



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q - простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть арифм. прогр. Будет вида $a_n = a + k(n-1)$, тогда

$$a_5 = a + 4k = 6x + 18; \quad a_7 = a + 6k = (x^2 - 4x)^2, \quad a_{11} = a + 10k = (3x^2)$$

2) Тогда

$$a + 6k - (a + 4k) = 2k = (x^2 - 4x)^2 - (6x + 18)$$

$$a + 10k - (a + 6k) = 4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$\Rightarrow 2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 4x + (x^2 - 4x)^2 - 4 = 0$$

Пусть $(x^2 - 4x) = t$

$$t^2 + t - 4 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\Rightarrow t + 4 = 0 \quad \text{или} \quad t - 3 = 0$$

$$t = -4 \quad \quad \quad t = 3$$

Согл. зам:

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

3) Так как каждое уравнение было либо линейным, либо квадратным, либо кубическим, а все с нулем корней (если их не считать, в крайних случаях), эти 3 значения - наш ответ.

Ответ: $2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | +3 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18 \leq -18 \leq 12x - 9y \leq 18 \\ -32 \leq -12x + 16y \leq 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -50 \leq (12x - 9y) + (-12x + 16y) \leq 32 + 18$$

$$-50 \leq 7y \leq 50$$

$$-\frac{50}{7} \leq y \leq \frac{50}{7}$$

(максимальное значение функции y)

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | \cdot 4 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-3) \end{cases} \quad \begin{cases} -24 \leq 16x - 12y \leq 24 \\ -24 \leq -9x + 12y \leq 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -24 + (24) \leq (16x - 12y) + (-9x + 12y) \leq 24 + 24$$

$$-48 \leq 7x \leq 48$$

$$-\frac{48}{7} \leq x \leq \frac{48}{7}$$

(все значения x)

1) Максимальное значение $4x + 7y$ будет при максимальных x и y , т.е. x и y равны $\frac{48}{7}$ и $\frac{50}{7}$ соответственно.

$$2) \text{ Максимальное } 4x + 7y = -\frac{48}{7} \cdot 4 + \left(-\frac{50}{7}\right) \cdot 7 = -48 \cdot 2 + (-50) = -146$$

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Прямоугольник $m - n = -13$ или $m - n = 9 = 13$

$m = n - 13$ $m = n + 4$

7) Тогда

(1) $S = m \cdot n (m - n + 3) = (n - 13) \cdot n (n - 13 - n + 3) = (n^2 - 13n) \cdot (-12) = 39^2$

либо (2) $S = (n + 4)(n + 4 - n + 3) \cdot n = (n^2 + 4n) \cdot 7 = 39^2$

8) а) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n^2 + 4n) \in \mathbb{N}$, т.к. $39^2 = 7(n^2 + 4n)$ и др. так все множители числа $39^2 = n^2 + 4n \Rightarrow \frac{39^2}{7} \in \mathbb{N}$, т.к. 9^2 кратно 7, т.к. 9 - простое число значит $9 = 7$

$\Rightarrow (n^2 + 4n) \cdot 7 = 3 \cdot 7^2$

$n^2 + 4n = 21$

$n^2 + 4n - 21 = 0$

$(n + 7)(n - 3) = 0$

$\Rightarrow n + 7 = 0$ или $n - 3 = 0$

$n = -7$ $n = 3$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = n + 4 = 7$

9) (1) $(n^2 - 13n) \cdot (-12) = 39^2$

$-12n^2 + 156n = 39^2$

$n^2 - 13n = -\frac{4}{3}$

$13n - n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow 13n - n^2 \geq 0$, т.к. $n \in \mathbb{Z}$ $13n - n^2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2$ - такое целое, которое $\frac{4}{9}$ - простое и простое, а единственное простое число - 2 \Rightarrow

$13n - n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$n^2 - 13n + 1 = 0$

$D = 13^2 - 4 = 12$

$n = \frac{13 \pm \sqrt{12}}{2}$

но $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ при $m = n - 13$ не имеет смысла.

10) Уменьшил параллелограмм угла, тогда $A = 39^2$ ~~или $A = 39^2$~~
 на какой-то момент уменьшился, тогда $A \neq 39^2$, т.к. всегда было
 по всем углам 7 и 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$11) (m-n)(m-n+9) = 3q^2$$

Один из множителей $(m-n)$ или $(m-n+9)$ делится делителем на 3, т.к. $3q^2$ делится на 3, а множители - целые числа, но

если $m-n$ кратен 3, то $m-n+9$ также кратно 3, т.к. $9 \div 3 = 3$.

Если же $m-n+9$ кратно 3, то $m-n$ также делится на 3.

12) Значит $3q^2$ делится на 9, т.к. 2 множителя кратны 3

Т.к. q - простое и делится на 3, то единственно возможный вариант $q=3$

$$\Rightarrow 3q^2 = 27$$

13) Если $m-n$ - простое, то $m-n+9$ - простое, и наоборот, если $m-n+9$ - простое, то $m-n$ - простое (т.к. 9 простое, а $простое + простое = простое$)

Значит их произведение - простое, но 27 - простое,

$$\text{значит } A \neq 3q^2$$

14) \Rightarrow у нас только 1 вариант $m=7, n=3$

$$\text{Ответ: } 7; 3$$

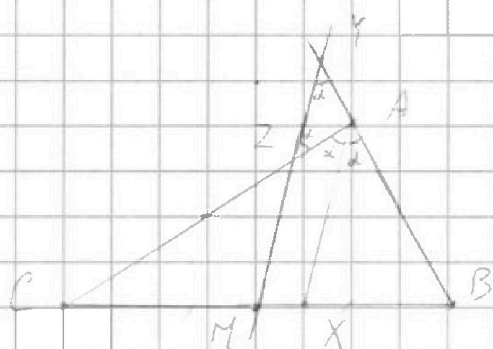
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AX - бис. M - середина BC

$MY \parallel AX$

$AC = 12$ $AZ = 3$ $YZ = 4$

Найти:

$BC = ?$

Решение:

1) Пусть $\angle CAH = \alpha \Rightarrow \angle XAB = \alpha$, а $\angle BAC = 2\alpha$

2) $AX \parallel MY$, а AZ - секущая $\Rightarrow \angle CAH = \alpha$ и $\angle YZA$ - накр. углы, а также $\angle YZA = \angle CAH = \alpha$

3) $\angle YAC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - 2\alpha$

4) $\angle YAZ + \angle AYZ + \angle AZY = 180^\circ \Rightarrow \angle AYZ = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$

5) Получается, что треугольник AYZ - равнобедренный, а $AY = AZ = 3$

6) По теореме косинусов $AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \angle YAZ \cdot AZ \cdot AY = YZ^2$

$$3^2 + 3^2 - 2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 3 \cdot 3 = 4^2$$

$$-2 \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 9 = 16 - 18 \quad | : -2$$

$$9 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 1$$

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

7) По теореме (если Z на стороне AC) $\frac{BM}{MC} = \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{AB} = 1$

$\frac{BM}{MC} = 1$, т.к. M - середина BC ; $CZ = AC - AZ = 12 - 3 = 9 \Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{9}{3} = 3$

$$\Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot \frac{AY}{AB} = 1 \quad 3AY = AB \quad AB = 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle C \cdot AC \cdot AB$

$$BC^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot 9 \cdot 12$$

($\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$, см пункт 6)

$$BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 12}{9}$$

$$BC^2 = 81 + 144 + 24 = 249$$

$$BC = \sqrt{249}$$

Ответ: $\sqrt{249}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ОДЗ } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -6 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Пусть функция

~~$f(x) = 4x^4 + x - 5\sqrt{y}$~~ $f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$

получается $f(x) = f(y)$

Функция ~~монотонно~~ ~~возрастает~~ принимает ~~лишь~~ ~~два~~ значения

значения, а $x \geq 0$ и $y \geq 0$

Функция монотонно возрастает $\Rightarrow x = y$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \quad |^2 \text{ (на обе части возведем, это равносильное преобр.)}$$

$$\frac{\sqrt{(x+6)(5-x)}}{\sqrt{(x+6)(5-x)}} \cdot 4(x+6)(5-x) = 25 + 10(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}) + x+6 - 2(\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} + 5-x)$$

$$4(x+6)(5-x) = 25 + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-x} + 11 - \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} - 5$$

$$4(x+6)(5-x) = 31 + 9\sqrt{x+6} - 9\sqrt{5-x}$$

$$120 - 4x - 4x^2 = 31 + 9(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})$$

$$(30-x-x^2) \cdot 4 = 31 + 9(2\sqrt{30-x-x^2} - 5)$$

Пусть $\sqrt{30-x-x^2} = t$

$$4t^2 = 31 + 9 \cdot (2t - 5)$$

$$4t^2 = 31 + 18t - 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 = 18t - 14$$

$$t^2 - \frac{18}{4}t + \frac{14}{4}t$$

$$t^2 - 4,5t + 3,5t$$

$$(t-1)(t-3,5) = 0$$

$$t=1 \text{ или } t=3,5$$

Согл. зад.

$$\sqrt{30-x-x^2} = 1 \text{ или } \sqrt{30-x-x^2} = 3,5$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2=1 \\ 30-x-x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2=9,5 \\ 30-x-x^2=0 \end{cases}$$

$$29-x-x^2=0$$

$$26,5-x-x^2=0$$

$$x^2+x-29=0$$

$$2x^2+x-53=0$$

$$D = 1 + 29 \cdot 4 = 117$$

$$D = 4 + 8 \cdot 53 = 107,4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{117}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{107}}{4}$$

Проверим предметные неравенства $x \in [0; 3]$

$$\frac{-1 - \sqrt{117}}{2} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-1 - \sqrt{117}}{2}; \quad \frac{-2 - \sqrt{107}}{4} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2 - \sqrt{107}}{4}$$

$$\sqrt{100} < \sqrt{107} < \sqrt{117} < \sqrt{121} \Rightarrow 10 < \sqrt{107} < \sqrt{117} < 11 \Rightarrow 4$$

$$9 < -1 + \sqrt{107} < -1 + \sqrt{117} < 10$$

$$4,5 < \frac{-1 + \sqrt{107}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} < 5 \quad \text{По ОДЗ } -6 < x \leq 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{107}}{2} \text{ и } x = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответы: } \frac{-1 + \sqrt{107}}{2}, \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7


СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

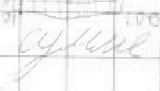
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Для начала задачи, считаем все рисунки (без учета 0 поворотов), найдем их количество по формуле числа сочетаний

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99 = 4950$$

(2 - потому что 2 узла, 100 - потому что всего 100 узлов)

2) Теперь можно было бы просто разделить это число на 4, но заметим, что есть такие узлы (каждый их симметричных), которые при повороте на 180° образуют тот же рисунок, например  вершина и центральная - симметричные узлы.

3) Если перевернуть все узлы так, чтобы левая сторона была выше, а правая ниже, то получится  рисунок 100 (рис. 100), то есть  - это то, что в сумме дает 101 , а таких пар всего $5 \cdot 101 = 505$.

4) Значит среди 4950 рисунков 4900 имеют 3 "симметричных" при повороте на 90° , 180° и 270° , и 50 рисунков являются симметричными и имеют лишь 1 копию при повороте

на 90° . Значит уникальных рисунков всего $\frac{4900}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot \frac{100}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot 25 + 25 = 50 \cdot 25 = 1250$

Ответ: 1250 рисунков



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$12 = 3$ $21 = 2Z$
 $12 = 89$ $BC = a = ?$

$MC = t$ $MX = \frac{t}{3}$ $XC = \frac{4}{3}t$

$\frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CX}$
 $\frac{AB}{2t - \frac{t}{3}} = \frac{12}{\frac{4}{3}t}$

$\frac{AB}{BX} = \frac{AY}{MX}$ $\frac{AB}{BX} < \frac{AC}{CX}$

$\frac{AC}{CX} = \frac{AZ}{MC}$ $\frac{AY}{YB} = \frac{MX}{MB}$

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$
 $16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$
 $-2 = -2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$
 $\frac{1}{3} = \cos 120^\circ$

$\frac{AY}{MX} = \frac{AZ}{AC}$

$\frac{AY}{AC} = \frac{MX}{CX}$

$20(=$
 $= 99 + 99 + 3 =$
 $= (33 + 31 + 1) / 3 =$
 $= 67 \cdot 3$

$4(a^3 - b^3) + 5(a-b) + (a-b)^4$

$\frac{BM}{MC} = \frac{CZ}{ZA} = \frac{AY}{YB} = 1$

$\frac{BM}{MC} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 3} = \frac{MX}{MB} = 1$

$\frac{MX}{MB} = \frac{31}{3}$

$f(x) = x^2 + 2x - 30 = (x-5)(x+6)$
 $4x^2 + x - 5 = 0$
 $4x^2 + 2x - 5 = 0$
 $4x^2 + 2x + 5 = 0$
 $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 80}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{-76}}{8}$

144
 -26
 168
 168
 81
 249
 $= 49 =$
 $= 83 \cdot 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solutions on grid paper for two geometry problems.

Problem 1 (top): Triangle ABC with AB=26, AC=10, BC=?

Diagram shows triangle ABC with a circle passing through points A, B, and C. The center of the circle is M, and a radius is drawn to point C. The angle at C is labeled as $10 < \angle C < 11$.

Equations derived:

$$5 + \sqrt{30x - y^2} = 2\sqrt{30x - y^2} + 10$$

$$5 + \sqrt{30x - y^2} = -140$$

$$98 - 2 = 96$$

$$-96 - 96 = -192$$

$$(\sqrt{30x - y^2} - \sqrt{30x - y^2})^2 = 4(30x - y^2)$$

$$(-192)^2 = 4(30x - y^2)$$

$$36864 = 120x - 4y^2$$

$$9216 = 30x - y^2$$

System of inequalities:

$$\begin{cases} -8 \leq 4x - 3y \leq 8 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

Final calculation:

$$46^2 = 486 - 14$$

Problem 2 (bottom): Triangle ABC with AB=26, AC=10, BC=?

Diagram shows triangle ABC with a circle passing through points A, B, and C. The center of the circle is M, and a radius is drawn to point C. The angle at C is labeled as $10 < \angle C < 11$.

Equations derived:

$$-18 \leq 12x - 9y \leq 18$$

$$-32 \leq 12x - 6y \leq 32$$

$$-32 \leq 18y - 12x \leq +32$$

System of inequalities:

$$\begin{cases} -18 \leq 4x - 3y \leq 18 \\ -32 \leq 5x - 4y \leq 32 \end{cases}$$

Final calculation:

$$4 + 2 \cdot 53 - 4 = 102 - 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5000 - 430 = 4570

10 * 10 = 100

100 * 39 = 3900

$100^2 = 10000$

$38^2 = 1444$

$10000 - 1444 = 8556$

$8556 / 2 = 4278$

$4278 * 50 = 213900$

$213900 / 5 = 42780$

$42780 * 25 = 1069500$

4900

50

$49 * 25 = 1225$

$1225 * 25 = 30625$

4950

50

$49 * 25 = 1225$

$1225 * 25 = 30625$

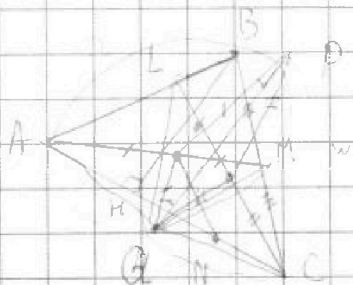


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
~~10~~ ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

CB - диаметр, MA - медиана, PQ || BH

AM - диаметр Ω

CL - диаметр ω , $\Omega \cap \omega = P, Q$

BK - высота, AB = 20

AM = 20

Найти:

Решение:

AC = ? BC = ?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + 4k = 6x + 18$$

$$a + 6k = (x^2 - 4x)^2$$

$$a + 10k = (-3x^2)$$

$$2k = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

$$4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$(2\sqrt{7})(2\sqrt{7}) = 4 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 7 = 11 + 4\sqrt{7}$$

$$2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$a + 4k = 30$$

$$a + 6k = 14 - 2j = 16$$

$$a + 10k = -12$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^2 + (x^2 - 4x)^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 12x - 36 = (x - 6)^2$$

$$(x - 6)^2 + (x^2 - 4x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 6 = 0 \quad x^2 - 4x = 0$$

$$x = 6 \quad (x - 4)x = 0$$

$$x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$a + 4k = 30 - 6\sqrt{7}$$

$$(a - 4k) = (11 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7}) = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = -3 \pm 12\sqrt{7}$$

$$2k = 2 + 6\sqrt{7}$$

$$4k = 4 + 12\sqrt{7}$$

$$9 - 42 - 12\sqrt{7}$$

$$2 - \sqrt{7}$$

$$30 - 6\sqrt{7}$$

$$11 - 4\sqrt{7} - 8 + 4\sqrt{7} = 3$$

$$-33 + 12\sqrt{7}$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 9 = 0$$

$$t^2 + t - 9 = 0$$

$$(t - 3)(t + 4) = 0$$

0

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 2$$

$$t^2 + t - 9 = 0$$

$$D = 10 + 36 = 46$$

$$t = -1 \pm \sqrt{46} \Rightarrow t = 1 + \sqrt{37}$$

$$(x^2 - 4x) = 1 + \sqrt{37}$$

$$x^2 - 4x = (1 + \sqrt{37}) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2h - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$2) m \in \mathbb{N} \text{ и } n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m-n) \in \mathbb{Z} \text{ и } (m-n+9) \in \mathbb{Z}$$

3) Заметим все возможные разложения $13p^2$ и $3q^2$ на простые числа и множители, учитывая, что $p, 13, q$ и 3 - простые числа.
(используем разложение $A = 13p^2$)

$$A = 1 \cdot 13p^2 = (-1) \cdot (-13p^2) = 13 \cdot p^2 = (-13) \cdot (-p^2) = p \cdot 13p = (-p) \cdot (-13p)$$

4) Заметим получаем, что $(m-n)$ равен 1 из этих множителей, а $(m-n+9)$ - 13p, подставим значения, и проверим, какие сойдутся

(часто можно опустить $(m-n) = 13p^2; -1, 13p$ и $-13p$, т.е. $m-n \neq m-n+9$ и $p \in \mathbb{N} \Rightarrow 1$)

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13p^2=10 \\ p^2=\frac{10}{13} \\ p=\pm\sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (1; 13p) \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=-13p^2 \\ m-n+9=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13p^2=-10 \\ p^2=\frac{10}{13} \\ p=\pm\sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (-13p; -1) \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13+9=p^2 \\ p^2=22 \\ p=\pm\sqrt{22} \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=-13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13+9=p^2 \\ p^2=-4 \\ p=\pm 2 \text{ (2 - простое число)} \Rightarrow (-13; p^2) \text{ подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=p^2 \\ m-n+9=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2+9=13 \\ p^2=4 \\ p=\pm 2 \Rightarrow (p^2; 13) \text{ - подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=13p \\ m-n+9=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13p+9=p \\ 12p=9 \\ p=\frac{3}{4}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=p \\ m-n+9=13p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+9=13p \\ 12p=9 \\ p=0.75 \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

5) В итоге получаем, что $m-n = -13$, $m-n+9 = p^2$; либо $m-n = p^2$, $m-n+9 = 13$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^3n - mn^3 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p/p ; p^2 \leq 13 ; 3q/q ; q \leq 3p ; 13p/p$$

$$m-n > m-n-9 \Rightarrow m-n = 13p$$

$$m-n-9 = p$$

$$13p-9 = p$$

$$m-n = p^2$$

$$m-n-9 = 13$$

$$m-n = 13$$

$$m-n-9 = p^2$$

$$p^2 - 9 = 13$$

$$p^2 = 22$$

$$p = \sqrt{22}$$

$$p+9 = 13p$$

$$12p = 9$$

$$p = \frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$$

$$\sqrt{3q+3} = 6q \Rightarrow 3q+3 = 36q^2$$

$$3q-1 = 3$$

$$3q = 4$$

$$q = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$m-n = 3$$

$$m-n-9 = 4^2$$

$$4^2 - 9 = 3$$

$$m-n = 4^2$$

$$m-n-9 = 3$$

$$4^2 - 9 = 3 \notin \mathbb{N}$$

$$m-n = 9$$

$$3q = 9$$

$$q = 3$$

$$1-9 = 3 \Rightarrow 3 = 9$$

$$4 = 2q^2$$

$$1-1 = 3 \Rightarrow 3q = 3$$

$$q = 1$$

$$2 = 1$$

$$13p^2 = m-n$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$3q^2 = 10$$

$$m-n = 10$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$m \cdot n \cdot (m-n+3) = 4 \cdot 9 \cdot 3 ; 4 \cdot 3 \cdot 9 ; 3 \cdot 9 \cdot 9 ;$$

$$m \cdot n = 1 \cdot 3 ; 3 \cdot 1 ; 3 \cdot 9 ; 9 \cdot 3 ; 1 \cdot 9^2 ; 9 \cdot 1 \cdot 9 ;$$

$$m-n-3 = 3^2 \cdot 1 ; 1 \cdot 3^2 ; 3 \cdot 9 ; 9 \cdot 3 ; 9^2 \cdot 1 ; 1 \cdot 9^2 ; 3 \cdot 9^2 ; 9^2 \cdot 3 ;$$

$$q = 1 \cdot 1 ; 1 \cdot 3 ; 3 \cdot 1 ; 3 \cdot 9 ; 9 \cdot 3 ; 9 \cdot 9 ; 9 \cdot 9^2 ; 9^2 \cdot 9 ; 9^2 \cdot 9^2 ;$$

$$3 \cdot 9^2 \cdot 1 ; 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 ; 1 \cdot 3 \cdot 9$$

$$3 \cdot 9^2 \cdot 1 ; 1 \cdot 3 \cdot 9^2 \cdot 1 ; 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9^2$$