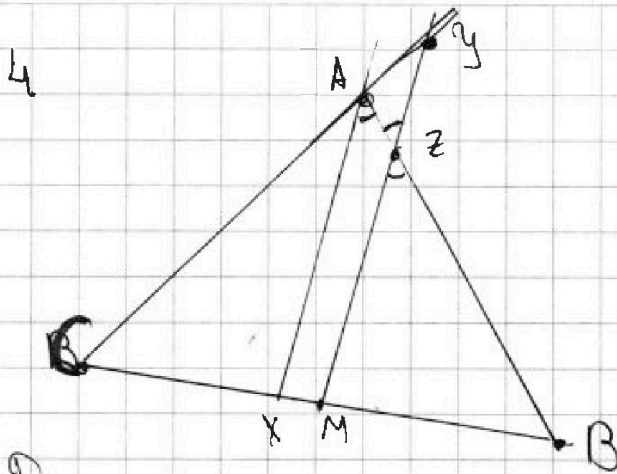


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
M - сеп. BC
AX - сеп. $\angle A$
AC = 18, AZ = 6
YZ = 8
Найти: BC?

Решение:

$$AB \cap MY = \{Z\}$$

$$CA \cap MY = \{Y\}$$

$$\text{Пусть } \angle XAB = \alpha, \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$AX - \text{сеп.} \Rightarrow \angle CAZ = \angle XAB = \alpha, ZM \parallel AX \Rightarrow \angle XAZ \text{ и } \angle AZY - \text{накрест. углы, где } \angle XAZ = \angle AZY = \alpha$$

$$\angle CAB + \angle BAY = 180^\circ \text{ (смежные углы)}$$

$$\angle CAB = \angle CAZ + \angle XAB = 2\alpha \Rightarrow \angle BAY = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle CYM = 2\alpha$$

$$\angle CYM = \angle AZY = \alpha \Rightarrow \triangle AZY - \text{равнобедр., где } AZ = AY = 6$$

по т. Менелая в $\triangle CYM$: $\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MB}{BC} = 1$, M - сеп. BC
 \downarrow
MB = $\frac{1}{2} BC$

$$\frac{18}{6} \cdot \frac{8}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$ZM = 12$$

по т. Менелая в $\triangle ABC$: $\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$

$$\frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{6+18} = 1 \quad \underline{BZ = 24} \Rightarrow AB = BZ + AZ = 6 + 24 = 30$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

Отметим:

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} + \sqrt{6-y}$$

$$x = \left\{ \frac{5+2\sqrt{10}}{2}, \right.$$

$$x^2 + y^2 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$\left. \frac{5 \pm \sqrt{19}}{2} \right\}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})((x^2 + y^2 + 5)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1) = 0$$

$$\left[\sqrt{x} = \sqrt{y} \right.$$

$$\left. (x^2 + y^2 + 5)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 \text{ - решение} \right]$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}, \quad x \geq 0, x \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5, \quad x \in [0; 6]$$

$$4 - 2\sqrt{6+5x-x^2} = 4(6+5x-x^2) + 25 - 20\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\text{Положим } a = \sqrt{6+5x-x^2}$$

$$2(6+5x-x^2) + 9 - 9\sqrt{6+5x-x^2} = 0$$

$$2a^2 + 9 - 9a = 0$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = 1,5$$

$$6+5x-x^2 = 2,25$$

$$x^2 - 5x - 3,75 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 400 + 15 \cdot 4 = 420$$

$$= 640$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{640}}{8} =$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = 3$$

$$-x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow D = 25 - 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} < 0 \text{ - не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

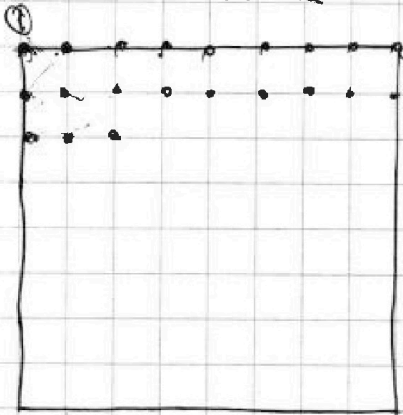
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Всего 64 квадрата

$9 \cdot 9 = 81$ точка



или:

$$C_{81}^2 - (C_4^1 \cdot C_{77}^1 + C_{28}^1 \cdot C_{53}^1 + C_{49}^1 \cdot C_{32}^1)$$

$$= 40 \cdot 79 \cdot 81 - 276 - 2556 - 1568$$

Рассм. 1 квадрат $C_{81}^2 - (C_4^1 \cdot C_{77}^1 + C_{28}^1 \cdot C_{53}^1 + C_{49}^1 \cdot C_{32}^1)$

- 6 способов разместить 2 точки на соседних рядах

Всего - C_{81}^2 способов выбрать 2 точки

Если мы возьмем точку 1 и возьмем или самую-самую точку из 80 остальных, и там сделаем сдвигаем, то

всего пар точек будет: ~~$C_{81}^2 - C_{80}^1$~~

C_4^1 - кол-во выбрать 1 точку из квадрата

$C_{81}^1 - 4 = C_{77}^1$ - кол-во сп. выбрать точку не из того же квадрата

C_{64}^1 - кол-во способов выбрать 1 квадрат

Рассм. точки на границе и внутри большого квадрата:

~~$C_{9 \cdot 9 + 4 \cdot 2}^1 = C_{82}^1$ - кол-во способов выбрать точку на границе~~

~~C_{49} кол-во сп. выбрать т. внутри квадрата, не граничную~~

C_4^1 - кол-во сп. выбрать т. на вершине, у нее 2 соседние точки

C_{77} - кол-во сп. выбрать т. на границе, но не на вершине

$C_{77} - 4 = C_{73}$ - кол-во сп. выбрать т. на границе, без вершины

C_{75}^1 - кол-во сп. выбрать т. к. к. к.

C_{49} - кол-во сп. выбрать т. внутри

C_{72} - кол-во сп. выбрать т. к. к. к.

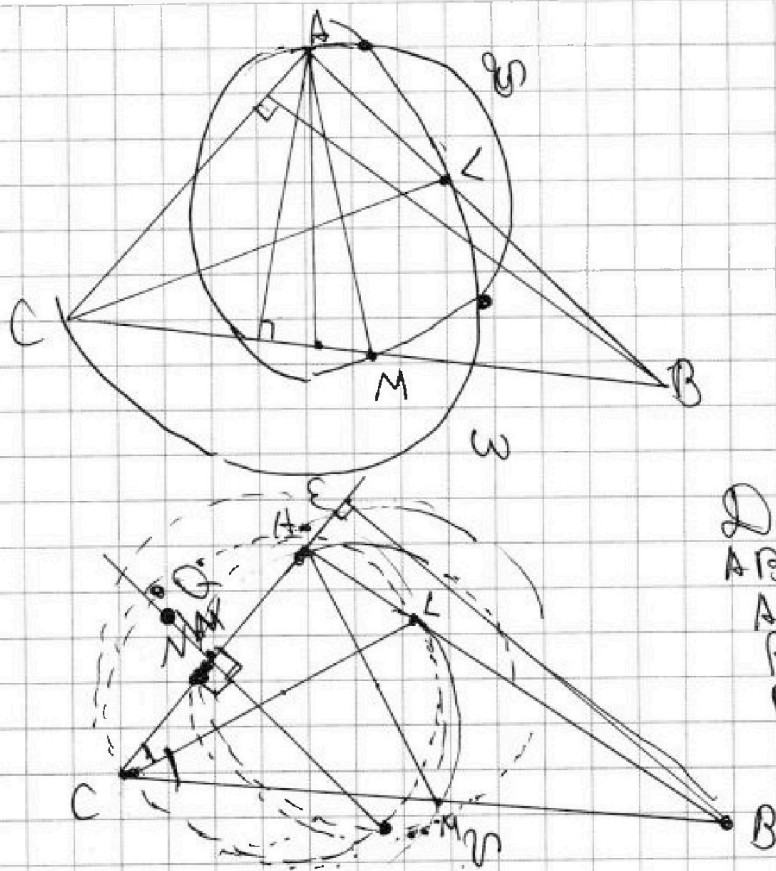


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
 $AB = 10$
 $AN = 8$
 $PQ \parallel BE$
 BE — высота $\triangle ABC$
 Найти:
 AC и BC — ?

Решение:

$CL = D_1$
 $AM = D_2$
 $PQ \perp AC$

$CM = MB$, AM — медиана
 CL — биссектриса $\Rightarrow \angle ACL = \angle LCB \Rightarrow \frac{AL}{AC} = \frac{LB}{CB}$, ~~AB~~
 $AL = LB = AC$

$PQ \perp AC$; Пусть $PQ \cap AC = N$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. a_3 = 3x + 3, a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2 \quad a_{12} = -x^2 + 4x + 4 = -1 - 4 + 4 = -1$$

$$a_3 = a_1 + d(n-1) = a_1 + d \cdot 2 = 3x + 3$$

$$-1 = 2d$$

$$d = 0,5$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2$$

$$1 - 2d = 0$$

$$2d = 1$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$\begin{array}{r} -1 \cdot 3 + 8 \cdot 0 \\ -1 + 2 \cdot 0,5 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 4 & 3 & -2 & -2 \\ & & & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$a_1 = 3x^2 - 8d$$

$$3x + 3 = 3x^2 - 8d + 2d$$

$$x = -1$$

$$-1 - \sqrt{3} = x$$

$$3x + 3 - 3x^2 = -6d$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$a_{12} = -(1 + 3 + 2\sqrt{3}) - 4 + 4\sqrt{3} + 4 =$$

$$-3x - 3 + 3x^2 = 6d$$

$$x^3 + x^2 + 2x^2 - 2 = 0$$

$$= -4 - 2\sqrt{3} - 4 + 4\sqrt{3} = -4 - 6\sqrt{3}$$

$$d = \frac{4 + 2\sqrt{3} + 19 + 1 - x - 4 + 3\sqrt{3}}{-x - 1 + x^2} = 2d$$

$$x^2(x+1) + 2(x^2-1) = 0$$

$$(x+1)(x^2+2(x-1)) = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$3x^2 - 8d + 4d = (x^2 + 2x)^2$$

$$-4 - 6\sqrt{3} + 8 + 3\sqrt{3} = 4 - 3\sqrt{3}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$3x^2 - 4d = (x^2 + 2x)^2$$

$$\begin{array}{cccccc} -2 & 1 & 2 & 1 & -6 & \end{array}$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$3x^2 - 2(x^2 - x - 1) = (x^2 + 2x)^2$$

$$\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 4 & 5 & -4 & -4 \\ & & & 3 & 2 & -6 \end{array}$$

$$3x^2 - 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 2x)^2$$

$$3x^2 - 2x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2$$

$$-x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 2x)^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$-x^2 + 4x + 4 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -4 & +3 & +2 & -2 & \end{array}$$

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{cccccc} x = -2 & & & & & \\ 1 & 4 & 5 & -4 & -4 & \\ & 1 & 6 & 14 & & \end{array}$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & 9 & 6 & & & \\ & 9 & 7 & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 5 & -4 & -4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 3 & -2 & -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 5 & 10 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 5 & 8 & 6 & \end{array}$$

0,5

2,5

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = a - c = 240 - 91 = (4 + 1) \cdot 4 \cdot 4^2$$

$$a - b = 240 - 91 = 149$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 - 9m - n$$

$$B = m^2 + mn^2 - 3mn$$

Если $A = 13p^2$, то $m^2 - 2mn + n^2 - 9m - n = 13p^2$

$$(m+n)^2 - 9m - n = 13p^2, m, n \in \mathbb{N}$$

$$m^2 + n^2 - 3mn = 45q^2$$

$$mn(m+n-3) = 45q^2$$

$$mn(m+n-3) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$mn(m+n-3) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$mn = 3$$

$$mn = 5$$

$$mn = 9$$

$$mn = 15$$

$$mn = 25$$

$$mn = 35$$

$$mn = 45$$

$$mn = 75$$

$$mn = 9$$

$$mn = 15$$

$$mn = 25$$

$$mn = 45$$

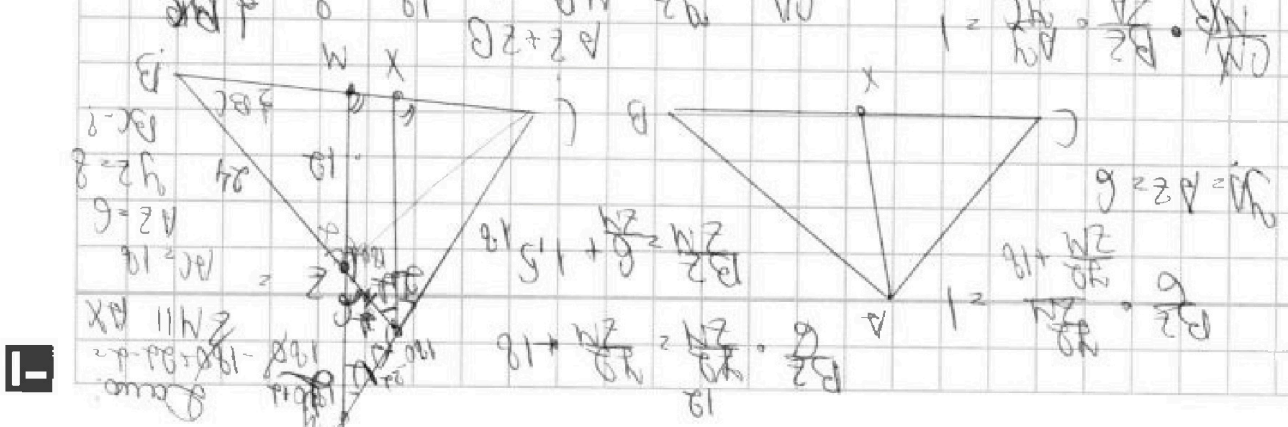
$$mn = 75$$

$$B = 152m - 6b = 152m - 1$$

$$B = 24 \cdot 19 = 456$$

$$B = 24 \cdot 19 = 456$$

$$B = 24 \cdot 19 = 456$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$

$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$

$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + \sqrt{y} + 5y^2$

$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$(x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + 1 = 0$

$\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x, y \geq 0 \Rightarrow x = y$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x}$

$\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} + 5 = 0$

$\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} + 5 = 0$

$\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} + 5 = 0$

$x+1 = a \quad -a = -x-1$

$6+5x-x^2 \geq 0 \quad -a+y=0$

$(x+1)(x-6)+1 \geq 0 \quad \forall x \in [0; 6]$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} - 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5 = 0$

$x+1+6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x) + 25 - 20\sqrt{6+5x-x^2}$

$4(x+1)(6-x) + 18 - 18\sqrt{(x+1)(6-x)} = 0$

$\sqrt{(x+1)(6-x)} = a \quad 4a \quad 2(x+1)(6-x) + 9 - 9\sqrt{(x+1)(6-x)} = 0$

$2a^2 - 9a + 9 = 0$

$x^2 - 5x - 6 \leq 0 \Rightarrow 5 \pm 2\sqrt{10}$

$(6-x)(x+1) = 6x - x^2 + 6 - x^2 = -x^2 + 5x + 6$

$D = 25 - 9 \cdot 4 = 4 = 2$

$a_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{4}$

$a_1 = 3$
 $a_2 = 1,5$

$\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3$

$6x - x^2 + 6 - x^2 = 9$

$-x^2 + 5x + 6 = 9$

$x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$5 - 3,6 \quad 5 + 3,6 \quad \frac{6,6}{2} = 4,3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$
 $mn(m+n-3) = 45q^2$

$m+n = 1$ $m+n = 13p$
 $m+n = 13p$ $m+n-9 = p$
 $13p - 9 = p$ $12p = 9$ X
 $m+n = 13p^2$ $13p^2 - 9 = 1$ X
 $m+n = p^2$ $m+n-9 = 13$ $p^2 - 9 = 13$ X

$p=2$ - не подходит
 $p=3$ и $p=5$ - не подходит

$m+n = 13$
 $p^2 + 9 = 13$
 $p^2 = 4$
 $p = 2$ - не подходит

$(9-3) \cdot mn = 45q^2$
 $2mn = 15q^2$ $q^2 = 2$ $q = \sqrt{2}$
 $mn = 15$ $m \cdot n$
 $m+n = 13$ $30 + m = 13$
 $m = 10$ $n = 3$ $m = 3$ $n = 10$

$80 + m^2 - 13m = 0$
 $169 - 120 = 49$
 $m_{1,2} = \frac{13 \pm 7}{2}$
 $m_1 = 10 \Rightarrow n_1 = 3$
 $m_2 = 3 \Rightarrow n_2 = 10$

$13 \cdot 4 = 52$
 $4 \cdot 9 = 36$
 $3 \cdot 4 = 12$
 $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$
 $3 \cdot 4^2 = 48$
 $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
 $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$

Diagrams: A circle with a horizontal chord and a vertical chord; a circle with a horizontal chord and a vertical chord; a circle with a horizontal chord and a vertical chord; a triangle; a triangle; a square with a diagonal; a square with a diagonal.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 max(4y + 8x) - ?

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y \geq -3 \\ x - 3y \leq 3 \\ 3x - y \leq 1 \\ 3x - y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \leq x + 3 \\ 3y \geq x - 3 \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x+3}{3} \\ y \geq \frac{x-3}{3} \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

