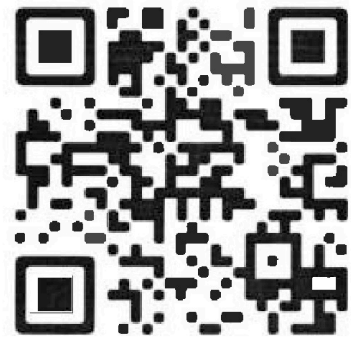




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$5. \text{ О. Р. 3. } \begin{cases} (15x+6)(x-3) \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + \frac{2}{5})(x-3) \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$$

Значит,  $x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (3; \infty)$

и ищется обратн. в 0 при  $x = -\frac{2}{5}$ , но  
 делителю не обращается в 0 при  $x = -\frac{2}{5}$ . Значит,  
 $x \neq -\frac{2}{5}$  и кор. не стационарна,  $q \neq 0; b \neq 0$

Тем. кор. задается первым членом  $b$ , и знаменателем  $q$ .

$$2. \begin{cases} b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} & (2.) \\ b_1 \cdot q^9 = x+4 & (3.) \\ b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} & (1.) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Разделим (1.) на (2.)} \\ \text{с учетом } x \in (-\infty; -\frac{2}{5}) \cup \\ (3; \infty): \end{array} \right\}$$

$$\frac{b_1 \cdot q^{11}}{b_1 \cdot q^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} ; \quad b_1 \cdot q^8 = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$$

$$q^2 = \sqrt[4]{(x-3)^2}$$

Разделим (1.) на (3.):  $\frac{b_1 \cdot q^{11}}{b_1 \cdot q^9} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$x \neq -4$ , т.к. кор. не стационарна, что мы доказали в первом пункте и  $x > -4$ ,





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. положит. число может получиться только при  
делении на ~~положит.~~ положительное на положительное.

Итак так  $x > -4$  возведём обе части в квадрат, тогда.

$$\text{выб } q^2 = \sqrt[4]{(x-3)^2}$$

$$\sqrt[4]{(x-3)^2} = \frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2} \quad \therefore \text{Если } x > 3:$$

$$x-3 = \frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2}; \quad x^2 + 8x + 16 = 15x + 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0; \quad (x-5)(x-2) = 0. \quad x=2 \text{ не подходит, т.к.}$$

$x > 3$ . Проверим  $x=5$ .  $x=5$  подходит. О. П. 3.

$$\text{Тогда } q^2 = \sqrt[4]{(x-3)^2} = \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2}; \quad q = \pm \sqrt{2}.$$

$$b_1 = \frac{x+4}{q^9} = \frac{9}{(\pm\sqrt{2})^9}. \quad \text{Тогда если } q = \sqrt{2}; \quad b_1 = \frac{9}{(\sqrt{2})^9}$$

$$\text{Если } q = -\sqrt{2}; \quad b_1 = \frac{9}{(-\sqrt{2})^9}.$$

Тогда крат. сущ. тогда  $x=5$ .

Вернёмся к (4), если  $x < 3$ , то

$$-1 = \frac{15x+6}{(x+4)^2}; \quad x^2 + 8x + 16 = -15x - 6; \quad x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$(x+22)(x+1) = 0. \quad \text{Хотят не подходит, т.к. не О. П. 3}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -22 \end{cases} \quad \text{Если } x = -1, \quad q^2 = \sqrt[4]{16}; \quad q = \pm 2.$$

$$\text{Аналогично } b_1 = \frac{\pm 2 + 4}{(\pm 2)^9}, \quad \text{также крат. сущ., значит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq -1.$$

Если  $x = -22$ , то  $-22 < -4$ , что не соотв. нашему  
уч. для уравнения. Значит,  $x \neq -22$

Таким образом,  $x = -1; 5$

Ответ:  $\{-1; 5\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.0.8.3;  $(15x+6)(x-3) \geq 0$   
 $x-3 \neq 0$   
 $x > 3$

и 12 члены обрамляются в 0 при  $x = -\frac{2}{5}$ , но  
 десятой член при этом значении в ноль не обрамляется,  
 т.к.  $-\frac{2}{5} + 4 \neq 0$ . Значит  $x > 3$  и выражение не  
 стационарна,  $a \neq 0$  и  $b_1 \neq 0$

2. Тем. упр. задания первым членом  $b_1$  и в знаменателе  $q$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} & (2.) \\ b_1 \cdot q^9 = x+4 & (3.) \\ b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} & (1.) \end{cases}$$

Далее все генерация сверху  
 имеет при  $x > 3$

Разделим (1.) на (2.):

$$\frac{b_1 \cdot q^{11}}{b_1 \cdot q^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot (x-3)^3}{15x+6} ; q^8 = \sqrt{(x-3)^4} ;$$

$$q^8 = (x-3)^2 . \text{ Тогда } q = \pm \sqrt[4]{(x-3)} .$$

3. Если  $q = \pm \sqrt[4]{x-3}$ , разделим (1.) на (3.)

$$\frac{b_1 \cdot q^{11}}{b_1 \cdot q^9} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} ; q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} . \text{ Подставим } q,$$

$$\sqrt{x-3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} . \text{ Т.к. } x > -\frac{2}{5}, \text{ имеем}$$



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} & (1.) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} & (2.) \end{cases}$$

Рассм. правую часть (2.). Макс. знач.  $\sqrt{225-z^2}$  достигается при  $z=0$ , т.к.  $z^2 \geq 0$  и  $225-z^2$  уменьш. с увеличением  $z$  по модулю! Макс. знач. равно  $\sqrt{225} = 15$ .

Рассм. левую часть. Введем функцию:  $f(y) = |y-20| + 2|y-35|$

При  $y \leq 20$ :  $f(y) = -y+20 - 2y+70$ ;  $f(y) = -3y+90$

$f(y) = -3y+90$ . Значит, при  $y \leq 20$ ,  $f(y)$  — прямая

с отрицательным коэф. при  $x$ , значит,  $f(y)$  убывает на  $(-\infty; 20]$ . Аналогично, если  $20 < y \leq 35$ , то

$f(y) = -20+y - 2y+70$ ;  $f(y) = -y+50$ . Аналогично она

убывает и мин. знач. достигает при  $y=+35$ . Тогда

$f(35) = 15$ , т.к. на  $(-\infty; 35]$  функция убывает.

При  $y > 35$  имеем  $f(y) = 3y-55$ . Значит,  $f(y)$

будет возрастать на  $(35; \infty)$ , значит, мин. знач. ф.

дост. т.к., тогда это прямая с положит. коэф. при  $x$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку мин. значение  $f(y)$  принимает в мин. значении на  $(-\infty; 35]$ , т.е. мин. знач.  $f(35) = 15$ , что было доказано ранее.  
 По аналогии образуем в 2-ой ур. систему, получаем, что мин. знач. левой части равно макс. знач. <sup>правого</sup> ~~выражения~~. Значит, они равны соответственно своим мин. и макс. значениям  $y = 35; z = 0$ . Это возможно только при  $y = 35$  и  $z = 0$ , что было доказано ранее.

1. Возвращаемся к первому ур.

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2} + z. \text{ Подставим } y=35; z=0$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{36 - (x+1)^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(36-x-1)(36+x+1)}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+4)}$$

Заметим, что  $(x+4) + (5-x) = 12$ . Возьмем 12

из обеих частей

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+4)} - (5-x) - (x+4)$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} - 6 = -(\sqrt{5-x} - \sqrt{x+4})^2$$





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 - 2\sqrt{(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2} = 0$$

Реш. Сделаем замену  $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$

$$t + 6 - t^2 = 0; \quad t^2 - t - 6 = 0; \quad (t-3)(t+2) = 0$$

$t = 3$  (1.)  
 $t = -2$  (2.)

Реш. Замена: 1. Если  $t = 3$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3$$

$\sqrt{x+7} = 3 + \sqrt{5-x}$  Возведем в квадрат, учитывая О.Д.З.:  
 $-7 \leq x \leq 5$

$$x+7 = 9 + 5 - x + 6\sqrt{5-x}$$

$2x - 2 = 6\sqrt{5-x}$  Возведем в квадрат, учитывая  $x \geq \frac{1}{2}$ .

$$4x^2 + 4 - 4x = 36 - 5 - 36x$$

$$4x^2 + 32x - 149 = 0$$

~~$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 + 2\sqrt{(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2} = 0$$~~

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 + (\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 = 0$$

О.Д.З.  $\left\{ \begin{array}{l} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 5$

Сделаем замену  $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$ .

$$t - 6 + t^2 = 0; \quad t^2 - 6t + 6 = 0; \quad t^2 + t - 6 = 0; \quad (t-2)(t+3) = 0$$

$t = 2$  (1.)  
 $t = -3$  (2.)

1. Если  $t = 2$ ,  $\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Потому } (\sqrt{x+4})^2 = (2 + \sqrt{5-x})^2$$

$$x+4 = 4 + 5-x + 4\sqrt{5-x}$$

$$2x-2 = 4\sqrt{5-x}; \text{ возведем в квадрат при } x \geq 1$$

$$(x-1)^2 = (2\sqrt{5-x})^2; \quad x^2 - 2x + 1 = 20 - 4x$$

$$x^2 + 2x - 19 = 0; \quad D = 4 + 19 \cdot 4 = 4 \cdot 20; \quad \sqrt{D} = 4\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4\sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{-2 - 4\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 \geq 5, \text{ м.к. } 1 + 2\sqrt{5} > 1 + 2\sqrt{4} = 5. \text{ Значит, } x_2 \text{ не подходит.}$$

$$x_1 < x_2, \text{ значит } x_1 \leq 5 \text{ и } x_1 \geq 1, \text{ м.к.}$$

$$2\sqrt{5} - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \geq 1.$$

$$\text{Значит, } x = 2\sqrt{5} - 1.$$

2. Если  $t = -3$ .

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} = -3; \quad \sqrt{x+4} = \sqrt{5-x} - 3. \text{ Потому}$$

$$\sqrt{5-x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

$$x+4 = 5-x + 9 - 6\sqrt{5-x}$$

возведем в кв., учитывая

$$(6\sqrt{5-x})^2 = (7-2x)^2; \quad 7-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3,5$$

$$36 \cdot 5 - 36x = 49 + 4x^2 - 28x$$

$$4x^2 + 8x - 131 = 0$$

$$D = 64 + 16 \cdot 131 = 16 \cdot (4 + 131) = 16 \cdot 135 = 16 \cdot 9 \cdot 15$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
8 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta D = 12\sqrt{15}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 12\sqrt{15}}{8}; \quad x_2 = \frac{-8 - 12\sqrt{15}}{8}$$

$$x_1 \approx 3,5, \text{ м.к. } 1,5\sqrt{15} - 1 > 1,5\sqrt{9} - 1 = 4,5 - 1 = 3,5$$

Значит,  $x_1$  не подходит

$$x_2 < x_1, \text{ значит } x_2 \leq 3,5. \text{ и } x_2 \geq -7, \text{ м.к.}$$

$$-1 - 1,5\sqrt{15} \geq -1 - 1,5\sqrt{16} = -7$$

$$\text{Итаким образом, } x = -1,5\sqrt{15} - 1.$$

$$\text{Итого ответами будут: } (-1,5\sqrt{15} - 1; 35; 0) \text{ и } (2\sqrt{5} - 1; 35; 0)$$

$$\text{Ответ: } (-1,5\sqrt{15} - 1; 35; 0); (2\sqrt{5} - 1; 35; 0).$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
9 из     

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

~~$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$~~

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$

Сделаем замену  $t = \cos x$ ,  $t \in [-1; 1]$  и где  $t$  возрастает, т.е. решим  $\cos x$  на  $[\pi; 2\pi]$

Введем функцию  $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

$$f'(t) = 4 \cdot 3t^2 - 2 \cdot 6t + 3 = 12t^2 - 12t + 3 = 12(t - 0,5)^2 \geq 0.$$

$f'(t) \geq 0$  на всей О.О.З. Значит,  $f(t)$  - монотонно возрастающая. Значит, м.к.  $\cos x \in [-1; 1]$ , то

$f_{\min}(t)$  принимает мин. знач. при  $t = -1$ ,  $f(-1) = -10$ , и макс. знач. соответственно при  $t = 1$ ;  $f(1) = 4$ .

$f(t)$  - непрерывная, т.к.  $\cos x$  - непрерывна, значит,

$f(t) \in [-10; 4]$ . Тогда  $(4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3) \in [-10; 4]$ , значит,  $p \in [-10; 4]$ .

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \quad | : 2$$

$$2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1,5 \cos x + 1,5 = p$$

$$(2 \cos x)^3 - 3 \cdot 4 \cos^2 x + 3 \cdot 2 \cos x - 1 = p - 1,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
10 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2\cos x - 1)^3 = p - 7;$$
$$2\cos x = 1 + \sqrt[3]{p-7}; \quad \cos x = \frac{1 + \sqrt[3]{p-7}}{2}.$$

П.к. ~~то~~ при любом  $p \in [-10; 4]$  мы имеем

решение, что было доказано ранее, что

$$\begin{cases} x = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{p-7}}{2}\right) + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{p-7}}{2}\right) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: 1.  $p \in [-10; 4]$

2.  $x = \pm \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{p-7}}{2}\right) + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$  при

$p \in [-10; 4]$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
12 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Аналогично с пунктом 2,  $\angle DAE = \angle EDM$  обозначим точкой  $M$  точку пересечения прямой  $CD$  на продолжении за  $D$ , т.к.  $\angle DAE$  равен половине дуги  $DE$ , на которую опирается, а  $\angle EDM$  также равен половине дуги  $DE$ , т.к.  $\angle EDM$  — угол между касат.  $EDM$  и хордой  $ED$ , стягивающей дугу  $DE$ .  $\angle DAE = \angle EDM = \varphi$ .

5.  $\angle CDE = 180^\circ - \varphi$ , т.к.  $\angle CDE$  смежен с  $\angle \varphi$ .

В  $\triangle CDE$ ,  $\angle CDE = 180^\circ - d - \beta$ . Приравняем  $\angle CDE$  из обоих выражений, получаем:  $180^\circ - \varphi = 180^\circ - d - \beta$ , значит  $d + \beta = \varphi$ , и значит,  $AO$  — бисс.  $\triangle CAE$ , т.к.  $\angle CAO = \angle OAE$ , т.к.  $\angle CAO = \angle CAB + \angle BAO = d + \beta = \varphi$ , а  $\angle OAE = \varphi$  тоже. По св-ву бисс.,  $\frac{CO}{OE} = \frac{CA}{AE}$ .  
Значит,  $\frac{CA}{AE} = \frac{9}{25}$ .

6.  $\angle AED$  — впис в окр.  $\omega_2$  и равен половине дуги на которую опирается, т.е.  $\angle AED = \frac{1}{2} \sphericalangle AD$ . Аналогично  $\angle ADC$  равен  $\frac{1}{2} \sphericalangle AD$ , так как угол между касат. и хордой, которую стягивает дуга. Значит,  $\angle AED = \angle ADC$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

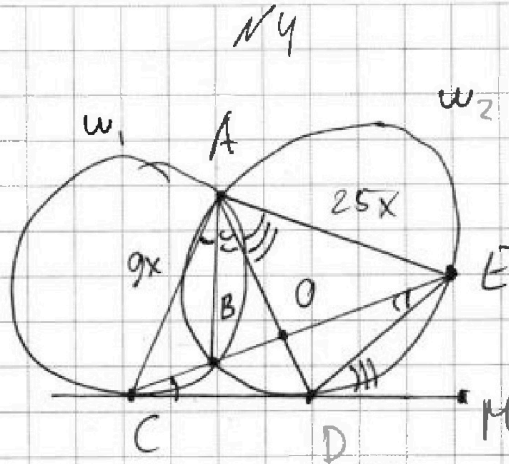
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
11 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

1. Проведем  $AB$ ,  
 $DE$ ,  $AC$  и  $EA$



2. Угол между касательной  $CP$  и хордой  $CA$  равен половине дуги, на которую опирается хорда. Тогда  $\angle BCD = \frac{1}{2} \nu CB$ . При этом  $\angle BAC$  опирается на ту же хорду и равен тоже  $\frac{1}{2} \nu CB$ , т.к. вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.  $\angle BCD = \angle BAC = \frac{1}{2} \nu CB = \alpha$  (радиан. меньшая дуга  $CB$ )

~~3. Аналогично угол  $\angle CDA$  между кас.  $CD$  и хордой  $AD$  равен половине дуги  $AD$ , и угол  $\angle DAB$  равен половине дуги~~

3.  ~~$\angle BED$~~   $\angle BED = \angle BAD$ , т.к. это впис. угол в отр.  $\omega_2$ , опирающийся на ту же дугу  $BD$  и лежащий по одну сторону от нее.  $\angle BED = \angle BAD = \beta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
13 из \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $\triangle CAD$  ~~равно~~ подобен  $\triangle EAD$  по 2-м углам:  
( $\angle AED = \angle ADC$ ;  $\angle CAD = \angle DAE = \varphi$ ). Составим

Отношения из подобия для соответ. сторон:

$$\frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}. \quad \text{П.к. } \frac{CA}{AE} = \frac{9}{25}, \text{ обозначим } \begin{matrix} CA = 9x \\ AE = 25x \end{matrix}$$

Тогда из 1-го ур.,  $AD^2 = CA \cdot AE = 25x \cdot 9x$ ;  $AD = 15x$

Подставим во 2-е ур.,  $\frac{CD}{DE} = \frac{15x}{25x} = \frac{3}{5}$ .

Тогда  $\frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$ .

Ответ:  $\frac{5}{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
14 из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5.

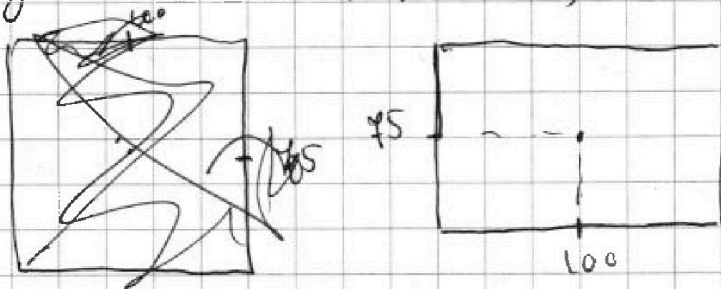
1. Равны. Сл.м.м. относительно центра:

Центр имеет координаты:  $(15, 5; 100, 5)$

$(15; 100)$

Еще за координату  
Еще за координату

границу клетки



Поскольку для каждой поставленной т. в соответствии  
будет ставиться одна клетка сл.м.м. точка.

Нам требуется определить какой способ расставить  
и точки, не чтобы они не повторялись. Таким

образом, выбираем 4 клетки из  $150 \cdot 200 - 1$ ,

не считая центр:  $C_{30000-1}^4 = C_{29999}^4$ , и делаем так,

т.к. при таком подходе мы исключим случаи  
одинаковые случаи:  $\frac{C_{29999}^4}{4}$ .

2. Равны. Сл.м.м. отн. ср.м.м.; требуется в порядке

кв. раст. и т. Еще сл.м.м. отн. ср.м.м. на стороне  
150, но способ  $C_{200-1}^4$  выбрать клетки, всего к.

на выбор:  $200 \cdot 75 - 200 = 200 \cdot 74$ . Аналогично,  $C_{150-1}^4$ . Аналогично

то для 200:  $200 \cdot 150 - 150 = 150 \cdot 199$ ;  $C_{199-1}^4$ ;  $C_{150-1}^4$ . Аналогично,  $C_{14800}^4 + \frac{C_{29999}^4}{4} + C_{99-150}^4$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + \sqrt{5-x} = -x^2 - 2x + 35$$

$$\cancel{x+7} + 36 + 12\sqrt{x+7} = 4(x+7)(5-x) + 5-x + 4\sqrt{x+7} \cdot (5-x)$$

$$\cancel{2x+38} + 12\sqrt{x+7} = (5-x)(1+4x+28) + 4\sqrt{x+7} \cdot (5-x)$$

$$\sqrt{x+7} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + \sqrt{5-x}$$

$$\cancel{x+7} + 36 + 12\sqrt{x+7} = 4(x+7)(5-x) + 5-x + 4\sqrt{x+7} \cdot (5-x)$$

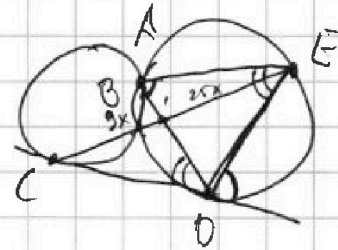
$$2x+38 + 12\sqrt{x+7} = 20x + 140 - 4x^2 - 28x + 4\sqrt{x+7}(5-x)$$

$$\sqrt{x+7} = x+7 = 5-x ; x = -1.$$

$$x+7 = 5$$

$$2x+12$$

$$1+2\sqrt{5}$$



$$x+7 + 5-x = 12$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x - 3\cos^2 x + 3\sin^2 x = p$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x - 6\cos^2 x + 3 = p$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 = p$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

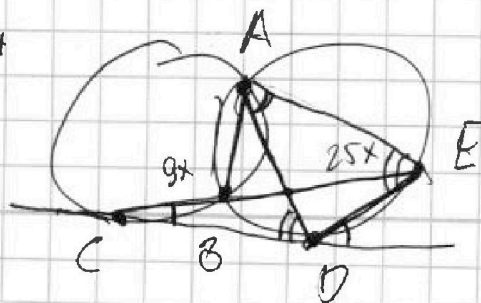
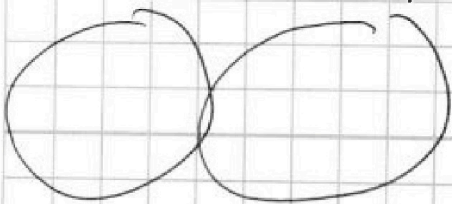
$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$$

$$8t^3 - 12t^2 + 6t + 6 = p$$

$$t^2 - t + 0,25 = (t-0,5)^2$$

$$(2t-1)^3 = 8t^3 - 3 \cdot 4t^2 + 2t \cdot 3 - 1 = p-7$$

$$2t = \sqrt[3]{p-7} + 1$$



$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 200 \\ \hline 14800 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается неровником и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q_2 = b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}}; \quad b_{10} = x+4;$$

$$b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \quad x > 3; \quad 15x+6 > 0$$

$$b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}};$$

$$b_1 \cdot q^9 = x+4; \quad b_1 \cdot q^4 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$b_1 \cdot q^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3) \cdot (x-3)^2}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^2} = x-3$$

$$q = (x-3)^{\frac{3}{16}}; \quad b_1 \cdot q^3 \cdot b_1 \cdot q^4 = \frac{15x+6}{x-3} = 3 \frac{5x+2}{x-3}$$

$$b_1 \cdot (x-3)^{\frac{24}{16}} = x+4$$

$$\frac{15x+6}{x-3} \cdot q^2 = x+4; \quad q^2 = \pm \sqrt{\frac{(x-3)(x+4)}{15x+6}} \quad 1,5\sqrt{15}-1$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3;$$

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9;$$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{12}$$

$$(q^2)^4 = (x-3)^2$$

$$q^8 = \frac{b_{12}}{b_4}$$

$$q^8 = \frac{b_{12}}{b_4} = (x-3)^2$$

$$q^4 = 4(x-3); \quad q = \sqrt[4]{4(x-3)}$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$$\frac{(15x+6)^2 \cdot (x-3)^2}{(x+4)^4}$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2$$

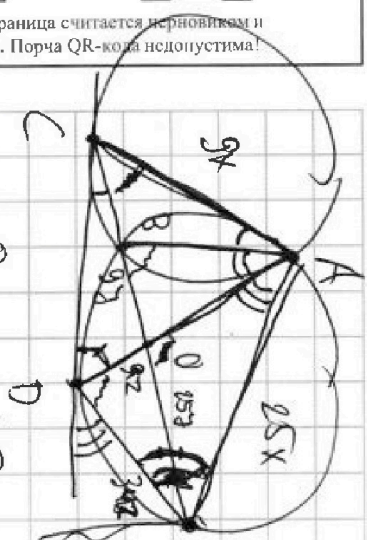
$$x^2 + 4x + 49 - 15x$$

$$180 - 49 = 131$$

$$135 = 5 \cdot 63$$

$$9 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 9 \\ \hline 5 \end{array}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

право возьмем в квадрат и вычтем ~~x-3~~ x-3;

$$I = \frac{15x+6}{(x+4)^2}; \quad (x+4)^2 = 15x+6;$$

$$x^2 + 8x + 16 = 15x + 6; \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-5)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (I.)} \\ x=5 \text{ (II.)} \end{cases}$$

I. Если  $x=2$ ,  $q = x \geq -4$ ;  $z \in [-15; 15]$

$$y-20 + 2y-70 = 3y-90 \quad 0 \leq 90-3y$$

$$|20-y| + |70-2y| \geq 90 \quad -3y \leq 15 \quad y \leq 30$$

$$3y-90 \leq 15 \quad 45 \leq 3y \quad y \geq 25$$

$$y \leq 30 \quad 3y-90 \geq 0 \quad y \geq 30$$

$$f(y) = |y-20| + |2y-70| + |2y-70|$$

$$y \leq 20; \quad f(y) = 20-y+70-2y = -3y+90$$

$$y \leq$$

$$36 - (x+1)^2 = 3(6-x+1)(6+x+1) = \sqrt{\underset{1}{5-x}} \underset{4}{(7+x)}$$

$$a+b \quad a-b+6 = 2ab$$

$$\sqrt{5-x} = \frac{\sqrt{x+7}+6}{2\sqrt{x+7}}$$

$$a+b = 2ab+6$$

$$b = \frac{a+6}{2a+1}$$