



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 6} - \sqrt{3 - x - 2z} + 7 = 2\sqrt{y - 3x - x^2 + z}, \\ |y + 2| + 2|y - 18| = \sqrt{400 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p + 4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a < b$ ,
  - число  $b - a$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть  $q$  — знаменатель прогрессии  
Тогда  $q^8 \sqrt{uv} = \frac{\sqrt{|u|}}{\sqrt[4]{3}}$ , где  $u = 25x + 34$   
 $v = 3x + 2$

Если  $u \neq 0$  и  $v \neq 0$ , иначе 10-ый член = 0 и  
всё прогрессирует с 0, в частности  
 $2 - x = 0 \Leftrightarrow 2 = x \Rightarrow$  10-ый член  $\neq 0$

Значит  $q^8 = \frac{\sqrt{|u|}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$q^2 = \frac{1}{\sqrt{|u|}}$

$q^2 \sqrt{uv} = 2 - x$

$\sqrt{\frac{|u|}{|v|}}$

два случая:  
(всегда  $v > 0$ : из ОДЗ)

1)  $v = 3x + 2 > 0$

$x > -\frac{2}{3} > -1 > -\frac{34}{35}$

$25x + 34 = u > 0$

$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < -\frac{2}{3}$ , п.о.

$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} > \sqrt{849}$

$\frac{27 + \frac{4}{3}}{2} < 29 = \sqrt{849} < \sqrt{849}$

Следовательно переопределяем значение  $x$  с минусом  $x < -\frac{2}{3}$

2)  $v = 3x + 2 < 0$ , но  $\frac{|u|}{|v|} > 0$

Значит  $u < 0$  (такое невозможно почему  $u \neq 0$ )  
 $x < -\frac{34}{25}$

$\sqrt{-u} = 2 - x$

$-u = 4 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 23x + 38 = 0$   
 $-25x - 34$   
 $x = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 38}}{2}$

$= \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2}$

$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$   
 $\frac{23 - \sqrt{377}}{2} > 20 = \sqrt{400} > \sqrt{377}$

переопределяем

$\frac{-23 - \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$

переопределяем

$\frac{\sqrt{uv}}{|v|} = \sqrt{|u|} = 2 - x$

$u = (2 - x)^2 = 4 - 2x + x^2$   
 $25x + 34 = 4 - 2x + x^2$

$x^2 - 27x - 30 = 0$

$x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot (-30)}}{2}$

$\frac{27 \pm \sqrt{729 + 120}}{2}$

$\frac{27 \pm \sqrt{849}}{2}$

ответ:  $\frac{27 + \sqrt{849}}{2}$   
 $\frac{-23 + \sqrt{377}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3] Используя формулы косинуса 3-го и 2-го углов, переписать данное равенство в следующем виде:

$$(4p \cos^3 x - 3p \cos x) + (12 \cos^2 x - 6) + (3p \cos x + \cos x) + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

Сокращая на 4 и делая замену  $t = \cos x$ , получим:

~~$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$~~

$$(p-1)t^3 + (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = -(t+1)^3$$

$$\sqrt[3]{p-1}t = -t-1$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1$$

~~$$t = \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} = \cos x \in [-1; 1]$$~~

Если  $1 + \sqrt[3]{p-1} = 0$ , то  $t \cdot 0 = -1$ : противоречие

Значит  $t = \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$ , но  $t = \cos x \in [-1; 1]$   
 $t \neq 0$  (цифровая  $t \neq 0$ )

$$-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

при всех  $p$  из этого множества:

$$\cos x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n$$

~~$$1 + \sqrt[3]{p-1} \in [-1; 1] \setminus \{0\} \Leftrightarrow p \in [-8; 0]$$~~  
~~$$p \neq -1$$~~  
~~$$1 + \sqrt[3]{p-1} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$~~  
~~$$(p. r. 1 + \sqrt[3]{p-1} > 0)$$~~

$$\sqrt[3]{p-1} \in [-2; 0] \setminus \{-1\}$$

$$p-1 \in [-8; 0] \setminus \{-1\}$$

$$p \in [-7; 1] \setminus \{0\}$$

ответ:  $p \in [-7; 0) \cup (0; 1]$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

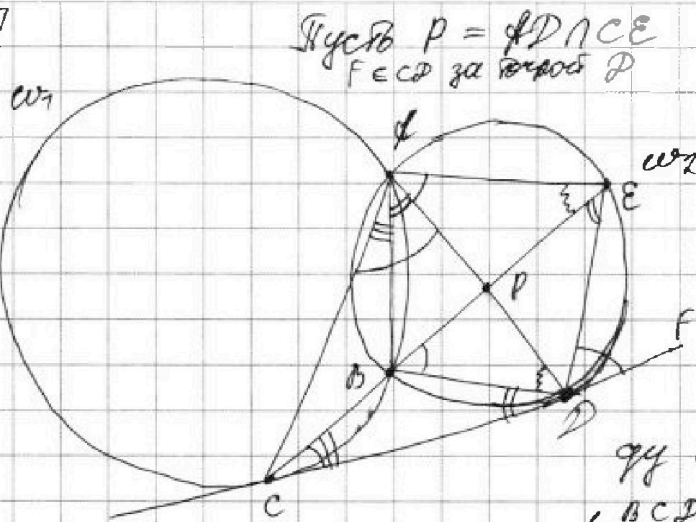
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$\frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

Давайте посчитаем углы:

По теореме об угле между хордой и касательной:

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \angle CFB \\ \angle BPC &= \angle BFD \\ \angle EPF &= \angle EFD \end{aligned}$$

Также как вписанные, опирающиеся на одну хорду,

равны:  $\angle EFD = \angle EBD$   
 $\angle FEB = \angle FDB$  и  $\angle BFD = \angle BED$

Итак,  $\angle EFD = \angle EBD = \angle CDP + \angle BPC = \angle CFB + \angle BFD$   
 $\parallel$   
 $\angle CFP$

и ещё,  $\angle CPB = \angle BFD = \angle BED$   
 $\angle BFD = \angle BED$   
 $\Rightarrow \angle CPF = \angle FED$

$\Rightarrow \triangle CFP \sim \triangle DFE$  (по двум углам)

$$\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{S_{CFP}}{S_{DFE}}}$$

Пусть  $S_{CFP} = 7x$ , тогда  
 $S_{DFE} = 20x$ , т.к.  $\frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$

Аналогично  $S_{CFP} = 7y \Rightarrow S_{DFE} = 20y$

значит  $\frac{S_{DFE}}{S_{CFP}} = \frac{S_{DFE} + S_{DFE}}{S_{CFP} + S_{DFE}} = \frac{20x + 20y}{7x + 7y} = \frac{20}{7}$

Итак,  $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$

ответ:  $\frac{2\sqrt{35}}{7}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Пусть  $P_v, P_H, P_c$  — множества всех раскрасок, обладающие вертикальной, горизонтальной и центральной симметриями соответственно

По формуле включений — исключаем:

$$|P_v \cup P_H \cup P_c| = |P_v| + |P_H| + |P_c| - |P_v \cap P_H| - |P_H \cap P_c| - |P_v \cap P_c| + |P_v \cap P_H \cap P_c|$$

$|P_v| = C_{250 \cdot 120}^4$  (раскраска определяется 4 клетками в левой части одновременно)

аналогично  $|P_H| = C_{500 \cdot 60}^4 = C_{250 \cdot 120}^4$   
(и клетки сверху)

$|P_c| = C_{250 \cdot 120}^2$  (определяется одновременно 4 клетками слева)

$|P_v \cap P_H| = C_{250 \cdot 60}^2$  \* (опр. 2 клетками в одной четверти)

$|P_H \cap P_c| = C_{250 \cdot 60}^2$  (аналогично)

$|P_v \cap P_c| = C_{250 \cdot 60}^2$  (аналогично)

$|P_v \cap P_H \cap P_c| = C_{250 \cdot 60}^2$  (аналогично)

Итого общее кол-во =  $3 C_{250 \cdot 120}^4 - 3 C_{250 \cdot 60}^2$

ответ:  $3 C_{30000}^4 - 3 C_{15000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6)  $a < b$ ,  $3 + b - a$ ,  $(a-c)(b-c) = p^2$ ,  $a^2 + b = 1000$   
( $p$  - простое)

$b > a \Leftrightarrow b - c > a - c$

Значит, ввиду того, что  $a-c, b-c \in \mathbb{Z}$ , возможны два случая:

1)  $b-c = p^2$   
 $a-c = 1$

2)  $b-c = -1$   
 $a-c = -p^2$

(остальные случаи противоречат кер-ву выше)

Разберём их отдельно:

1)  $\left. \begin{matrix} b-c = p^2 \\ a-c = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b-a = (b-c) - (a-c) \stackrel{?}{=} 3$

то ~~то~~ это ~~то~~ выражение =  $p^2 - 1$

Если  $p \neq 3$ , то  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$  (квадраты ~~даны~~  $\pmod{3}$  или  $1$  mod 3) ~~удовлетворяет~~

Значит  $p = 3$

Итак, подставляя все и только те тройки  $(a, b, c)$ , для которых удовлетворяют

$\begin{cases} a = c + 1, \\ b = c + 9, \\ a^2 + b = 1000, \end{cases}$  в зад.

Решим систему:  $b = c + 9 = (a - 1) + 9 = a + 8$   
 $a^2 + b = a^2 + a + 8 = 1000$

$a^2 + a = 992$

$a(a+1)$

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 992}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{4000 - 391}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{3964}}{2}$

Если  $\sqrt{3964} \in \mathbb{N}$ , тогда это число  $a = \frac{-1 \pm \sqrt{3964}}{2}$

$a \in \mathbb{Z}$

Итак,  $a \neq 0$   
Итак, решим кейс

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{3964}}{2} = 31$  или  $-32$

$b = 39$  или  $-24$

$c = 30$  или  $-33$

не ~~важно~~ ~~важно~~

2) Рассматривается аналогично:

( $p=3$ ) (Против)

$\begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases} \Rightarrow$

$b = c - 1 = (a + 9) - 1$

$a^2 + a + 8 = 1000$

$a = 31$  или  $-32$

$b = 39$  или  $-24$

$c = 40$  или  $-23$

Ответ!  $(31, 39, 40), (31, 39, 30),$   
 $(-32, -24, -33), (-32, -24, -23)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

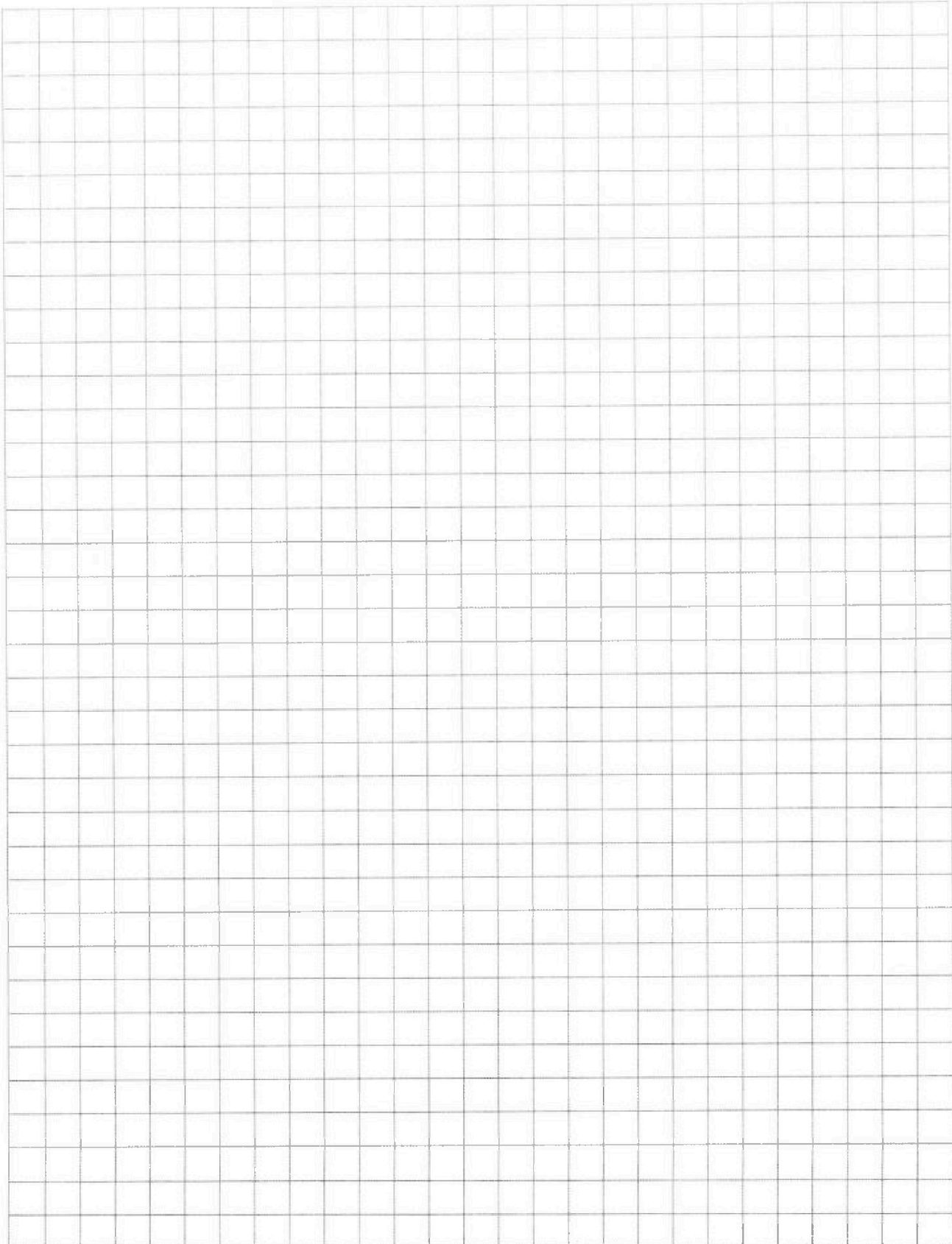
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

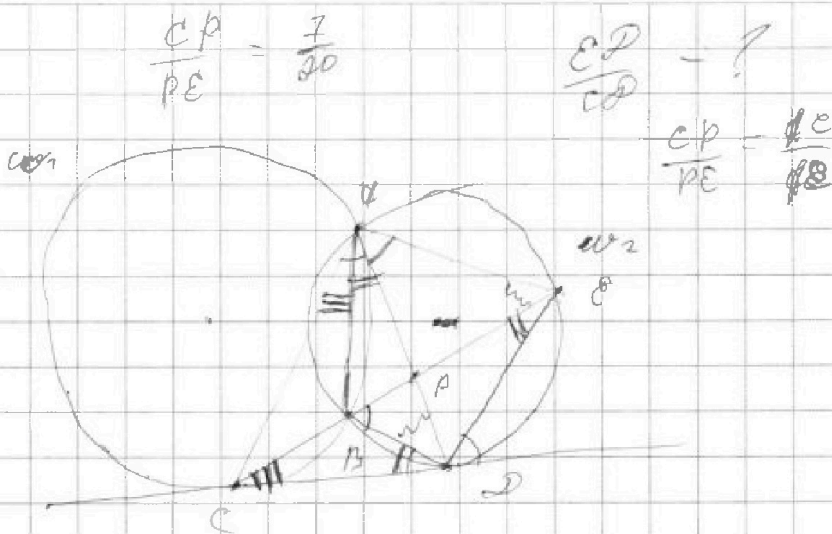
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

R  
P<sub>1</sub>  
P<sub>2</sub>  
250 · 60  
" 25 · 6 · 100  
" 150 · 100  
" 15000



cos 3α  
||  
cos(2α + α) = cos 2α cos α - sin 2α sin α

(2 cos² α - 1) cos α

|| 2 cos α (1 - cos² α)  
2 cos³ α - cos α - 2 cos α + 1 cos² α  
4 cos³ α - 3 cos α

$\frac{CP}{CE} = \sqrt{\frac{S_{CPD}}{S_{APE}}}$   
 $= \sqrt{\frac{7}{20}}$

4p cos³ α - 3p cos α + 12 cos² α - 6 cos α +  
+ 3p cos α + 12 cos α + 1 = 0 = 0

cos α = t

4p t³ + 12 cos² α + 12 cos α + 1 = 0     4p t³ + 12 t² +

$\sqrt[3]{p-1} = -1 - \frac{1}{t}$

+ 12t + 1 = 0

p t³ + 3t² + 3t + 1 = 0

p-1 ∈ [-8, 0]     (p-1)t³ + (t+1)² = 0

$\sqrt[3]{p-1} t = -t - 1$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$q^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x$$

$$q^2(2-x) = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$q^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)^3} = \sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{x}{24}} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{24}} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x$$

$$\sqrt{\frac{(25x+34)(3x+2)}{24}} = 2-x$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = (2-x)\sqrt{24}$$

$$\Rightarrow \text{sgn } (2-x) = 1$$

$$2-x > 0 \Rightarrow x < 2$$

$$x > -\frac{2}{3} \Rightarrow -1 < x < 2$$

$$x > -\frac{34}{25} \Rightarrow x > -1.36$$
  

$\begin{array}{r} \times 27 \\ 27 \\ \hline 189 \\ + 54 \\ \hline 729 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 28 \\ 28 \\ \hline 216 \\ + 56 \\ \hline 776 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 261 \\ + 58 \\ \hline 847 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$
--	--	--	---

$a, b, c: a < b$   
 $3 + b - a$   
 $(a-c)(b-c) = p^2$   
 $a^2 + b = 100$

$(b-c) - (a-c) \div 3$

~~$3968 \div 5, 100 > 25$~~   
 ~~$3968 = 7 \cdot 568 \cdot 401$~~   
 ~~$9 \cdot 273$~~

$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 31 \\ + 93 \\ \hline 981 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline 64 \\ + 96 \\ \hline 1024 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 63 \\ 63 \\ \hline 189 \\ + 328 \\ \hline 3987 \end{array}$
---	--	--

i)  $a-c=1$  ii)  $a-c=p^2$   
 $b-c=p^2$   $b-c=1$

$b > a$   
 $b-c > a-c$

i)  $a-c=1$  ii)  $a-c=-p^2$   
 $b-c=p^2$   $b-c=-1$   
 $b-a=p^2-1$   $b-a=p^2-1$   
 $p=3$   $p=3$

$\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+9 \\ a^2+b=1000 \end{cases}$   $\begin{cases} a=c-9 \\ b=c-1 \\ a^2+b=1000 \end{cases}$

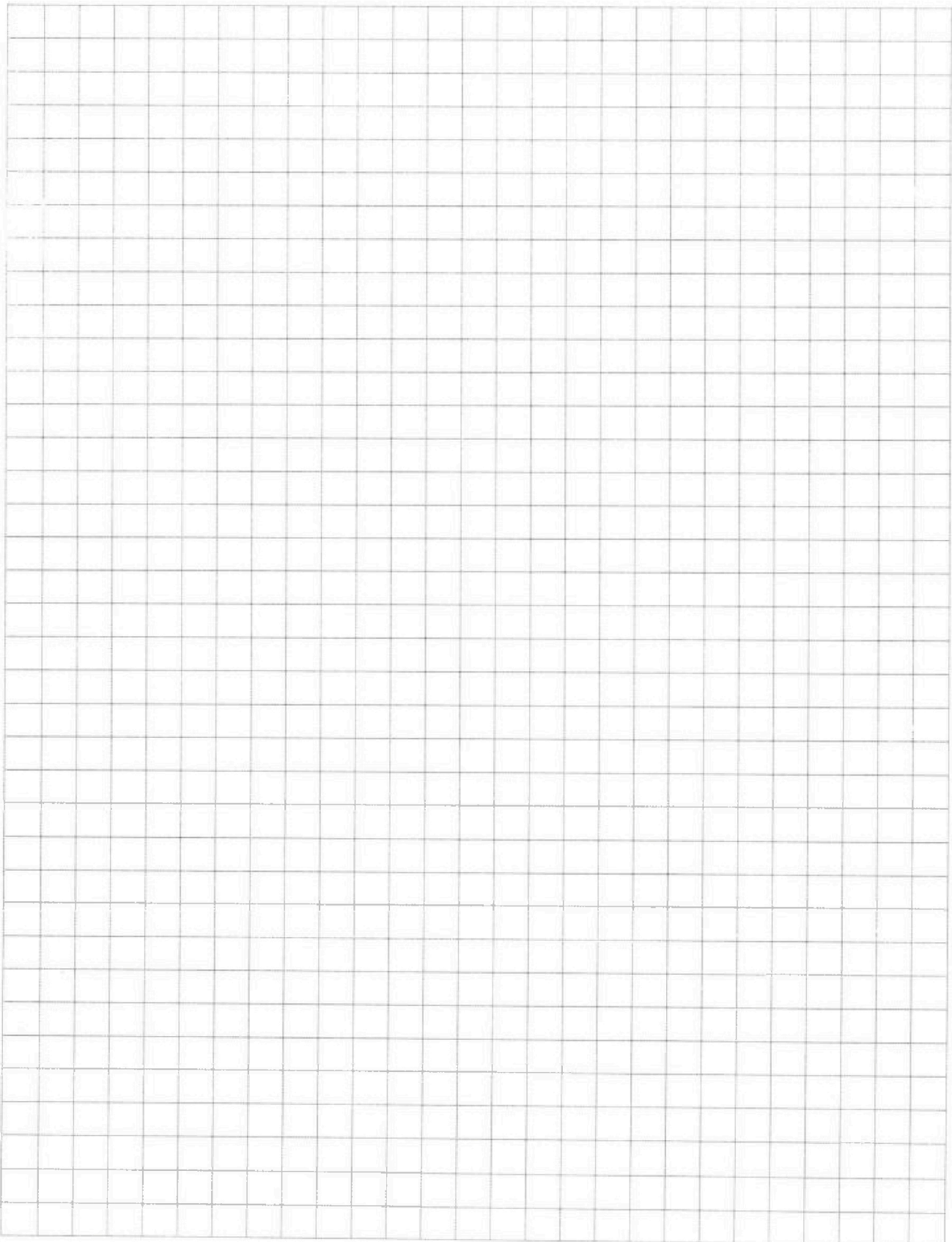


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

