



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

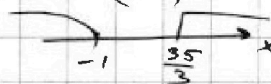
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_n \in \mathbb{R} \quad \sqrt[3]{13x-35} \quad b_7 = \sqrt[3]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \quad b_{13} = 5-x \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

Т.к. подкоренное выражение больше или равно 0, то  $\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0$



Пусть  $q$ -знаменатель прогрессии

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 \rightarrow 5-x = \sqrt[3]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6$$

$$b_{15} = b_{13} \cdot q^2$$

Если  $\sqrt[3]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 0$ , то  $5-x \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{35}{13} \text{ не корень} \Rightarrow q^6 = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} \cdot (5-x)$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \cdot q^2$$

Если  $5-x=0$ ,  $x=5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(13x-35)(x+1)} \neq 0 \Rightarrow x=5 \text{ не корень}$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$q^6 = (q^2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} = (5-x) = \frac{\sqrt{(13x-35)^3 \cdot (x+1)^3}}{(5-x)^3}$$

① При  $x=5$  прогрессия  $\rightarrow b_7 \neq 0$   
 $b_{13} = 0$  что невозможно, т.к.  
 $b_{15} \neq 0$   $b_{15} = b_{13} \cdot q^2$

② При  $x=-1$  дроби  $b_7$  не существуют.

③ При  $x = \frac{35}{13}$   $b_7 = 0$ , что невозможно, т.к.  
 $b_{13} \neq 0$   $b_{13} = b_7 \cdot q^6$

Тогда

$$(5-x)^4 = \sqrt{(13x-35)^4}$$

$$(x^2 - 10x + 25)^2 = (13x-35)^2$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 25 = 13x - 35 \\ x^2 - 10x + 25 = -13x + 35 \end{cases}$$

↑  
прог.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$  (орог.)

$x^2 - 23x + 40 = 0$   $\Rightarrow D = 529 - 4 \cdot 40 = 369 = 9 \cdot 41 \Rightarrow x = \frac{23 \pm 3\sqrt{41}}{2}$

$x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow \text{реш. нет}$   
 $D = 9 - 4 \cdot 10 < 0$

$x = \frac{23 + 3\sqrt{41}}{2} > 5$ , т.к.  $\frac{23}{2} > 10 > 5$ . Знаменатель  $q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$   
 $5-x < 0$

не имеет реш., т.к.  $\frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} < 0$ , а  $q^2 > 0$

$x = \frac{23 - 3\sqrt{41}}{2}$

$\frac{23 - 3\sqrt{41}}{2} \neq 5$   $\frac{23 - 3\sqrt{41}}{2} \neq \frac{35}{13}$   
 $23 - 3\sqrt{41} \neq 10$   $13 \neq 3\sqrt{41}$   
 $169 \neq 369$   $229 - 39\sqrt{41} \neq 70$   
 $229 \neq 39\sqrt{41}$   $229^2 \neq 39^2 \cdot 41$   
 $5241 \neq 62361$

При этом  $x = \frac{23 - 3\sqrt{41}}{2} > 0 \Rightarrow$  не подходит

Ответ: Таких  $x$  нет

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 25 = 13x - 35 \\ x^2 - 10x + 25 = -13x + 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases}$$

$D = 529 - 4 \cdot 60 = 289$   
 $x = \frac{23 \pm 17}{2} = 3; 20$   
 $D = 9 + 4 \cdot 10 = 49$   
 $x = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5; 2$

Вспомним про область определения

При  $x = 20$   $q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$  не имеет реш., т.к.  $\frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} < 0$ , а  $q^2 > 0$

При  $x = 3$  Все хорошо, т.к.  $3 > \frac{35}{13}$

При  $x = 2$  Все плохо, т.к.  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$  не существует

При  $x = -5$  Все вновь хорошо, т.к.  $x < -1$

Ответ: -5; 3

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} = 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2)  $y \geq 12$

$$4y - 35 = \sqrt{169 - z^2} \leq 13 \rightarrow 169 - z^2 \leq 169$$

$$4y - 35 \leq 13$$

$$y \leq 12$$

$$\Rightarrow y = 12 \text{ (из opp.)}$$

$$\sqrt{169 - z^2} \leq 13$$

$y \in [-1; 12]$

$$y+1 - 3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-2y+37 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$

$$2y \geq 24$$

$$y \geq 12 \Rightarrow y = 12$$

$y \leq -1$

$$-y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-4y+35 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$

$$4y \geq 22$$

$$y \geq \frac{11}{2}$$

$\rightarrow$  таких  $y$  нет

Значит, подходит только  $y = 12$ . Подставим в (2)

$$13 = \sqrt{169 - z^2} \Rightarrow 169 - z^2 = 169 \Rightarrow z = 0$$

Подставим в (1)  $y = 12$  и  $z = 0$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5$$

$$\begin{cases} x+3 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} + 4-x = 4(12+x-x^2) - 20\sqrt{12+x-x^2} + 25 \\ \sqrt{x+3} \geq \sqrt{4-x} \\ 2\sqrt{12+x-x^2} \geq 5 \end{cases}$$

Пусть  $t = \sqrt{12+x-x^2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$  (пог.)

Тогда,

$$\begin{cases} 7-2t = 4t^2 - 20t + 25 \\ x+3 \geq 4-x \\ x \leq 4 \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t^2 - 18t + 18 = 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 4 \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^2 - 9t + 9 = 0 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$D = 81 - 8 \cdot 9 = 9$$

$$\begin{cases} t = \frac{3}{2}; 3 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Получается,  $t = \frac{3}{2}$   
не пог.

$$\begin{cases} \sqrt{12+x-x^2} = 3 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 12 = 9 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \end{cases} \quad D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0 \rightarrow \text{не пог.}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \geq \frac{1}{2}, \text{ т.к. } \sqrt{13} > 0$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \neq 4$$

$$1 + \sqrt{13} \neq 8$$

$$\sqrt{13} \neq 7$$

Пог. пог.

Ответ:  $(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

Пусть  $\cos x = t \in [-1; 1]$

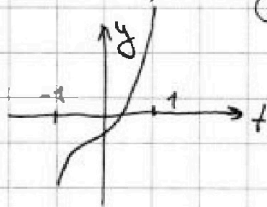
$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

Пусть  $F(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$$F'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$$

Значит,  $F(t)$  не убывает на всем промежутке  $[-1; 1]$

Эскиз:



Значит, если мы будем проводить прямые  $y=p$ , то пересек. с  $F(t)$  и есть решения.

$$F(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$F(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

Тогда при  $p < -4$  не будет рещ.

при  $p \in [-4; 10]$  будет одно рещ.

при  $p > 10$  не будет рещ.

или 0, но для  $x$  не все.

Заметим, что

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = 4t^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3t^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3t + 4 \cdot \frac{1}{8} = 4t^3 + 6t^2 + 3t + \frac{1}{2}$$

Тогда уравнение имеет вид

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = p$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7+2p}{8}$$

$$t + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{7+2p}}{2}$$

Итак,  $g(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)^3$  ↗ на  $[-1; 1]$ , то

• Вернемся к  $x$ :  $\cos x = \frac{\sqrt[3]{7+2p} - 1}{2}$

• При  $p < -4$  рещ нет

• При  $p = -4$   $\cos x = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

→  
body





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

При  $p \in [-4; 10]$   $x = \pm \arccos \left( \frac{\sqrt[3]{7+2p} - 1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

При  $p = 10$  ~~cos~~  $\cos x = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

При  $p > 10$  Реш. нет

Ответ:  $p \in [-4; 10]$ .  
 $p = -4$   $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$   
 $p \in (-4; 10)$   $x = \pm \arccos \left( \frac{\sqrt[3]{7+2p} - 1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$   
 $p = 10$   $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

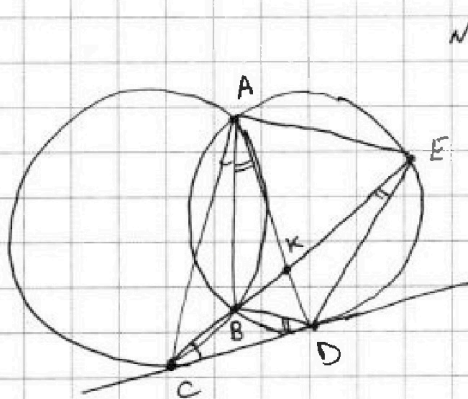
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1)  $\angle CAB = \angle BCD$  как углы между касат. и хордой

2)  $\angle BAD = \angle BDC$  как углы между касат. и хордой

3)  $\angle KBD = \angle BCD + \angle BDC = \angle CAD$   
внешний  
для  $\triangle BCD$

4)  $\angle EAK = \angle KBD$   $\Rightarrow$  AK - бис-са  
впис.  $\Rightarrow$  AK - бис-са  
к.ов. на  $\Rightarrow$  бис-са  
угла CAE

5) Знаем,  $CA:AE = 3:10$  по св.бу бис-сы

6) По теореме о квадрате касательной  $CD^2 = CB \cdot CE$

$$CD^2 = (KC - BK)(KC + KE) =$$

7) Пусть  $KC = 3x$ ,  $KE = 10x$

$$CD^2 = 9x^2 - BK \cdot KC - ~~BK \cdot KC~~ + 80x^2 =$$

$$= 39x^2 - BK \cdot CE = 39x^2 - BK \cdot 13x$$

$$BK \cdot KE = KC^2 - BK \cdot KC - BK \cdot KE + KC \cdot KE$$

8)  ~~$\triangle BCD \sim \triangle DCE$~~   $\triangle BCD \sim \triangle DCE \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{DE}{BD} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{CE}{BD} = \frac{13x}{BD}$





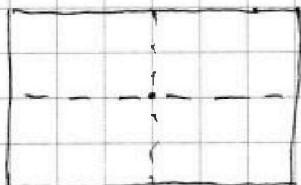
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



Т.к. длины сторон четны, то, очевидно, "средние линии" пересекаются в центре прямоугольника

Рассмотрим, сколько вариантов расставить точки и симметрично относительно вертикали. По факту, нужно просто выбрать 4 клетки в левой части прямоугольника. Остальные "проявятся" автоматически

Тогда, всего клеток  $250 \cdot 200 = 50000$ . Слева от вертикали 25000. Выбрать любые 4 точки =  $C_{25000}^4$

Аналогично с горизонтальной. Всего вариантов  $C_{25000}^4$   
(выбрать 4 сверху  $\rightarrow$  остальные автоматич.)

Аналогично в принципе, и с центром. Если ~~точка~~ <sup>клетка</sup> слева от вертикали, то она обязательно "перейдет" в клетку справа от вертикали. Таким образом, можно выбрать 4 точки справа от вертикали  $\rightarrow C_{25000}^4$  вариантов

Надо не забыть рассмотреть случай, когда варианты пересекаются. Заметим, что если произошла симметрия и относительно вертикали, и относительно горизонтали, то произошла симметрия относительно центра.

↑  
прод



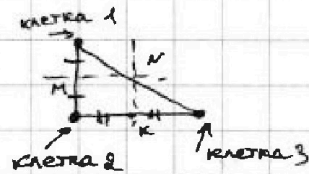
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем это



Клетка 1 симм. клетке 2  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow MN$  - ор. линия  
 Клетка 2 симм. клетке 3  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow NK$  - ор. линия  $\times$

Значит,  $\times$  ор. верт. и горизонт.

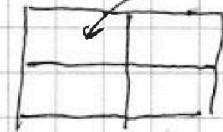
пересекаясь в одной точке  $\Rightarrow N$  - середина между клеткой 1 и 3

Значит, произошла центральная симметрия

Аналогично симметрия относ. центра и горизонт.  $\Rightarrow$  орт. верт. <sup>симм.</sup>  
 и симметрия относ. центра и вертикали  $\Rightarrow$  симм. <sub>отн. горизонт.</sub>

Значит, если мы выберем клетку из верхней левой зоны,

то она отразится в еще 3 точки:



Значит, пересекаясь они могли в  $C_{12500}^2$  случаях <sup>случае  $\times$</sup>  <sub>(выбрать 2 слева сверху, ост. отраз.)</sub>

~~Значит, мы уже~~ Данные случаи были и в ситуации относ. вертикали, и относ. горизонтали, и относ. центра  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  надо дважды вычитать данный случай

Значит, всего получается  $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

Ответ:  $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$(a; b; c) \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) - \text{квадрат прост. числа} \\ a+b^2 = 561 \end{cases}$$

~~$561 = 3 \cdot 187$~~  Т.к.  $a > b$ , то  $a \neq b$

Пусть  $(a-c)(b-c) = p^2$ , где  $p$  - прост. число. Т.к.  $a \neq b$ , то  $a-c \neq b-c$ . Т.к.  $a > b$ , то  $a-c > b-c$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

Т.к. при  $a-c > 0$  и  $b-c > 0$   $a > b \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = c + 1 \end{cases}$  Т.к.  $p > 1$ , то  $a > b$  (иначе было бы  $a < b$ )

Т.к. при  $a-c < 0$  и  $b-c < 0$   $a < b \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases}$  При  $p > 1 \Rightarrow a > b$

Тогда ~~подставим обе системы в второе~~

Тогда ①  $c = b-1 \Rightarrow a = p^2 + 1 + b$

②  $c = b + p^2 \Rightarrow a = p^2 + b - 1$

$\Rightarrow a$  и  $b$  там, и в том случае одинаково

Подставим в последнее уравнение

$$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$$

$$D = 1 - 4p^2 + 4 \cdot 561 \geq 0$$

$$\Rightarrow 4p^2 \leq 2245$$

$$p^2 \leq \frac{2245}{4}$$

$$p^2 \leq 561.25$$

$$p \leq 23$$

~~Проверим все варианты~~

Заметим, что  $a-b = p^2 - 1$

Квадрат при делении на 3 может давать остатки или 0, или 1. Т.к.  $(a-b) \not\equiv 3$ , то  $p^2 - 1 \not\equiv 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0$

Т.к.  $p$  - простое, то ед. вариант -  $p = 3$

→ проз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
20 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{6}$  (нррр.)

Тогда  $b^2 + b - 552 = 0$   
 $b = -24; 23$

~~$a = b + 1$~~

Ⓐ  $a = b - 1$

$c = -25$

$c = 22$

$a = p^2 + c = 9 - 25 = -16$

$a = p^2 + c = 9 + 22 = 31$

$b = -24$

$b = 23$

Ⓑ  $a = p^2 + b$

$c = 9 - 24 = -15$

$c = 9 + 23 = 32$

$a = c - 1 = -16$

$a = c - 1 = 31$

$b = -24$

$b = 23$

Ответ:  $(-16; -24; -25)$   $(31; 23; 22)$   $(-16; -24; -15)$   $(31; 23; 32)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$(y+1) + 3(y-12) = \sqrt{169-z^2}$$

$$529 - 369 = 160$$

$$-z \geq x - 4 \geq -7$$

$$z \leq x - 4$$

$$z \geq x^2 - x - 4$$

$$\begin{array}{r} 117 \\ 1521 \\ \hline 135 \\ 1569 \end{array}$$

$$x+3+4-x-z+2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$(x+3)(4-x-z) = 4x - x^2 - xz + 12 - 3x - 3z$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \cdot (1 - \cos^2 x)$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\begin{array}{r} 521 \\ 1569 \\ \hline 135 \\ 1569 \end{array}$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$y^2 - 12$$

$$4y - 35 = \sqrt{169 - z^2}$$

$$y \in [-1; 12]$$

$$y+1-3y+36 = -2y+37 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-2y+37 \leq 13$$

$$2y \geq -24$$

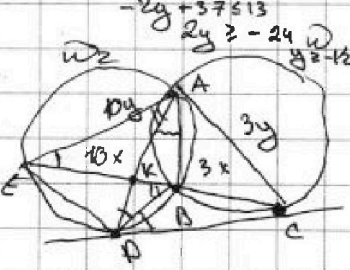
$$y \geq -12$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \quad f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$$

$$t = -1 \quad -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$t = 1 \quad 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$



$$-4y + 35 \leq 13$$

$$4y \geq 22$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 10$$

$$y+1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-2y+37 \leq 13$$

$$-2y \leq -24$$

$$y \geq 12$$

$$\begin{array}{r} 28-3\sqrt{11} \\ 2 \\ \hline 135 \\ 1569 \end{array}$$

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

$$5-x = \sqrt{13x-15}$$

$$25-10x+x^2 = 13x-15$$

$$x^2 - 23x + 40 = 0$$

$$x \geq -3$$

$$x+z \leq 4$$

$$z \in [-13; 13]$$

$$y+x-x^2+z \geq 0$$

$$y \geq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + z$$

$$x^2 - y \leq x+z \leq 4$$

$$x+z \leq 4$$

$$x \geq -3$$

$$-z \geq x-4 \geq -7$$

$$z \leq x-4$$

$$x^2 + y + x + z \geq 0$$

$$y \geq x^2 - 4 \geq -7$$

$$y \geq \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \geq -7\frac{1}{4}$$

$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$D = 529 - 160 = 369$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \in [-4; 10]$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{p-3}{7}}$$

$$\frac{4p-12}{7} + 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{(p-3)^2}{49}} + 3 \sqrt[3]{\frac{p-3}{49}} - 3 = p$$

(a; b; c)

$$q^8 = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}$$

$$a-c=289 \quad b=16$$

$$b-c=1 \quad c=15$$

$$a=304$$

$$(a-b) \sqrt{3}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 = pp$$

$$a+b^2=560 \stackrel{3}{=} 2$$

0, 1, 2

$$q^6 = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}$$

$$a-b=p^2-1$$

$$1 \cdot p^2$$

$$p \cdot p \rightarrow \otimes$$

$$b-c=1$$

$$b=c+1 \quad \textcircled{1} \quad c=17, 15$$

$$a-c=p^2$$

$$a=c+p^2 \quad a=2$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$a = b - 1 + p^2$$

$$b^2 + b - 1 + p^2 = 560$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 21} \\ 21 \phantom{0} \\ \hline 109 \end{array}$$

$$p \neq 3$$

$$\textcircled{2} \quad c=30$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 13} \\ 13 \phantom{00} \\ \hline 2209 \phantom{0} \\ \hline 17 \phantom{00} \\ \hline 17 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$b^2 + b - 561 + p^2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 561$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 23} \\ 23 \phantom{0} \\ \hline 91 \end{array}$$

$$c = b - 1$$

$$a = p^2 + b - 1$$

$$b = \frac{-1 \pm 33}{2} = -17, 16$$

$$p = 17$$

$$c = -18, 15$$

$$p=3$$

$$2245 - 4 \cdot 9 = 2209$$

$$-4p^2 \geq 0$$

$$4p^2 \leq 2245$$

$$p^2 \leq \frac{2245}{4} = 561$$

$$p=23 \rightarrow 29$$

$$=304$$

$$p=5$$

$$2245 - 100 = 2145 = 5 \cdot 429 \quad \otimes$$

$$b = -17$$

$$c = -289 - 17 = -306$$

$$a = -289$$

$$p=7$$

$$2245 - 4 \cdot 49 = 2197$$

$$\textcircled{p=17} \quad a-c=1$$

$$b-c=289$$

$$p=11$$

$$p=13$$

$$p=17$$

$$p=23$$

$$p=19$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}}$$

$$b^2 + b - 272$$

$$D = 33^2$$

$$b = \frac{-1 \pm 33}{2} = -17, 16$$

$$2245 = 4p^2 + k^2 : 3$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 1444} \\ 1444 \phantom{0} \\ \hline 801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 49} \\ 49 \phantom{0} \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 196} \\ 196 \phantom{00} \\ \hline 2049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \overline{) 4} \\ 4 \phantom{0} \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 1156} \\ 1156 \phantom{0} \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 186} \\ 186 \phantom{00} \\ \hline 2049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2049 \overline{) 18} \\ 18 \phantom{00} \\ \hline 24 \phantom{00} \\ \hline 24 \phantom{00} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 484} \\ 484 \phantom{00} \\ \hline 1761 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1761 \overline{) 3} \\ 3 \phantom{00} \\ \hline 1761 \phantom{0} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1089 \overline{) 3} \\ 3 \phantom{00} \\ \hline 1089 \phantom{0} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1569 \overline{) 3} \\ 3 \phantom{00} \\ \hline 1569 \phantom{0} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1569 \overline{) 3} \\ 3 \phantom{00} \\ \hline 1569 \phantom{0} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 529 \overline{) 9} \\ 9 \phantom{0} \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1761 \overline{) 13} \\ 13 \phantom{00} \\ \hline 1761 \phantom{0} \\ \hline 0 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \overline{) 4} \\ 4 \phantom{0} \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 676} \\ 676 \phantom{00} \\ \hline 1569 \end{array}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

