



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

где (\*\*):  $D = 23^2 - 4 \cdot 22 = 21^2$

$$x_3 = \frac{-23 + 21}{2} = -1$$

$$x_4 = \frac{-23 - 21}{2} = -22$$

Итого:  $x_1 = 5$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = -22.$$

В задании есть ОДЗ:  $(15x+6)(x-3)^3 > 0$ , поэтому  $x_2 = 2$  не подходит.

ответ:  ~~$x_1 = 5, x_2 = 2, x_4 = -22$~~

т.к. в условии дана лев. прогр. и  $b_1 > 0$  и  $b_{12} > 0$ ,

то  $b_{10} > 0$ , поэтому  $x_4 = -22$  не подходит ( $-22 + 4 < 0$ )

ответ:  $x = 5, x = -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

из условия:

$$\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^{4-1} \\ b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1} \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{12-1} \end{cases} \quad \begin{cases} b_4 = b_1 \cdot a^3 & (1) \\ b_{10} = b_1 \cdot a^9 & (2) \\ b_{12} = b_1 \cdot a^{11} & (3) \end{cases}$$

(3) : (2) и (2) : (1), тогда

$$\begin{cases} \frac{b_{12}}{b_{10}} = q^{11-9} \\ \frac{b_{10}}{b_4} = q^{9-3} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2 \\ \frac{b_{10}}{b_4} = q^6 \end{cases} \quad \text{отсюда}$$

$$\left(\frac{b_{12}}{b_{10}}\right)^3 = \frac{b_{10}}{b_4}; \quad b_{12}^3 \cdot b_4 = b_{10}^4, \quad \text{т.е.: } (\sqrt{(15x+6)}(x-3))^3 \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{(15x+6)^3(x-3)^3(15x+6)} = (x+4)^4$$

$$\sqrt{(15x+6)^4} = (x+4)^4$$

$$(15x+6)^2 = (x+4)^4$$

$$(x+4)^4 - (15x+6)^2 = 0$$

$$((x+4)^2 - (15x+6))((x+4)^2 + 15x+6) = 0$$

$$\begin{cases} (x+4)^2 - (15x+6) = 0 \\ (x+4)^2 + 15x+6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 8x + 16 - 15x - 6 = 0 \\ x^2 + 3x + 16 + 15x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 & (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 23x + 22 = 0 & (*) \end{cases}$$

решая (\*):  $D = 49 - 4 \cdot 10 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$   
 $x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при  $t_1: -x^2 - 2x + 35 = 4$

$$x^2 + 2x - 35 + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 31 = 0$$

$$D_1 = 1 + 31 = 32$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{32}$$

Проверим корни:

$$x = -1 + 4\sqrt{2}: \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$x+7 > 5-x > 0$$

$$-1 + 4\sqrt{2} + 7 > 5 + 1 - 4\sqrt{2} \quad \text{---} \oplus$$

$$x = \frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2}; \quad x+7 < 5-x < 0$$

$$\frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2} + 7 < 5 - \frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$-1 + 3\sqrt{5} + 14 < 10 + 1 - 3\sqrt{5} \quad \text{---} \otimes$$

ответ:  $\left(\frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2}; 35; 0\right), \left(-1 + 4\sqrt{2}; 35; 0\right)$

$$x = -1 + 3\sqrt{7}: \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \cdot \frac{3}{2} - 6 = -3 < 0 \quad x = -1 - 3\sqrt{7}:$$

$$x+7 < 5-x < 0$$

$$x+7 < 5-x < 0$$

$$7 - 1 + 3\sqrt{7} < 5 + 1 - 3\sqrt{7} < 0 \quad \text{---} \oplus$$

$$-1 - 3\sqrt{7} + 7 < 5 + 1 + 3\sqrt{7} < 0 \quad \text{---} \ominus$$

ответ:  $\left(-1 + 3\sqrt{7}; 35; 0\right), \left(-1 + 4\sqrt{2}; 35; 0\right)$

при  $t_2: -x^2 - 2x + 35 = \frac{3}{2}$

$$x^2 + 2x - 35 + \frac{3}{2} = 0 \quad | \times 2$$

$$2x^2 + 2x - 70 + 3 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 67 = 0; \quad D = 2 + 2 \cdot 67 = 138$$

$$D_1 = 1 + 2 \cdot 67 = 135 = 5 \cdot 3^3 = (3\sqrt{15})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{15}}{2}$$

$$D_2 = 4 + 2 \cdot 67 = 138 = (\sqrt{27} \cdot 3)^2 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6\sqrt{7}}{2}$$

$$x = -1 - 4\sqrt{2}: \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$x+7 > 5-x > 0$$

$$-1 - 4\sqrt{2} + 7 > 5 + 1 + 4\sqrt{2} \quad \text{---} \ominus$$

$$x = \frac{-1 - 3\sqrt{15}}{2}; \quad x+7 < 5-x < 0$$

$$\frac{-1 - 3\sqrt{15}}{2} + 7 < 5 - \frac{-1 - 3\sqrt{15}}{2} < 0$$

$$-1 - 3\sqrt{15} + 14 < 10 + 1 + 3\sqrt{15} \quad \text{---} \oplus$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3x^2} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} \quad (1)$$

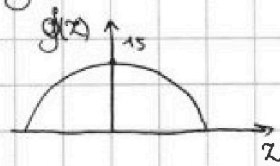
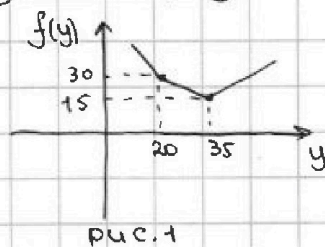
$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-x^2} \quad (2)$$

(2): пусть  $|y-20| + 2|y-35| = f(x)$   
 $\sqrt{225-x^2} = g(x)$

$f(y)$  - это график, состоящий из "кусочков" прямых, т.е. получается ломаная.

Точки перегиба этой ломаной при  $y=20$  и  $y=35$  при этом  $f(20)=30$ ,  $f(35)=15$  (см. рис. 1)

~~$g(x)$~~   $g(x)$  - у этого графика есть ОДЗ:  $x \in [-15; 15]$   
 $g(-15)=0$ ,  $g(15)=0$ ,  $g(0)=15$  (см. рис. 2)



тогда  $f(y) \geq 15$   
 $g(x) \leq 15$  - отсюда получим, что ур-е (2) имеет только одно реш. при  $y=35, x=0$ .

$y=35, x=0$  - подставим эти значения в (1):

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}; \quad \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

- неравенство  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = c$  переход, проверка корней

$$x+7 - 2\sqrt{35-2x-x^2} + 5-x = 4(\sqrt{35-2x-x^2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6\sqrt{35-2x-x^2} + 36$$

пусть  $\sqrt{35-2x-x^2} = t$

$$12 - 2t = 4t^2 - 24t + 36$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad | :2$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 5^2 \quad \text{тогда } t_1 = \frac{11+5}{2 \cdot 2} = 4, \quad t_2 = \frac{11-5}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1): \sqrt[3]{4(p-2)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}(p-2) \leq \frac{1}{8}$$

$$p-2 \leq \frac{1}{2}$$

$$p \leq \frac{1}{2} + \frac{4}{2}$$

$$p \leq 4$$

$$(2): \sqrt[3]{4(p-2)} \geq -1 + \frac{1}{2} \geq -1$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}(p-2)} \geq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{4}(p-2) \geq -\frac{27}{8}$$

$$p-2 \geq -\frac{27}{2}$$

$$p \geq -10$$

Итого:  $\begin{cases} p \leq 4 \\ p \geq -10 \end{cases} \Rightarrow p \in [-10; 4]$

$$\cos x = t \Rightarrow x = \pm \arccos(t) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}(p-2)}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ответ:  $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}(p-2)}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, p \in [-10; 4]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4(\cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x) = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p - 3$$

$$\text{пусть } \cos x = t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 + 3 = p$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 + \frac{1}{2} + 3 = p$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 = p - \frac{7}{2}$$

$$\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}}$$

$$\sqrt[3]{4t} = \frac{2}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt[3]{4 \cdot 16}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt[3]{4^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)}$$

$$t = \frac{2}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$\text{отсюда } \begin{cases} \frac{2}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)} \leq 1 & (1) \\ \frac{2}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)} \geq -1 & (2) \end{cases}$$



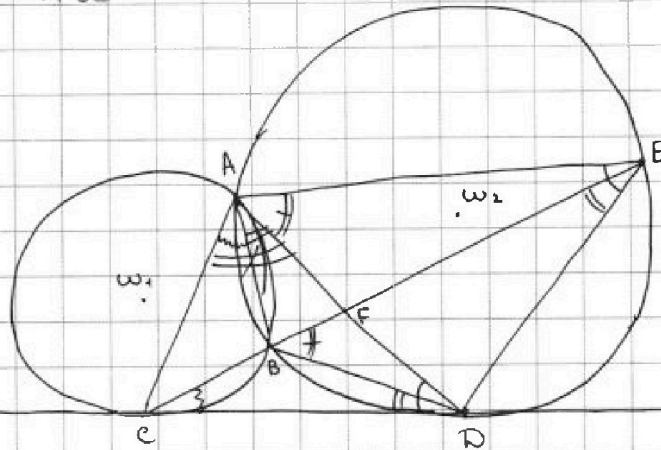
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$CF:FE=9:25$ ,  $AD \cap CE = F$   
 $ED:CD=?$



1. проведем  $AB$  и  $BD$
2.  $\angle ADE = \angle CDB = \angle BED$  (углы между касат. и хорд.)  
 $\angle BAD = \angle BED$  (опир. на  $\cup BD$ )
3.  $\angle DCE = \angle CAB$  (углы между касат. и хорд.)
4.  $\angle DCE + \angle CDB = \angle DBE$  (внеш. уг.  $\triangle CBD$ )  
 $\angle DBE = \angle DAE$  (опир. на  $\cup DE$ )
5. Получим, что  $\angle CAB + \angle BAD = \angle DBE = \angle DAE \Rightarrow AF = FC$ .  
 $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$  (по свойству бис.)

6.  $\angle CAD = \angle DAE$ ,  $\angle CDA = \angle DEA$  (углы между касат. и хорд.)  
 $\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$  (по 2-ум уг.)  $\Rightarrow \frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD = \sqrt{CA \cdot AE}$

пусть  $AC = 9x$ ,  $AE = 25x \Rightarrow AD = \sqrt{9 \cdot 25x} = 15x$

7. из подобия  $\triangle CAD$  и  $\triangle DAE$ :  $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{15x}{25x} = \frac{3}{5} = \frac{CD}{DE}$

т.е.  $\frac{DE}{CD} = \frac{5}{3}$

ответ:  $\frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но также нужно учесть, что есть точки, симметричные отн.  $Ox, Oy$  и  $z. O$  - одновременно. Эти кол-во этих точек (способов такой раскраски) мы учли 3 раза.

такие точки  $(x; y) \rightarrow \begin{matrix} (-x; y) \\ (x; -y) \\ (-x; -y) \end{matrix}$  - обладают следующей симметрией  
каждый  $x > 0, y > 0$ , тогда кол-во способов выбрать такие точки  $C_{150 \cdot 200}^2 = C_{7500}^2$   
- четверть прямоугольника

Итого:  $3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$

ответ:  $3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$



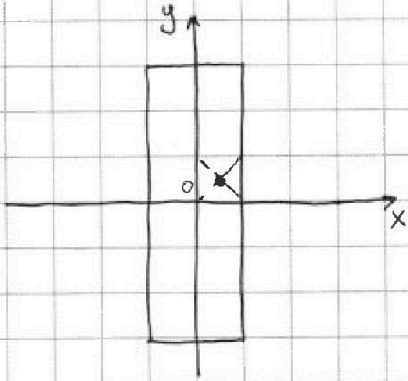
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зафиксируем „исследуемый“ прямоугольник. Пусть его центр находится в начале координат. (см. рис.)  
центр (0,0).



тогда симметричное отображение — это отражение отн. осей  $Ox$ ,  $Oy$  и центра.

~~точки, отн. пусть центр~~

пусть точка пересечения диагоналей квадрата клетки — это координата этой клетки.

(между клеточкой и этой точкой можно установить взаимнооднозначное соответствие)

↗ Симметричное отображение: отн.  $Ox$ :  $(x; y) \rightarrow (x; -y)$   
отн.  $Oy$ :  $(-x; y) \rightarrow (x; y)$   
отн.  $u. O$ :  $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$

тогда кол-во раскрасок будет „эквивалентно“ выбору 4 точек отн.  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $u. O$ .

отн.  $Ox$ : пусть выберем  $4$  точки, где  $x \in (-\infty; +\infty)$ ,  $y > 0$

тогда кол-во раскрасок  ~~$C_{15000}^4$~~   $C_{15000}^4 = C_{15000}^4$

аналогично отн.  $Oy$ :  $4$  выберем  $4$  точки, где

$x > 0$ ,  $y \in (-\infty; +\infty)$  тогда кол-во раскрасок  $C_{15000}^4 = C_{15000}^4$

аналогично отн.  $u. O$ :  $4$  выберем точки, где

$x \in (-\infty; +\infty)$ ,  $y > 0 \Rightarrow$  кол-во раскрасок  $C_{15000}^4 = C_{15000}^4$

Итого:  $3 C_{15000}^4$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $p$  - простое число  
 $(a-c)(b-c) = p^2$ ; по опр. простого числа,  $p$  кратно самому себе и 1.

отсюда

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} (1) \quad \text{по усл. } a > b, \text{ поэтому ситуа-} \\ \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} (2) \quad \text{ции (1) и (2) невозможны.} \\ \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} (3) \quad \text{поэтому получим:} \\ \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} (4) \quad \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} (*) \\ \begin{cases} a-c=p^2-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} (**)$$

для (\*):  $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow a-b = (p-1)(p+1)$  по усл.  $a-b \div 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (p-1)(p+1) \div 3$ , но из 3-ех подряд идущих чисел одно  $\div 3 \Rightarrow p \div 3$  (т.к.  $p$  - простое и  $p \div 3$ , то  $p=3$ )

тогда  $a-b = 3^2 - 1 = 8$

по усл.  $a+b^2 = 820 \Rightarrow \begin{cases} a-b=8 \Rightarrow a=b+8 \\ a+b^2=820 \end{cases}$

$b^2 + b - 812 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 28 \Rightarrow a_1 = 36, c_1 = 287 \\ b_2 = -29 \Rightarrow a_2 = -21, c_2 = -28, -30 \end{cases}$

для (\*\*): аналогично получаем, что  $p \div 3$

тогда  $\begin{cases} a-b=8 \Rightarrow a=b+8 \\ a+b^2=820 \Rightarrow b^2+b=812 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 28 \Rightarrow a_3 = 36, c_3 = 36+1=37 \\ b_4 = -29 \Rightarrow a_4 = -21, c_4 = -29+1=-28 \end{cases}$

ответ:  ~~$(36; 28; 28)$~~   
 ~~$(-21; -29; -28)$~~   
 $(36; 28; 37)$   
 $(-21; -29; -28)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

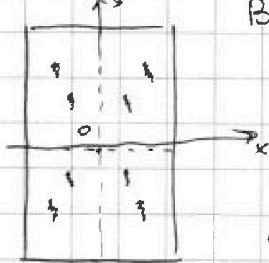


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зафиксируем прямоугольник клетки (центр клетки)



Выбрать 4 квадратика с одной плоскости (0x)

$$C_{150 \cdot 200}^4$$

аналогично с другой (0y)

$$C_{150 \cdot 200}^4$$

отн. центральной сим.  $C_{150 \cdot 200}^4$

симметрия

отн. x:  $(x; y) \rightarrow (x; -y)$

отн. y:  $(x; y) \rightarrow (-x; y)$

отн. 0:  $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$

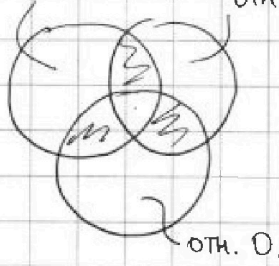
Итого:  $C_{150 \cdot 200}^4$

$C_{150 \cdot 200}^4 \rightarrow \frac{1}{4}$  повтор.

Т. о сим. отн. x, y, 0:  $C_{150 \cdot 200}^2$

отн. 0x

отн. 0y



отн. 0.

$(a-c)(b-c) = p^2$ , p - прост. чис.

по опр. p: p кратно себе и 1

$p=1$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

(1): 0

$a-b=$

$b-a = (p^2-1) = (p-1)(p+1)$

$150 \cdot 50$

$\begin{cases} a-c=p-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow a=b+8$

$a+1=c$

$\frac{828}{4} = 207$

$\frac{7500}{4} = 1875$

$a-b=p^2-1 \quad b-8+b^2=820$

$b-1=c$

$b^2+b-820=0 \Rightarrow b^2+b-828=0$

$-29$

$b=57^2$

$b^2+b-828=0$

аналогично

$\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$  - отриц. чис.

$D=1+4 \cdot 828=$

$820-8=812$

$a_1=b+8=28+8=$

$D=57^2$

$b_1 = \frac{-1+57}{2} = 28$

$a = -29+8 = -21$

$b_2 = \frac{-1-57}{2} = -29$

$b+1=c$   
 $28+1 \quad -29+1$

$\frac{349}{57} = 6 \frac{1}{3}$

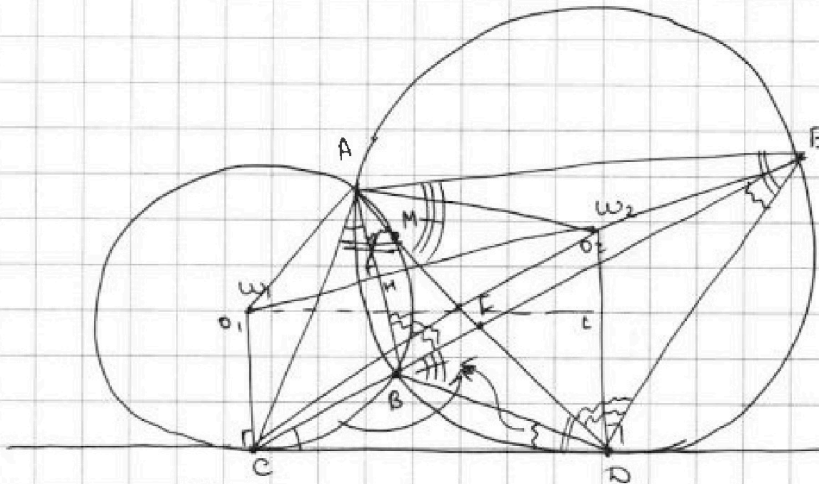
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}$  ED:CD - найти

AB ⊥ O1O2  
 $CD^2 = DM \cdot DA$   
 $DC^2 = CB \cdot CE$  } касат. и хорда  
 и секущ.

~~AF = FD~~  
~~CF = FE~~  
 $\triangle CO_2D$  и  $\triangle O_1CD$  - прямые?  
 $O_1C \perp CD$   
 $O_2D \perp CD$  - касат.  
 $\triangle O_1AH$  и  $\triangle AHG$  - прямые?

$CD^2 = DM \cdot DA$   
 $\begin{cases} CD^2 = CB \cdot CE \\ CF:FE = 9:25 \\ CE = CF + FE \end{cases}$

проведем BD (ABD - описан. ∠EDA)

$\angle CDA = \angle BED = \angle BAD$  (касат. и хорда, опис. на одн. дуге)  
 $\angle EAD = \angle EBD$  ( $\angle EBD = \angle FCD + \angle BDC$ )  
 AF - секущ.  $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}$

Итого:  $\begin{cases} \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{9}{25} \\ CD^2 = CB \cdot CE \\ CE = CF + FE \end{cases}$   $\angle CAD = \angle DAE$

$\triangle BFD \sim \triangle FAE$  }  $\triangle BFD \sim \triangle AFE$   
 $\triangle BFA \sim \triangle DFE$   
 $\frac{ED}{AB} = \frac{FD}{BF}$   
 $FD \cdot AF = BF \cdot FE$

$\angle CAD = \angle DAE$  и  $\angle CDA = \angle AED \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$

$\angle DBE = \angle BCD + \angle CDB$  (внеш. уг.)  $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD = \sqrt{AE \cdot AC}$   
 $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{CD}{\sqrt{AE \cdot AC}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{139}{12} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{138}{12} \cdot \frac{1}{68}$$

$$69 = 21 \cdot 3 = 7 \cdot 3^2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\times \frac{67}{2} \quad \frac{134}{12} + 4 = 138$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(\sqrt[3]{4t})^3 - 3 \cdot x \cdot (\sqrt[3]{4t})^2 + 3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{4t} + x^3 - x + 3 = p$$

$$b = 3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{16}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 3 = 3$$

$$\frac{4 \cdot \sqrt[3]{4}}{3 \sqrt[3]{4^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{4}}{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{16}} = x$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 3 =$$

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 = 4t - 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{16}} t^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{16}^2}$$

$$\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt[3]{4(p - \frac{7}{2})} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{27}{2} = \frac{7-27}{2} = \frac{20}{2} = -10$$

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{16}}$$

$$\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}}$$

$$\sqrt[3]{4t} = \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{16}}$$

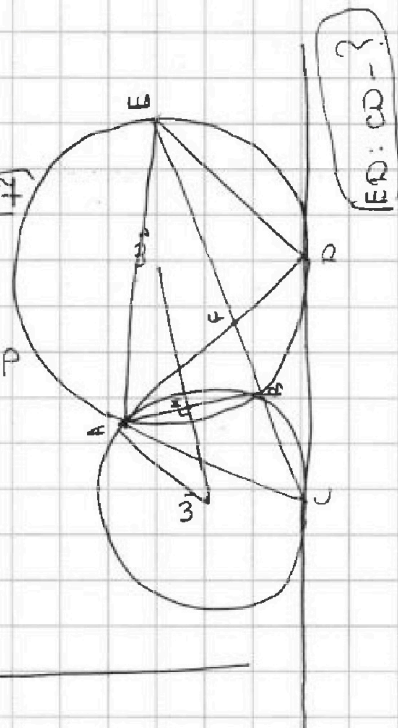
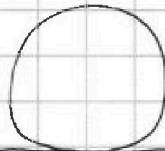
$$\sqrt[3]{\frac{4}{4}(p - \frac{7}{2})} + \frac{2}{\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{16}^2}} =$$

$$\frac{1}{4} p - \frac{7}{8} \sqrt{\frac{12p-7}{4}} =$$

$$4t^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{16}} t^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{16}^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 = p$$

$$4t^3 - 6t^2 +$$

$$c =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дано: реш. прог.  $B_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ ,  $B_{10} =$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}; \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

$$\sqrt{x+7} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 5 + x + 6 = 3$$

$$\sqrt{x+7} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 5 + x = 4\sqrt{(35-2x-x^2)^2} - 24\sqrt{35-2x-x^2} + 36$$

пусть  $\sqrt{(x+7)(5-x)} = t$

$$2x + 2 - 2t = 4t^2 - 24t + 36$$

$$\rightarrow 2t^2 - 11t + (17-x) = 0$$

$$4t^2 - 22t + 34 - 2x = 0 \quad | :2$$

$$D = 121 - 8(17-x) =$$

$$= 121 - 136 + 8x$$

$$8 \begin{array}{r} 48 \\ \times 2 \\ \hline 936 \end{array} \quad \begin{array}{r} 121 \\ - 86 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ + 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

$$\sqrt{x+7} - 2\sqrt{35-2x-x^2} + 5 - x = 4 \cdot (\sqrt{35-2x-x^2})^2 - 24\sqrt{35-2x-x^2} + 36$$

$$12 - 2t = 4t^2 - 24t + 36; \quad 4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad | :2$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$$

$$t_1 = \frac{11+5}{4} = 4$$

$$t_2 = \frac{11-5}{4} = \frac{3}{2}$$

$$t_1 = 4: -x^2 - 2x + 35 = 4$$

$$x^2 + 2x - 35 = -4$$

$$x^2 + 2x - 35 + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 31 = 0$$

$$D_4 = 1 + 31 = 32$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \\ \times 2 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ - 56 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$t_2 = \frac{3}{2}: -x^2 - 2x + 35 = 4 \quad | \times 2$$

$$x^2 + 2x - 35 + 2 = 0 \quad | \times 2$$

$$2x^2 + 4x - 70 + 3 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 67 = 0$$

$$D_4 =$$

$$\frac{70}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (1) \quad x, y, z - ?$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x-3z \geq 0 \\ y-2x-x^2+z \geq 0 \\ 225-z^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2): |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{(15-z)(15+z)}$$

↕

$$(|y-20| + 2|y-35|)^2 = (\sqrt{(15-z)(15+z)})^2$$

$$(y-20)^2 + 4(y-20)(y-35) + 4(y-35)^2 = (15-z)(15+z)$$

пусть  $225-z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm 15$

$9z^2 = 225 \Rightarrow z = \pm 15$

$$|y-20| + 2|y-35| = 0$$

$$\begin{cases} y-20 \geq 0 \\ y-35 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-20+2y-70 &= 0 \\ 3y-90 &= 0 \\ y &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y-20 \geq 0 \\ y-35 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (y-20) - 2y + 70 &= 0 \\ -y + 50 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y-20 < 0 \\ y-35 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 20-y+2y-70 &= 0 \\ y-50 &= 0 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y-20 < 0 \\ y-35 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 20-y-2y+70 &= 0 \\ -3y+90 &= 0 \\ y &= 30 \end{aligned}$$

~~$(x; 30+15), (x; 50 \pm 15)$~~

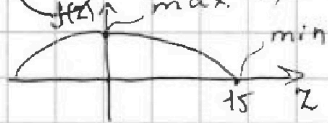
$$\begin{aligned} (5-x)(x+7) &= 5x+35-x^2-7x \\ x^2-2x+35 &= 0 \end{aligned}$$

неограниченно

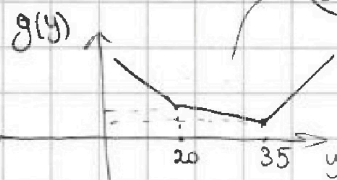
при  $y=20: 0+2 \cdot 15 = 30$

$y=35: |35-20| + 2 \cdot 0 = 15$ ,  $0 \leq z \leq 15$

$$f(z) = \sqrt{225-z^2}$$



$$g(y) = |y-20| + 2|y-35|$$



найти x.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} \cdot \frac{135}{15} \\ & + 2 \cdot \frac{135}{15} \\ & = 135 \end{aligned}$$

$$(1): \underbrace{\sqrt{x+7}}_a - \underbrace{\sqrt{5-x}}_b + 6 = 2 \underbrace{\sqrt{35-2x-x^2}}_{a \cdot b}$$

$$(a+b) - b(2a+1) = 0$$

$$a-b+6 = 2ab; (a-2ab-b) = -6$$

$$a-b+6 = 2ab; a - 2ab - b + 6 = 0 \quad a(1-2b) + (6-b) = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}^3}$ ,  $b_{10} = x+4$ ,  $b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$  OP3  $(15x+6)(x-3) > 0$   
 $x+4 > 0$

по опр.:  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$   
 тогда  $\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^{4-1} \\ b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1} \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{12-1} \end{cases}$

$\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^3 \\ b_{10} = b_1 \cdot q^9 \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{11} \end{cases}$

$\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^3 \\ b_{10} = b_1 \cdot q^9 \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{11} \end{cases}$

если /  
проп.

$b_{12} \cdot b_4 = b_{10}^2$   
 $\frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{b_{10}}{b_4}$

$\frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2$   
 $\frac{b_{10}}{b_4} = q^6$

возведем в ст. 3

$\frac{b_{12}}{b_{10}} = q^{11-9} = 2$   
 $\frac{b_{10}}{b_4} = q^{9-3} = 6$

$\left(\frac{b_{12}}{b_{10}}\right)^3 = \frac{b_{10}}{b_4} \Rightarrow b_{12}^3 \cdot b_4 = b_{10}^4$   
 $\sqrt[3]{\frac{(15x+6)(15x+6)^3(x-3)^3}{(x-3)^3}} = (x+4)^4$

$\sqrt[2]{(15x+6)^4} = (x+4)^4 \rightarrow (15x+6)^2 = (x+4)^4$

~~$(15x+6)^4 = (x+4)^8$~~

~~$(x+4)^8 - (15x+6)^4 = 0$~~

~~$((x+4)^4 - (15x+6)^2)((x+4)^4 + (15x+6)^2) = 0$~~

①  $x^2 + 8x + 16 + 15x - 6 = 0$   
 $x^2 - 7x + 10 = 0$   
 $D = 49 - 40 = 9$   
 $x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$   
 $x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$

②  $x^2 + x + 16 + 15x + 6 = 0$   
 $x^2 + 16x + 22 = 0$   
 $D = 16^2 - 4 \cdot 22 = 273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$

$x^2 + 8x + 16 + 15x + 6 = 0$   
 $x^2 + 23x + 22 = 0$

$D = 23^2 - 4 \cdot 22 = 529 - 88 = 441$

$x_1 = \frac{-23+21}{2} = -1$   
 $x_2 = \frac{-23-21}{2} = -22$

Итого:  $x = 5$   $x_2 = \frac{13}{2}$   
 $x = 2$   $x = \frac{-29}{2}$

007  
если проп.

$\begin{array}{r} 8 \\ 19 \\ \hline 19 \\ + 171 \\ + 1900 \\ \hline 361 \\ - 88 \\ \hline 273 \end{array}$   
 $\frac{273}{3} = 91$   
 $\frac{91}{7} = 13$

$\begin{array}{r} 16 \\ 529 \\ \hline 81 \\ \hline 441 = 21^2 \end{array}$

$\begin{array}{r} 23 \\ \hline 21 \\ \hline 441 = 21^2 \end{array}$   
 $-23 + 21 = -2$   
 $-23 - 21 = -44$