

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы покрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_9 = b_7 q^2 = x+3 \quad (b_9 = b_7 q^2, \text{ т.к. } b_7, b_9 \text{ и } b_{15} - \text{ члены 2. п. } b_n)$$

$$b_{15} = b_7 q^8 = b_9 q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\begin{cases} q^2 = \frac{b_9}{b_7} = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} \\ q^8 = \frac{b_{15}}{b_7} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3(25x-9)}} = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2} \end{cases}$$

ОДЗ: $(25x-9)/(x-6) > 0 \quad \left(\frac{25x-9}{(x-6)^3} > 0 \right)$ - равносильное нерав-во, поэтому можно решать только одно)

$$\begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad - \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \xrightarrow{x} \end{array}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{9}{25}\right) \cup (6; +\infty)$$

$$\begin{cases} q^4 = \frac{x^2+6x+9}{(25x-9)(x-6)} \\ q^4 = \frac{1}{x-6} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+6x+9}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{x-6}$$

Раскроем модуль на промежутках, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 6 \\ \frac{x^2+6x+9}{(25x-9)(x-6)} - \frac{1}{x-6} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+6x+9-25x+9}{(25x-9)(x-6)} = \frac{x^2-19x+18}{(25x-9)(x-6)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=18 \Rightarrow x=18 \\ x > 6 \end{cases} \\ x < \frac{9}{25} \\ \frac{x^2+6x+9}{(25x-9)(x-6)} - \frac{1}{6-x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+6x+9+25x-9}{(25x-9)(x-6)} = \frac{x^2+31x}{(25x-9)(x-6)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-31 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases} \end{cases}$$

Проверим найденные значения x :

$$x = 18:$$

$$x = 0:$$

$$x = -31:$$

$$b_7 = \sqrt{441 \cdot 12} = 21\sqrt{12}$$

$$b_9 = 21 \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \frac{1}{\sqrt{12^3}}$$

Ответ: 0; 18.

$$b_7 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$b_9 = 3 \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{9}{6^3}} = \frac{1}{\sqrt{6^3}}$$

$$b_7 = \sqrt{784 \cdot 37} = 28\sqrt{37}$$

$$b_9 = -28 \Rightarrow q^2 = -\sqrt{37}$$

Такого не может быть



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x + 10 \quad \text{или хотя бы одно реш.}$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x + 6 - 4 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0 \quad || : 4$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

Заметим, что при $p=9$

$$9 \cos^3 x (3 \cos x - 1) + (3 \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 3 \cos x = 1 \\ 3 \cos^2 x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{3} \\ \emptyset \end{cases} \Rightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$$

решения есть

Также при $p=1$

$$\cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 1 \quad ; \quad 1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

$$1 \quad -3 \quad 3 \quad -1$$

$$1 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 0$$

$$(\cos x - 1)(\cos x - 1)^2 = 0$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n$$

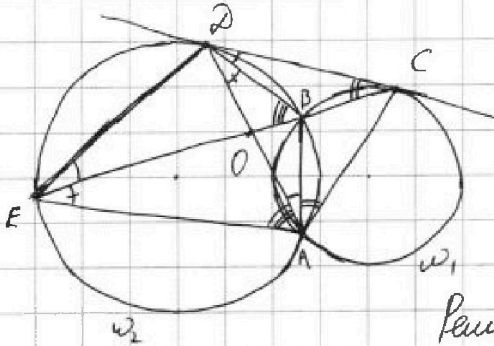


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\frac{CD}{DE} = \frac{2}{5}$

Найти: $\frac{DE}{CD}$

Решение:

① $\angle BED = \angle BAD = \angle CBD$ (как угол между касат. CD и хордой BD)
как впис. и опр. на $\sphericalangle BD$

$\angle CAB = \angle BCD$ (как \sphericalangle между касат. CD и хордой BC)

$\angle DAE = \angle DBE$ (как впис. в ω_2 и опр. на $\sphericalangle DE$)

$\angle DBE = \angle BCD + \angle CDB$ (как внешний при $\triangle CDB$), т.о.

$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle BCD + \angle CDB = \angle DBE = \angle DAE \Rightarrow$

$\Rightarrow AO$ - бисс. в $\triangle CAE$, т.о. по св-ву бисс.

$\frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5} \Rightarrow AC = \frac{2}{5} AE$

② $\angle AEO = \angle BDA$ (как впис. в ω_2 и опр. на $\sphericalangle AB$), т.о.

$\angle DEA = \angle CDA$ (как суммы равных углов) \Rightarrow

$\angle DAE = \angle CAD$ (по доказ-нию)

$\Rightarrow \triangle DAE \sim \triangle CAD$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC = \frac{2}{5} AE^2 \Rightarrow \frac{AE^2}{AD^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{DE}{CD} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для каждой из этих симметрий можно закрасить 4 клетки, а остальные отразить (либо относ. центра, либо в ср. линии), тогда для каждого случая можем посчитать, сколько способов закрасить 4 клетки на одной из половин треугольника (2-ая половина будет симметрична): для одного случая C_{20000}^4 (т.к. 20000 клет. — это половина треугол.), а для трёх — $3 \cdot C_{20000}^4$
Ответ: $3 \cdot C_{20000}^4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{Z}; a < b; b - a \neq 3; (a - c)(b - c) = p^2, p - \text{прост.}; a^2 + b = 710$$

1) Т.к. a, b, c - целые, то и $a - c \in \mathbb{Z}$, и $b - c \in \mathbb{Z}$, тогда

Т.к. $p^2 = p^2, p \neq 1$ (т.к. p - простое), то

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \text{ (т.к. } a < b, \text{ то } a - c < b - c) \Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = p^2 + c \end{cases}$$

$\Rightarrow a = b$, что противоречит условию $a < b$

2) $a^2 + b = 710$

$$c^2 + 2c + 1 + p^2 + c = 710$$

$$c^2 + 3c + p^2 - 709 = 0 \text{ - имеет решения}$$

$$D = 9 - 4p^2 + 2836 = 2845 - 4p^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4p^2 \leq 2845 \Rightarrow p^2 \leq 711 \frac{1}{4} \Rightarrow p \leq \sqrt{711 \frac{1}{4}} < \sqrt{729} = 27, \text{ то}$$

все p , которые нам подходят, это: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

3) Проверим, верна ли $b - a \neq 3$ при каждом p (т.к. $b - a = p^2 - 1$):

$p = 3: 9 - 1 = 8 \neq 3$ верно подх.	$p = 13: 169 - 1 = 168 \neq 3$ не подх.
$p = 5: 25 - 1 = 24 \neq 3$ не подх.	$p = 17: 289 - 1 = 288 \neq 3$ не подх.
$p = 7: 49 - 1 = 48 \neq 3$ не подх.	$p = 19: 361 - 1 = 360 \neq 3$ не подх.
$p = 11: 121 - 1 = 120 \neq 3$ не подх.	$p = 23: 529 - 1 = 528 \neq 3$ не подх.

Значит, подходит только $p = 3$, тогда $D = 2845 - 36 = 2809 = 53^2$, то

$$c = \frac{-3 \pm 53}{2} \begin{cases} c = 25 \Rightarrow \begin{cases} a = 26 \\ b = 34 \end{cases} \\ c = -28 \Rightarrow \begin{cases} a = -27 \\ b = -19 \end{cases} \end{cases} \text{ все условия выполнены для обеих пар}$$

Ответ: $(26; 34; 25)$ и $(-27; -19; -28)$.

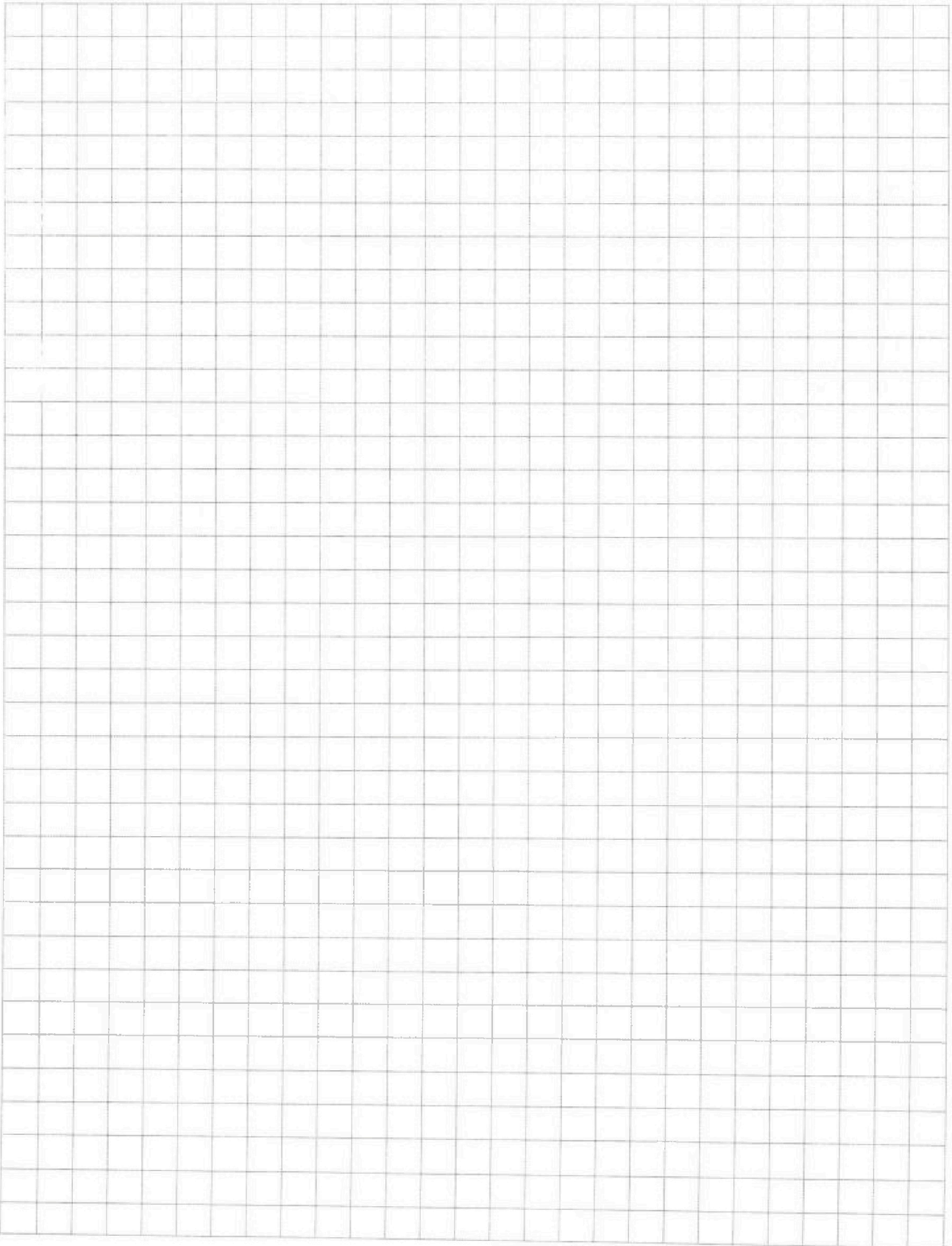


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

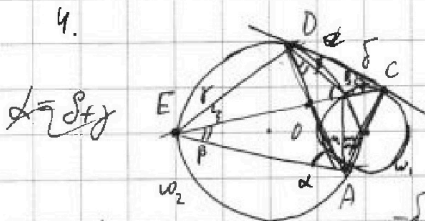


$$3 \cdot C_{20000}^4$$

$$C_{20000}^4 = \frac{20000!}{4! \cdot 19996!} = 20000 \cdot 19999 \cdot 19998 \cdot 19997 \cdot 19996!$$



4.



$$\frac{CO}{OE} = \frac{2}{5}, \frac{DE}{CE} \Rightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OE}{CE} = \frac{5}{7}, \frac{CO}{CE} = \frac{2}{7}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE \quad AO \cdot AO \cdot OD = OE \cdot OB$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$$\angle ADE = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - \beta - 2\gamma \quad \triangle CDE \sim \triangle BDE$$

$$\angle ECD = \beta = 180^\circ - \angle ADE = 2\gamma$$

$$\triangle CDA \sim \triangle DEA \Rightarrow \frac{DE}{OE} = \frac{CE}{OE} \Rightarrow \frac{CE^2}{OE^2} = 1 \quad \frac{CE}{OE} = \sqrt{\frac{35}{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-4x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \quad |1) \quad z \in [-9; 9] \end{cases}$$

$$(1) \begin{matrix} y+4 & - & 4 & + & 4 & + & \rightarrow y \\ y-5 & - & - & - & + & & \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y < -4 & (1) \\ -y-9-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \quad 16-5y = \sqrt{81-z^2} \\ y \in [-4; 5] & (2) \\ y+4-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \quad 24-3y = \sqrt{81-z^2} \\ y \geq 5 & (3) \\ y+5y+4y-20 = \sqrt{81-z^2} \quad 5y-16 = \sqrt{81-z^2} & (4) \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = 6400 - 625 \cdot 9 = 6400 - 75^2 = 775$$

$$(2) \begin{cases} y \leq \frac{16}{5} \\ 256 - 160y + 25y^2 = 81 - z^2 \Rightarrow z^2 = -25y^2 + 160y - 225 \\ z^2 + 25y^2 = 160y - 225 \Rightarrow y \geq \frac{225}{160} = \frac{45}{32} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a < b$

$b - a \neq 3 \Rightarrow b \neq a + 3$

$b - a = p^2 - 1 \neq 3$

$(a - c)(b - c) = p^2$, p - простое.

Ср1

$a^2 + b = 710$

$p^2 = p^2, p, 1 \Rightarrow \begin{cases} a - c = p^2 - 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = p^2 + c \end{cases}$

$c^2 + 2c + 1 + p^2 + c = 710$

$\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases} \times \text{т.к. } a \neq b$

$c^2 + 3c + p^2 + 1 - 709 = 0$ или реш. на \mathbb{Z}

$D = 9 - 4p^2 + 2836 = 2845 - 4p^2 = n^2 > 0$

$p^2 < \frac{2845}{4} = 711\frac{1}{4}$

~~57~~
~~57~~

$p < \sqrt{711\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{704}{29}} \approx 287$

(3) ~~X~~, ~~X~~, ~~X~~, ~~X~~, ~~X~~, ~~X~~, ~~X~~

$p = 3 \Rightarrow D = 2836 - 36 = 2800 = 53^2$

$c = \frac{-3 \pm 53}{2} = \begin{cases} 25 \\ -23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 26 \\ b = 34 \end{cases} \quad 34 - 26 \neq 3 \quad \checkmark$
 $\begin{cases} a = -22 \\ b = -14 \end{cases} \quad 2 \neq 1 \quad \checkmark$

$(26; 34; 25)$ и $(-22; -14; -23)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_9 = b_3 q^2 = x+3$$

$$q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$b_{15} = b_3 q^6 = b_7 q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8 = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^2}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$q^4 = \frac{1}{1x-6}$$

$$q^4 = \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{1x-6}$$

$$\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ x \neq 6 \end{cases} \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \frac{9}{25} \quad 6 \end{array} \quad x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x > 6 \\ \frac{x^2+6x+9}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{x-6} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+6x+9-25x+9}{(25x-9)(x-6)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-19x+18}{(25x-9)(x-6)} = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=18 \\ x=18 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{9}{25} \\ \frac{x^2+6x+9}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{6-x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+6x+9+25x-9}{(25x-9)(x-6)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+31x}{(25x-9)(x-6)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-31 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases} \end{cases}$$

$x=0$

$x=18$

$$b_2 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$b_2 = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$b_3 = 3$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b_9 = 21$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{9}{216}} = \frac{3}{\sqrt{6^3}}$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \frac{21}{\sqrt{12^3}}$$

$x = -31$

$$b_2 = \sqrt{784 \cdot 37} = 28\sqrt{37}$$

$\Rightarrow q^2 < 0 \quad ? X$

$$b_3 = -28$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{-784}{-37^3}} = \frac{28}{\sqrt{37^3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+1) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin^2 x \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2(\cos^2 x - \cos^2 x) \cos x =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x - 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+1) \cos x - 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 4 \cos x - 4 = 0 \text{ хотя бы одно реш. } \parallel : 4$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$p = 3.$$

$$p = 0$$

$$3 \cos^2 x (\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

$$3 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 12 < 0$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = -\frac{1}{3} \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 \text{ реш. } p > 3 \quad p < 0$$

$$p \neq 3$$

$$\cos x = t \in [-1; 1]$$

$$f(t) = pt^3 - 3t^2 + t - 1 = 0$$

$$f'(t) = 3pt^2 - 6t + 1 \quad \Delta = 36 - 12p \geq 0 \quad p \leq 3$$

$$p(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) = p(t^3 - (t_1+t_2+t_3)t^2 + (t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3)t - t_1t_2t_3)$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{p} \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 = \frac{1}{p} \\ t_1t_2t_3 = \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3t_1t_2t_3 \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 = t_1t_2t_3 \\ (t_1+t_2)t_3 = t_1t_2(t_3-1) \end{cases}$$

$$27. \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

$$S_1 = 2, S_2 = S_3 = 3$$

$$ah_1 = 2 \quad ah_2 = ah_3 = 3$$

$$h_1 = \sqrt{3} \quad h_2 = h_3 = \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

$$V = S_1 h_1 = S_2 h_2$$

