



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть арифметическая прогрессия выведет
так: $a; a+b; a+2b \dots$

1-ый член 2-ой 3-ий

Пусть:

$$\begin{cases} a+2b = 3x+3 & (1) \\ a+4b = (x^2+2x)^2 & (2) \\ a+8b = 3x^2 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)+(3)}{2} - 6\text{-ой член арифм. прогр. } a+5b = \frac{3x^2+3x+3}{2}$$

$$b = (a+5b) \frac{1}{5} - (a+4b) = 1,5x^2 + 1,5x + 1,5 - (x^2+2x)^2$$

$$a + 2(1,5x^2 + 1,5x + 1,5 - (x^2+2x)^2) = 3x+3$$

$$a = 3x+3 - 3x^2 - 3x - 3 + 2(x^2+2x)^2 = -3x^2 + 2(x^2+2x)^2$$

$$a+4b = (x^2+2x)^2$$

$$-3x^2 + 2(x^2+2x)^2 + 4(1,5x^2 + 1,5x + 1,5 - (x^2+2x)^2) = (x^2+2x)^2$$

$$3(x^2+2x)^2 = 3x^2 + 6x + 6$$

$$(x^2+2x)^2 = x^2 + 2x + 2$$

Пусть $x^2 + 2x = t$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = -1$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x_3 = -1$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3}; x_2 = -1 - \sqrt{3}$$

Ответ: $-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$ или -1 .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$8x+4y = a(x-3y) + b(3x-y)$$

$$\begin{cases} a+3b=8 \\ -3a-b=4 \end{cases} \quad \begin{cases} a+3b=8 \\ -9a-3b=12 \end{cases}$$

$$-8a=20$$

$$-2a=5$$

$$a=-2,5$$

$$b = -3a-4 = 7,5-4=3,5$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3y-x| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq 3y-x \leq 3 & | \cdot 2,5 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 & | \cdot 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7,5 \leq 7,5y-2,5x \leq 7,5 \\ -3,5 \leq 10,5x-3,5y \leq 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -11 \leq 8x+4y \leq 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7,5 \leq 7,5y-2,5x \leq 7,5 \\ -3,5 \leq 10,5x-3,5y \leq 3,5 \end{cases}$$

Слож

Слож

$$-11 \leq 8x+4y \leq 11$$

значит, $(8x+4y)_{\max} = 11$

найти пример: $\begin{cases} 3y-x=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 9y-3x=9 \\ 3x-y=1 \end{cases} +$

$$8y=10$$

$$y = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \quad x = 3y-3 = \frac{15-12}{4} = \frac{3}{4}$$

$$8 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{5}{4} = 6+5 = 11$$

ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Рассмотрим случаи:

$$1) A = 13p^2; B = 75q^2$$

Тогда $A = 13 \cdot p \cdot p$; 13 - простое

$$A = (m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$1) m+n = 13 \quad m+n-9 = p^2$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$B = mn(m+n-3) = mn \cdot 10 = 75q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$2) m(13-m) = 15q^2$$

$\rightarrow q$ - четное, простое $\Rightarrow q = 2$

$$30 = m(13-m)$$

$$m^2 - 13m + 30 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$m_1 = 10$$

$$m_2 = 3$$

$$n_1 = 3$$

$$n_2 = 10$$

Первая пара - (3; 10) или (10; 3)

$$2) m+n = 13p \quad m+n-9 = p$$

$$m+n = 13(m+n-9)$$

$$13 \cdot 9 = 12(m+n)$$

$$13 \cdot 3 = 4(m+n)$$

$$m+n = \frac{13 \cdot 3}{4}$$

- целое \Rightarrow (или оба) (m, n) - целые \Rightarrow оба не могут быть целыми \Rightarrow не подходит

$$3) m+n = p \quad m+n-9 = 13p$$

$$m+n-9 > m+n \quad \text{м.к. } D \neq 0$$

не подх., м.к.

$$m > 0; n > 0$$

(аналогично не подходит $m+n=1; m+n-9=13p^2$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) $m+n = 13p^2$

$10 = 13p^2$

p - целое \Rightarrow

\Rightarrow противоречие

5) $m+n = p^2$

$22 = p^2$

p - целое \Rightarrow противоречие

5) $A = 75q^2 \quad B = 13p^2$

$mn(m+n-3) = 13p^2$

~~1) $m+n-3=1$ - не целое, $m+n=4$~~
~~($m+n=4$)~~

~~$mn=13p^2$~~

1) $m+n-3 = 13$

$m+n = 16$

$mn = p^2$ - не цел.

$m+n$
1+15
2+14
3+13
4+12
5+11
6+10
7+9
8+8

p^2
15
28
2-14
3-13
4-12
5-11
6-10
7-9
8

не квадрата
простого числа

2) $m+n-3 = p$

$mn = 13p$

2.1) $m=13 \quad n=p$

~~$mn = 13 + p - 3 = p$~~

$13 = 3$

противоречие

2.2) $m=13p \quad n=1$

$mn = 13p - 2 = p$

$12p = 2$

$6p = 1$

$p = \frac{1}{6}$ - не простое

3) $\begin{cases} m+n-3=1 \\ mn=13p^2 \end{cases}$

$\begin{cases} m+n=4 \\ mn=13p^2 \end{cases} \rightarrow m=1, n=3$

3.1) $m=1 \quad n=3$

$13p^2 = 1 \cdot 3$

$p^2 = \frac{3}{13}$

противоречие

3.2) $m=2 \quad n=2$

$13p^2 = 4$

$p^2 = \frac{4}{13}$

13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} m+n-3=13p \\ mn=p \end{cases}$$

$m=1$ или $n=1$.

(4n-ие арифметическое от м.ч.х)
Пусть $m=1$

$$\begin{cases} n-2=13p \\ n=p \end{cases}$$

$$p-2=13p$$

$$12p=2$$

$$p=\frac{1}{6}$$

противоречие

5) $m+n-3=13p^2$

$$mn=1$$

$$m=1 \quad n=1$$

$$-1=13p^2$$

противоречие.

Все случаи рассмотрены.

Ответ: (3; 10) и (10; 3)

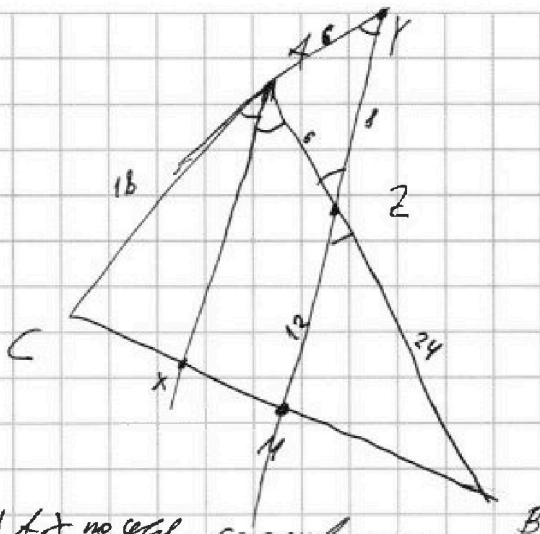
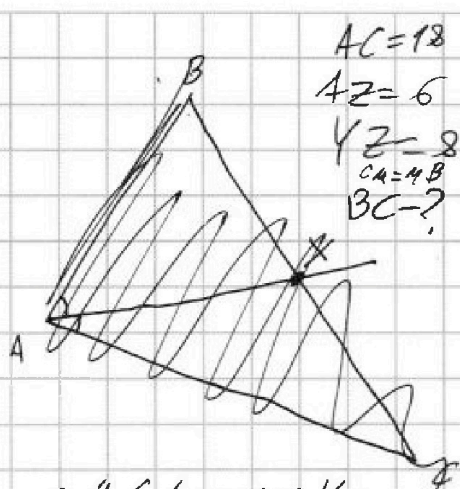


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle CAX = \angle CYM$, т.к. $YM \parallel AX$ по усл., соотв. углы
По т. Микелая для $\triangle ABC$ и прямой YM :

$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$$

для $\triangle CYM$ и прямой AX :

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MB}{BC} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{18+AY}{AY} \cdot \frac{6}{ZB} = 1 \\ \frac{18}{AY} \cdot \frac{8}{ZM} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle BZM \sim \triangle BAX \text{ (} \angle B \text{ - общ.; } \angle BAX = \angle BZM \text{)} \\ \text{т.к. } ZM \parallel AX, \text{ соотв. углы} \\ \frac{ZM}{AX} = \frac{BZ}{AB} = \frac{BM}{BX} \end{cases}$$

$\angle MZB = \angle AZY$ - верт. $\Rightarrow \triangle AYZ$ - т.о. ($\angle AYZ = \angle AZY$)

$$\Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$\begin{cases} \frac{18+6}{6} \cdot \frac{6}{ZB} = 1 \\ \frac{18}{6} \cdot \frac{8}{ZM} = 2 \end{cases}$$

$$ZB = 24$$

$$ZM = \frac{18 \cdot 8}{12} = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12$$

Ищем $\angle AVZ$ По т. синусов для $\triangle AVZ$:

$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin(\pi - 2\alpha)}$$

$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$6 \cos \alpha = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

По т. косинусов для $\triangle ZMB$:

$$BM = \sqrt{24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2} =$$

$$= \sqrt{12^2 \cdot \sqrt{4 + 1 - 4 \cdot \frac{2}{3}} = 12 \sqrt{\frac{15-8}{3}} =$$

$$= 12 \sqrt{\frac{7}{3}} \text{ Ответ: } 12 \sqrt{\frac{7}{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$~~

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 0$$~~
~~$$(4(6+5x-x^2)) = x+1$$~~

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{x^4} = y^4 - \sqrt{y^4} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x^4} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y^4}$$

$$f(a) = a^4 + 5a^2 + \sqrt{a^4} - \text{строгая}$$

возрастающая функция на области определения \Rightarrow

\Rightarrow если $f(a) = f(b)$, то $a = b$

$$f(x) = f(y)$$

$$x = y$$

Подставим $y = x$ в первое уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$6+5x-x^2 \geq 0$$

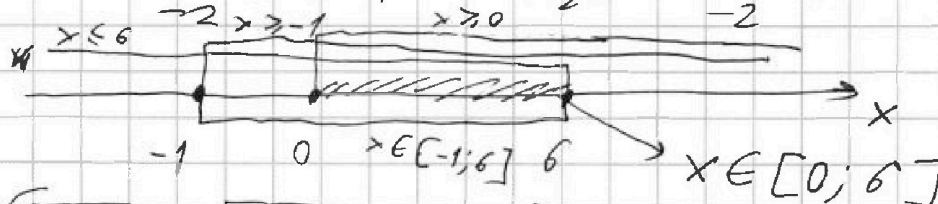
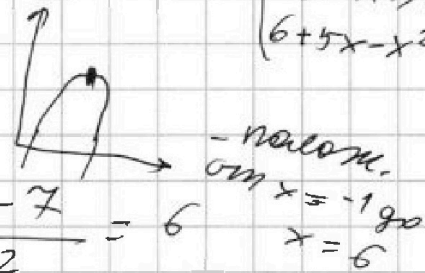
$$g(x) = -x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-5 - 7}{-2} = 6$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 6+5x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\{ x \in [0; 6] \}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = -(x+1)(x-6) = (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

~~$$2(6-x)\sqrt{x+1} = x+1 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$~~

$$\begin{cases} a-b+5 = 2ab \\ a^2+b^2 = 7 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{x+1}$$

$$b = \sqrt{6-x}$$

$$a \in [1; \sqrt{7}]$$

$$b \in [0; \sqrt{6}]$$

$$a^2 + b^2 + a - b + 5 = 2ab + 7$$

$$a^2 = x+1$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$b^2 = 6-x$$

Пусть $a-b = t$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 1$$

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$x+1 - (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$2x - 5 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$2x - 6 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = x - 3$$

$$(x+1)(6-x) = (x-3)^2$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 - 6x + 9$$

$$11x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{121 - 24}}{11}$$~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$1+5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$9 = (6-x)(x+1)$$

$$-x^2 + 5x + 6 - 9 = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$1) \sqrt{13} < 4$$

$$1) \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 4,5$$

$$2) \sqrt{13} < 5$$

$$0 < \frac{5 - \sqrt{13}}{2} < 1$$

оба корня подходят

Ответ: $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, 2,5 + \sqrt{10}$

$$t_2 = -2$$

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$x+1 - (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$2x - 5 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$2x - 9 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 0$$

$$4(x+1)(6-x) = 4x^2 - 36x + 81$$

$$24 + 20x - 4x^2 = 4x^2 - 36x + 81$$

$$8x^2 - 56x + 57 = 0$$

$$D = 56^2 - 4 \cdot 8 \cdot 57$$

$$x_{1,2} = \frac{56 \pm \sqrt{D}}{16}$$~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$3 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$9 = 4(6+5x-x^2)$$

$$4x^2 - 20x - 24 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 + 16 \cdot 15}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm 8\sqrt{10}}{8}$$

$$x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{10}$$

$$1) \sqrt{10} > 3$$

$$2,5 + \sqrt{10} < 0$$

не подходит.

$$2) \sqrt{10} < 3,5 \quad (3,5^2 = 12,25)$$

$$2,5 + \sqrt{10} < 6$$

подходит

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \times 15 \\ \hline 30 \\ 16 \\ \hline 240 \\ 1 \\ \hline 640 \\ \times 35 \\ \times 35 \\ \hline 143 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

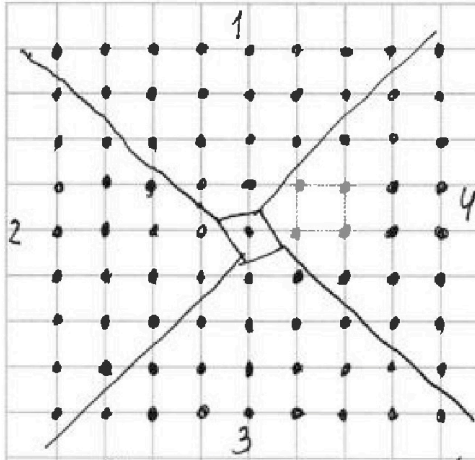


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Разобьем квадрат на 4 симметричные группы (отн. центра) и центральный узел, не входящий ни в одну из групп (всего 20 узлов). Тогда у нас будет несколько вариантов раскраски, рассмотрим их.

1) Центральный узел - белый. Тогда есть белый узел в группе N1 и способов окраски 20.

(если не в 1-ой группе, то можем повернуть так, чтобы оказался в 1-ой) узел

2) Центральный узел - черный

2.1) Белый узел в одной группе 20 · 19 способов

2.2) в разных группах

2.2.1) в разных соседних (1+2) 20 · 20

2.2.2) в разных противоположных (1+3) 20 · 20

Итого получаем $20^2 + 20^2 + 20 \cdot 19 + 20 = 3 \cdot 20^2 - 1200$

Ответ: 1200.

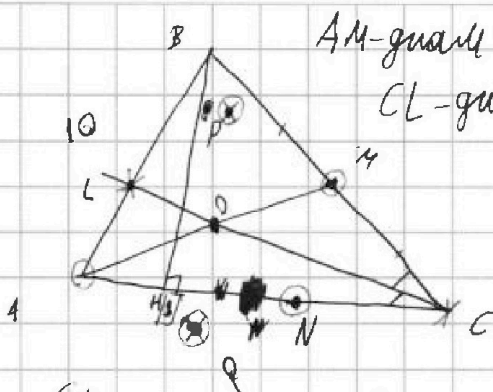
Пояснение: каждая группа получается поворотом из другой, при этом при повороте белый узел в одной группе не переходит одна в другую ⇒ рассмотрим ситуацию, когда 1 узел в 1-ой группе мы рассмотрим все ситуации, т.е. при повороте в 1-ой группе окажется белый узел



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AM-квадрат на Ω лежит: A, M, P, Q, N

CL-квадрат на ω лежит: P, Q, L

$AB=10$

$AN=8$

$PQ \parallel BH$

$(PQ \perp AC)$

$AC=?$
 $BC=?$

CL-квадрат $\Rightarrow CLQC = CLPC = 90^\circ$

AM-квадрат $\Rightarrow \angle APM = \angle ANM = \angle AQM = 90^\circ$

$PQ \parallel BH; BH \perp AC \Rightarrow PQ \perp AC$

CL-бис. $\Rightarrow \frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC}$

$\angle ANM = 90^\circ \Rightarrow NM \perp AC; NM \parallel PQ \Rightarrow$

\Rightarrow LPMNQ - впис. трапеция \Rightarrow она равнобедренная

$\Rightarrow PM = NQ$

в $\triangle CBH$: $BH \parallel NM$; M - сер. BC \Rightarrow MN - ср. лин.

$\Rightarrow HN = NC = \frac{HC}{2}$

$HC = AC - AH$

Заменим т. Тейлора:

$\triangle ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2$

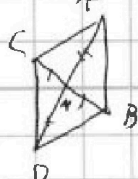
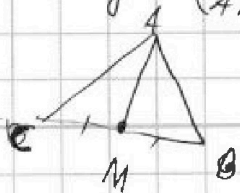
$\triangle BHC: BC^2 = BH^2 + HC^2$

$\triangle AMN: AM^2 + AN^2 = MN^2 + NM^2$

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2$
 $AB^2 - AH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2$

неизвестные: AH, AC, BC, AN

Найдём AN.



$\frac{AH + (AC - AH)}{2} = \frac{AC + AH}{2}$

(иметь $\angle CAB = \alpha$)

по т. косинусов
для $\triangle ACB$ и
для $\triangle ACD$:

$\angle CDB = \alpha$
 $\angle ACD = \pi - \alpha$
 $\angle CBD = \pi - \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} &BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \\ &(2AM)^2 = AC^2 + AB^2 + 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} +$$

$$\begin{aligned} 4AM^2 + BC^2 &= 2(AC^2 + AB^2) \\ 4AM^2 &= \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{4} \end{aligned}$$

$$AM^2 = \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 \\ BC^2 &= BH^2 + (AC - AH)^2 \\ 4AM^2 &= \left(\frac{AC + AH}{2} \right)^2 + \left(\frac{BH}{2} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

неизвестные:
AM²; AC; AH; BH; BC
AB, AC
AC = AN + NC

$$\left\{ \begin{aligned} 2(AC^2 + AB^2) - BC^2 &= (AC + AH)^2 + BH^2 \\ AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ BC^2 &= BH^2 + (AC - AH)^2 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} AH &= AC - 2NC \\ NC &= \frac{AC - AH}{2} \\ AH &= AN + \frac{AC - AH}{2} \\ 1,5AH &= AN + \frac{AC}{2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} AB^2 &= \left(\frac{2}{3}AN + \frac{AC}{3} \right)^2 + BH^2 \\ BC^2 &= BH^2 + \left(AC - \frac{2}{3}AN - \frac{AC}{3} \right)^2 \end{aligned} \right. \quad AH = \frac{2}{3}AN + \frac{AC}{3}$$

$$2(AC^2 + AB^2) - BC^2 = \left(AC + \frac{2}{3}AN + \frac{AC}{3} \right)^2 + BH^2$$

подставим AB и AN

$$\left\{ \begin{aligned} 100 &= \left(\frac{16}{3} + \frac{AC}{3} \right)^2 + BH^2 \\ BC^2 &= \left(\frac{2}{3}AC - \frac{16}{3} \right)^2 + BH^2 \end{aligned} \right. \quad BH, AC, BC?$$

$$2AC^2 + 200 - BC^2 = \left(\frac{4}{3}AC + \frac{16}{3} \right)^2 + BH^2$$

$$BH^2 = \sqrt{100 - \left(\frac{16}{3} + \frac{AC}{3} \right)^2} = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{2}{3}AC - \frac{16}{3} \right)^2} = \sqrt{2AC^2 + 200 - BC^2 - \left(\frac{4}{3}AC + \frac{16}{3} \right)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$100 - \left(\frac{16}{3} + \frac{AC}{3}\right)^2 = BC^2 - \left(\frac{2}{3}AC - \frac{16}{3}\right)^2 = 2AC^2 + 200 - BC^2 - \left(\frac{4}{3}AC + \frac{16}{3}\right)^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} 900 - (16 + AC)^2 &= 9BC^2 - (2AC - 16)^2 \end{aligned} \right. \quad 16^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} 9BC^2 - (2AC - 16)^2 &= 18AC^2 - 1200 - 9BC^2 - (4AC + 16)^2 \end{aligned} \right. \quad 3$$

$$\left\{ \begin{aligned} 900 - 256 - 32AC - AC^2 &= 9BC^2 - 4AC^2 + 64AC - 256 \end{aligned} \right. \quad \begin{matrix} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 9BC^2 - 4AC^2 + 64AC - 256 &= 2AC^2 - 1800 - 9BC^2 - 128AC - 256 \end{aligned} \right. \quad \begin{matrix} 16 \\ \times 6 \\ \hline 256 \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 34AC^2 - 96AC + 900 - 9BC^2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} -6AC^2 + 2 \cdot 96AC + 1200 + 18BC^2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$AC^2 - 32AC + 300 - 3BC^2 = 0$$

$$(AC - 16)^2 = 3BC^2 - 44$$

$$(AC - 16)^2 = 3(BC^2 - 256)$$

$$AC = \sqrt{3BC^2 - 44} + 16$$

$$\begin{aligned} 16^2 &= 256 \\ 44 & \\ 300 - 256 &= 44 \end{aligned}$$

По т. Синуса для $\triangle ABC$ и медианой CL :

$$\frac{AO}{OA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

$$\frac{AO}{OA} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$

По т. Синуса в $\triangle AOC$:

$$\frac{AO}{AC} = \frac{OC}{AC} = \frac{BC}{2AC}$$

$$\frac{BC}{2AC} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = \sqrt{3BC^2 - 447 + 16}$$

Окружность ω :

$$AP^2 + PC^2 = LC^2$$

$$LC^2 = LQ^2 + QC^2$$

если $BC = 4$

$$AC = \sqrt{47 + 16} = 18$$

$$BC = 6$$

$$AC = \sqrt{647 + 16} = 24$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

