МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\dfrac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-\sqrt{4-x-z}+5=2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

   - $a > b$,
   - число $a-b$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a + b^2 = 560$. $= 2^4 \cdot 5 \cdot 7$

   $-1 \quad 1, 0$

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть первый член геометрической прогрессии равен x_0, тогда второй равен $x_0 \cdot b$, третий равен $x_0 \cdot b$, седьмой – $x_0 \cdot b^6$, тринадцатый – $x_0 \cdot b^{12}$, пятнадцатый – $x_0 \cdot b^{14}$, где b = частное двух последовательных эл-в этой геометрической прогрессии (при делении большего по индексу на меньший)

тогда $\frac{a_{15}}{a_{13}} = b^{2}$ (где a_{15} - пятнадцатый член прогрессии, a_{13} - тринадцатый)

$$\frac{a_{15}}{a_{7}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = (x+1)^{2} = b^8$$

тогда $b^2 = \pm \sqrt{|x+1|}$ ($b^2 \neq -\sqrt{|x+1|}$, т.к. $b^2 \geq 0$, а $x+1 \neq 0$)

тогда $a_{13} \cdot b^2 = a_{15}$, т.е. $(5-x)(\sqrt{x+1}) = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

~~но заметим, что $b^2 \geq 0$, тогда значит $x+1 \geq 0$, т.е. $x \geq -1$, не~~ тогда

возведем обе части в квадрат:

$$(13x-35)(|x+1|) = (5-x)^2 (x+1)$$

т.к. $x+1 \neq 0$, т.к. $\exists$ число $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, а деление на ноль неопределено, мы можем поделить обе части на $x+1$ если $(x+1) > 0$

$$13x-35 = (5-x)^2,$$

т.е. $x^2 - 23x + 60 = 0$

применяя т. Виета получаем, что корни уравнения это $x = 20$ и $x = 3$

т.е. если последовательность существует, то $x = 20$ или 3 (все переходы не были равносильными, но они являлись следствием)

Пример: при $x = 20$ $a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{225 \cdot 21} = 15\sqrt{21}$, но при $x=20$ получаем, что

$b^2=\sqrt{21}$, а $a_{15}=a_{13}\cdot b$, т.е.

$(5-x)\left(\sqrt{|x+1|}\right)=\sqrt{(13x-35)(x+1)}$,

но $(5-x)\left(\sqrt{|x+1|}\right)<0$, а $\sqrt{(13x-35)(x+1)}>0$,
противоречие, $x\neq 20$

также нужно рассмотреть вариант, когда $x+1<0$,

тогда $(13x-35)=(5-x)^2\cdot -1$ (мы сократили на $|x+1|$)

т.е. $x^2-10x+25+13x-35=0$

$x^2+3x-10=0$

по т. Виета получаем корни

-5 и 2, но нам подходит только
-5, т.к. по предположению $x+1<0$, т.е.
$x<-1$,
а $2>-1$.)

Остается вариант,
где $x=-5$ или $x=3$

если $x=-5$, то $a_{15}=\sqrt{(13x-35)(x+1)}=\sqrt{-100\cdot -4}=10\cdot 2$,

а $b=\sqrt{|x+1|}=2$,

$a_7=\sqrt{\frac{-100}{-8}}$, $a_{13}=10$,

т.е. нам подходит последов-ть, где

$b=\pm\sqrt{2}$, а $a_7=\sqrt{\frac{-100}{-8}}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

при $x=3$ $b^2=\sqrt{|x+1|}=2$, $a_7=\sqrt{\frac{4}{4^3}}=\frac{1}{4}$,

т.е. нам подходит п-ть, где $b=\pm\sqrt{2}$,

$a_7=\frac{1}{4}$ $(a_{15}=4,\ a_{13}=2)$

ответ: $x=3$ или -5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{13^2-z^2} \end{cases}$$

$$13^2-z^2 = (13-z)(13+z)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N3

$\cos^2 x$ по формуле двойного угла $= 2\cos^2 x - 1$

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$

$= \underbrace{2\cos^3 x - \cos x}_{} - 2\sin^2 \cos x$

$= \cos x \cdot (\overset{\cos^2 x}{\cancel{2}} - \sin^2 x) =$

$= \cancel{2}\cos^3 x - \sin^2 x \cos x$

$= \cos^3 x - 3\sin^2 \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x =$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

$3\cos 2x = (2\cos^2 x - 1)3$

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x - 3\cos x =$

$= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x = p + 3$

$\cos x (4\cos^2 x + 6\cos x + 3) = p + 3$

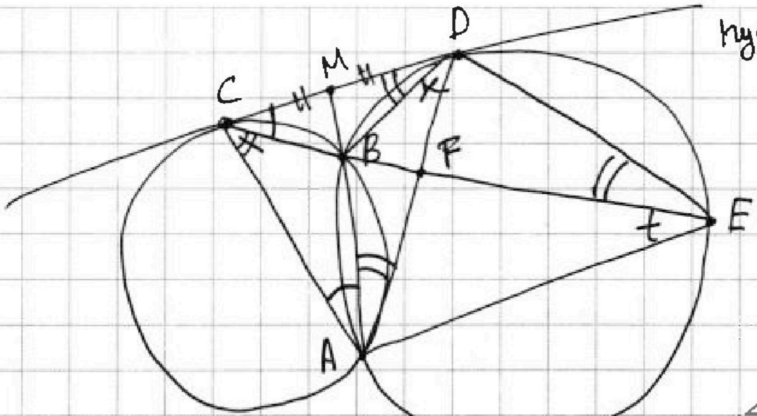
$\wedge$ 1 $\wedge$ 4 $\wedge$ 6

$p + 3 < 13, \quad p < 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle DCB = \alpha$, $\angle CDB = \beta$

тогда по т. об угле между касательной и хордой

$\angle DCB = \angle CAB$, а $\angle CDB = \angle DAB$ (хорды CB и BD и касательная (общая) CD)

F - точка пересечения AD и CE, M - точка пересечения AB и CD

Также, по т. об угле между касательной и хордой $\angle CDB = \angle DEB$ (хорда BD)

Тогда по т. синусов в $\triangle CDE$ имеем, что

$$\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{DE}{\sin\alpha}, \text{ т.е. } \frac{CD}{DE} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Далее распишем 2 т. синусов в $\triangle BAD$ и $\triangle BAC$:

$$\frac{BD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\angle BDA}, \quad \frac{CB}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\angle BCA} \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BDA}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

но по т. синусов в $\triangle CBD$ $\frac{CB}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\alpha}$, т.е. $\frac{BD}{CB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$,

а значит $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BDA} = \frac{BD}{CB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, значит

$$\frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BDA} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2$$

Далее заметим, что $\angle DAE = \angle DBE$ (углы опираются на хорду DE), а $\angle DBE = \alpha+\beta$, как внешний в $\triangle CBD$, тогда $\angle DAE = \angle DBE = \alpha+\beta$. Но $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \alpha+\beta \Rightarrow \angle CAD = \angle DAE$ $\Downarrow$ AF - биссектриса в $\triangle CAE \Rightarrow$ по свойству биссектрисы $CF/FE = AC/AE$. По условию задачи $CF/FE = 3/10$, а по т. синусов в $\triangle CAE$ $CA/AE = \sin\angle CEA/\sin\angle BCA$, но $\angle CEA = \angle BDA$ (они опираются на одну хорду BA), тогда

$\frac{\sin\angle CEA}{\sin\angle BCA} = \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CF} = \frac{10}{3} = \frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle BCA}$, но мы доказали, что $\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle BCA} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2$, поэтому $\frac{10}{3} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2$, тогда

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ (sin углов треугольника >0)

~~Заметим тогда,~~ что по т. синусов в $\triangle CDE$

$\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{DE}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{10}{3}}$, ЧТД

ответ: $\frac{DE}{CE} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

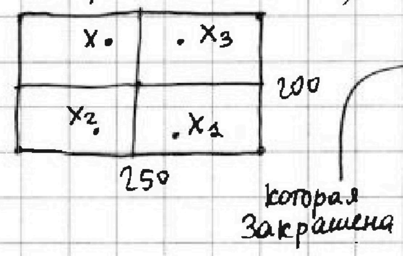
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N5 Введем систему координат для удобства обозначения клеток * ~~координата~~ (см. выделенный * комментарий)

Заметим, что если фигура одновременно обладает двумя из перечисленных симметрий, то она обладает всеми перечисленными симметриями:

Расположим прямоугольник так, что его сторона длиной 200 вертикальна

1) Если она обладает центральной симметрией и симметрией относительно одной из средних линий (без ограничения общности, пусть это ср. линия, параллельная стороне из 200 клеток)



рассмотрим произвольную точку (клетку) X, тогда в силу центральной симметрии фигуры закрашена клетка X_1 симметричная X относительно центра (пересечение двух средних линий), а в силу осевой симметрии (симметрии относительно средней линии) закрашена клетка X_2, симметричная X_1 относительно ср. линии, параллельной стороне из 200 клеток. Осталось заметить, что в силу центральной симметрии закрашена клетка X_3, симметричная X_2 относительно центра

но пусть у клетки X были координаты (a, b), тогда у клетки X_1 это $(250-a, 200-b)$, у X_2 это $(a, 200-b)$, у X_3 это $(200-a, b)$

---

* первая координата - расстояние до верхней стороны прямоугольника, вторая - до левой стороны прямоугольника (у верхней левой клетки координаты $(0,0)$, у нижней правой - $(250, 200)$, у нижней левой $(0, 200)$, у верхней правой - $(250, 0)$)

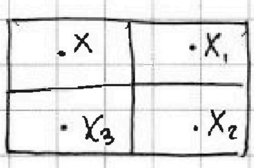
но тогда точки X и X_2 симметричны относительно второй средней линии, т.е. у произвол-й точки X (клетки) клетки, симметричные ей относительно центра и обеих средних линий закрашены, значит фигура обладает всеми перечисленными симметриями

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2) фигура обладает симметриями относительно обеих средних линий:



Тогда рассмотрим произвольную ~~...~~ клетку X с координатами (a, b), в силу симметрии относительно вертикаль-й средней линии ~~...~~ клетка X_1 с координатами $(250-a, b)$ закрашена, а в силу симметрии относительно горизонтальной средней линии точка X_2 с координатами $(250-a, 250-b)$ закрашена (она симметрична X_1 относительно вертикальной средней линии) $\Rightarrow$ у произвольной ~~точки~~ клетки X ~~...~~ клетка, центрально-симметричная ей (в данном случае это клетка X_2) закрашена. Тогда вся фигура центрально симметрична (и остальными двумя симметриями она обладает) $\Rightarrow$ она обладает всеми видами симметрий)

Заметим, что чтобы посчитать кол-во фигур, обладающих всеми видами симметрий, достаточно посчитать кол-во вариантов выбрать 2 клетки из прямоугольника $100 \cdot 125$, т.к. ~~...~~ любая такая фигура определяется двумя клетками в верхней левой четверти прямоугольника (в силу симметрий в каждой четверти прямоугольника одинакова кол-во закрашенных клеток - 2, и чтобы получить всю фигуру, достаточно отразить эти две клетки ~~...~~ от горизонтальной, от вертикальной средней линии, и от центра (их пересечение), и закрасить образы ~~...~~ этих двух клеток при перечисленных симметриях $\Rightarrow$ 2 клетки в верхней левой четверти определяют всю фигуру $\Rightarrow$ таких фигур равно $C^2_{100 \cdot 125}$ штуки. Теперь заметим, что фигур, обладающих одним типом симметрии равно $3 \cdot C^4_{100 \cdot 250}$, т.к. по отдельности фигур, обладающих центр. симметрией $C^4_{100 \cdot 250}$ (выбираем 4 из верхней половины прямоугольника, это однозначно определяет всю фигуру), относительно горизонтальной и вертикальной тоже $C^4_{100 \cdot 250}$ (выбираем 4 клетки из верхней половины в случае горизонт-й симметрии и из левой в случае вертикал-й ср. линии.

~~2) Тогда все фигуры кроме обладающих всеми симметриями в сумме $C^4_{100 \cdot 250} \cdot 3$ посчитаны~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~[illegible]~~ Тогда в сумме $C^4_{100\cdot250}\cdot 3$ ~~[illegible]~~ все фигуры, обладающие ровно одним типом симметрии ~~использованы~~ посчитаны один раз, а обладающие всеми тремя типами - все три раза (поскольку фигур, обладающих ровно двумя типами, нет, мы посчитали все фигуры). Тогда количество фигур общее равно

(Кол-во фигур с центральной симметрией) + (Кол-во фигур с симметрией относительно горизонтальной средней линии) + (Кол-во фигур с симметрией относительно вертикальной средней линии) −

− 2·(Кол-во фигур, обладающих всеми типами симметрий) $= 3\cdot C^4_{100\cdot250} - 2\cdot C^2_{100\cdot125}$

ответ: $3\cdot C^4_{100\cdot250} - 2\cdot C^2_{100\cdot125}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N6

Заметим, что если произведение двух целых чисел является квадратом простого числа p, то либо по модулю оба эти числа равны p, либо одно по модулю равно p^2, а второе по модулю равно 1

1) если оба числа (т.е. $a-c$ и $b-c$) по модулю равны p $\Rightarrow$ либо $\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases}$ либо $\begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases}$

(иначе квадрат p будет <0, $\varnothing$)

но тогда ~~либо~~ $a-b=0$ (в обеих системах), и не выполняется условие $a-b \,\vdots\, 3$, противоречие

2) если одно число по модулю равно 1, а второе p^2, то возможны четыре варианта:

$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$

Заметим, что в этих двух случаях $a-b=1-p^2$ ~~...~~, но $|p|>1$ (т.к. наименьший ~~...~~ модуль простого $=2$), а значит и $p^2>1$, тогда $a-b=1-p^2<0$, но тогда ~~...~~

но тогда $a<b$, что противоречит условию, противоречие

остается два варианта:

$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$, в этих случаях $a-b=p^2-1$, но заметим, что если p - простое, которое не делится на 3, то $p^2 \underset{3}{\equiv} 1$

(т.к. p может иметь остаток или 1 или 2, а квадраты 1 и 2 имеют остаток 1 по модулю 3)

но в таком случае $a-b=(p^2-1)\vdots 3$,

а значит $a-b$ кратно 3, что противоречит условию $\Rightarrow$

$p \vdots 3$, т.е. $p=3$ (т.к. p - простое)

то есть пока возможны два варианта:

$$\begin{cases} a-c=3^2 \\ b-c=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-3^2 \end{cases}$$

в этих случаях $a-b=8$

также мы знаем, что $a+b^2=560$,

т.е. $\begin{cases} a+b^2=560 \\ a-b=8 \end{cases}$, т.е. $b=a-8$

т.е.

$$a+a^2-16a+64=560, \text{ т.е.}$$

$$a^2-15a+496=0$$

по т. Виета имеем корни -16 и 31,

т.е. $\begin{cases} a=-16 \\ b=-24 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=31 \\ b=23 \end{cases}$

если $a-c=3^2 \rightarrow$ тогда $c=-25$ | тогда $c=32$ $\leftarrow$ если $a-c=-1$

если $a-c=-1 \rightarrow$ или $c=-15$ | или $c=22$ $\leftarrow$ если $a-c=3^2$

получается возможные тройки чисел (a, b, c) это $(-16,-24,-25)$, $(-16,-24,-15)$, $(31,23,32)$, $(31,23,22)$

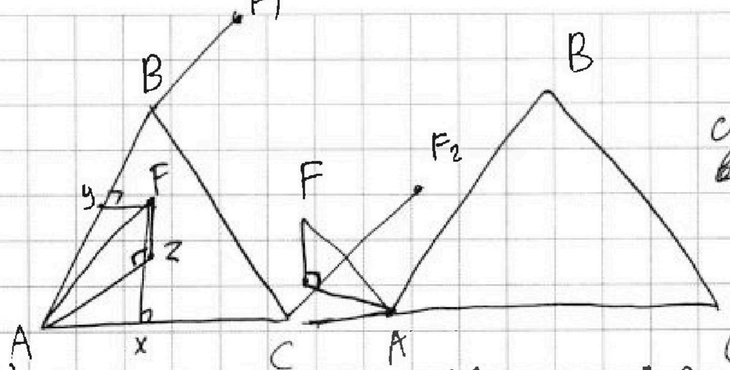
ответ: $(-16,-24,-25)$, $(-16,-24,-15)$, $(31,23,32)$, $(31,23,22)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N7.



назовем ребром ребро призмы, соединяющее вершины верхнего и нижнего основания (образующая призмы)

$\triangle ABC$ – основание призмы

$\triangle FF_1F_2$ – верхнее основание призмы

(A,B,C) – плоскость, проходящая через точки A, B и C

Тк площадь грани (которая является параллелограммом) определяется как $1 \cdot x \cdot \sin\alpha$, где x – длина ребра, $\sin\alpha$ – синус угла между ребром и стороной основания

и площади двух граней равны, какое-то ребро составляет с двумя сторонами (ребро и эти две стороны имеют общую точку) равные с точностью до 180 углы (либо α и α, либо α и $180-\alpha$) т.к. синусы в произведениях должны быть равны для подсчета площадей граней

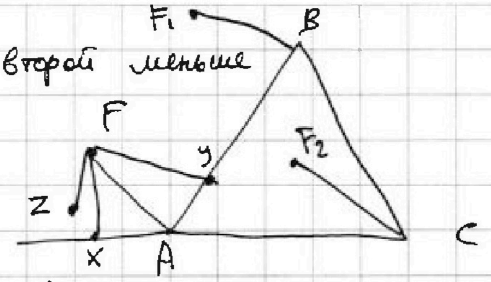
Тогда заметим, что если с обоими сторонами (без ограничение общности AB и AC) ребро AF составляет угол α (т.е. $\angle FAB = \angle FAC = \alpha$) то пусть X, Y – основания перпендикуляров из F на AC и AB соответ-нно, то $AX = AY = AF \cdot \cos\alpha$. Заметим, что если Z – основание перпендикуляра из F на (A,B,C), то ZX и $YZ \perp FZ$ и $\perp$ AC и AB соответственно из теоремы о трех перпендикулярах. Тогда заметим, что $ZX = YZ = \sqrt{(AZ)^2 - (AX)^2}$ по т. Пифагора (и т.к. $AX = AY$) $\Rightarrow ZX = ZY$, тогда AZ – биссектриса но в равностороннем $\triangle ABC$ биссектриса $\perp$ основанию $\Rightarrow AZ \perp BC \Rightarrow$ по т. о трех перпендикулярах $AF \perp BC$ (или т.к. $BC \perp FZ$ и $\perp AZ$, $BC \perp$ плоскости (A,F,Z)) $\Rightarrow BC \perp AF$ но тогда площадь грани $BCF_2F_1 = x$ (x – длина ребра) $\Rightarrow x = 3$, $x \sin\alpha = 4$, тогда $\sin\alpha = \frac{4}{3} > 1$, это невозможно ($|\sin\alpha| \le 1$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Значит один из углов $\angle FAC$ и $\angle FAB$ больше $90°$, а второй меньше. Пусть это без ограничения общности $\angle FAC > 90°$.

Пусть X, y – по прежнему основания перпендикуляров из F на AC и AB соответственно $\Rightarrow$ тогда, т.к. $\angle FAC > 90°$, X не лежит на отрезке AC, а т.к. y лежит на отрезке AB. Тогда $\angle FAX = 180° - \angle FAC = \angle FAB$

$$AX \overset{!!}{=} Ay = FA \cdot \cos\alpha, \quad \text{где } \alpha = \angle FAB$$

Пусть Z - основание перпендикуляра из F на (A,B,C), тогда ~~по т. о трёх~~ т.к. $XA \perp FX$ и $XA \perp FZ$ (т.к. $XA \in (A,B,C)$) $XA \perp$ плоскости $(F,X,Z) \Rightarrow XA \perp ZX$ аналогично $yA \perp Zy$

тогда по т. Пифагора $ZX = \sqrt[2]{AZ^2 - XA^2}$, $Zy = \sqrt[2]{AZ^2 - Ay^2}$, но $Ay = AX \Rightarrow ZX = Zy \Rightarrow Z \in$ биссектрисе $\angle XAy \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZAX = 60°$, но тогда $ZA \parallel BC$, т.к. $\angle BCA = \angle ZAX = 60°$ (углы при секущей равны $\Rightarrow$ прямые параллельны) $\Rightarrow$ угол между прямыми BC и AF равен $\angle FAZ$ ($\angle$ между прямыми AF и AZ), но тогда (т.к. $AF \parallel CF_2$) $\sin\angle F_2CB = \sin\angle FAZ$ (нам не важно, $\angle F_2CB$ равен $\angle FAZ$ или $180° - \angle FAZ$, т.к. синус от этого не меняется), $\sin\angle FAZ = FZ / AF = H/x$, где H - высота призмы, а x - длина ребра (образующей)

но тогда площадь $F_2CBF_1 = 1 \cdot x \cdot \sin\angle F_2CB = x \cdot \frac{H}{x} = H = 3 \Rightarrow$ высота призмы равна 3

!!

ответ: высота призмы равна 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$39 - 35 \quad 13 \cdot 5 = 50 - 65 \quad \frac{-100}{-8}$

$a_1 \quad ba_1 \quad b^2a_1, \ldots, b^6a_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \quad b^{12}a_1 = 5 - x$

$b^{14}a_1 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$b^{20}a_1^2$

$b^8 = (x+1)^2$

$b = \sqrt[4]{x+1}$

$(x+1)^2 = b^{\frac{1}{8}} \frac{13x-35}{x+1} > 0 \quad 1 = b^2$

$a_1^{\frac{1}{x+1}} = 49$

$(\cos+1)(3\cos+3)$

$(5-x)^2\sqrt{x+1} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$(5-x)^2 (x+1) = (13x-35)(x+1)$

$x^2 + 25 - 10x = 13x$

$x^2 - 23x + 50 = 0$

$\boxed{20;3}$

$\frac{15}{7}\sqrt{21}$

$a = -16 \quad a = b = a - 8$

$a + a^2 - 16a + 64 = 560$

$a^2 - 15a - 496 = 0$

$\boxed{16 \cdot 31}$

$x = 3$

$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 =$

$2\sqrt{y + x - x^2 + 2}$

$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169 - z^2}$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$a > b$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$a + b^2 = 560$

$a - c = b - c$

$a - c = 1 \quad b - c = p^2$

$4\cos^3 x + 3\cos x + 3 = p$

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$6\cos^2 x - 1$

$\cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$= \cos^3 x - 3\sin^2 \cos x$

$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x$

$4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x - 3$

$4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 \cdot 32 - 24$

$560 \quad 280 \cdot 2 \quad 140 \cdot 4 \quad 70 \cdot 8 \quad 35 \cdot 16 \quad 2^4 \cdot 5 \cdot 7$

$2 \cdot 248 \quad 8 \cdot 62 \quad 4 \cdot 124$

$13 \cdot 20 = 260 - 35 = 225 \quad 225 = 15 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 7$

$2 \cdot 113 \quad 3 \cdot 37 \quad 3 \cdot 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

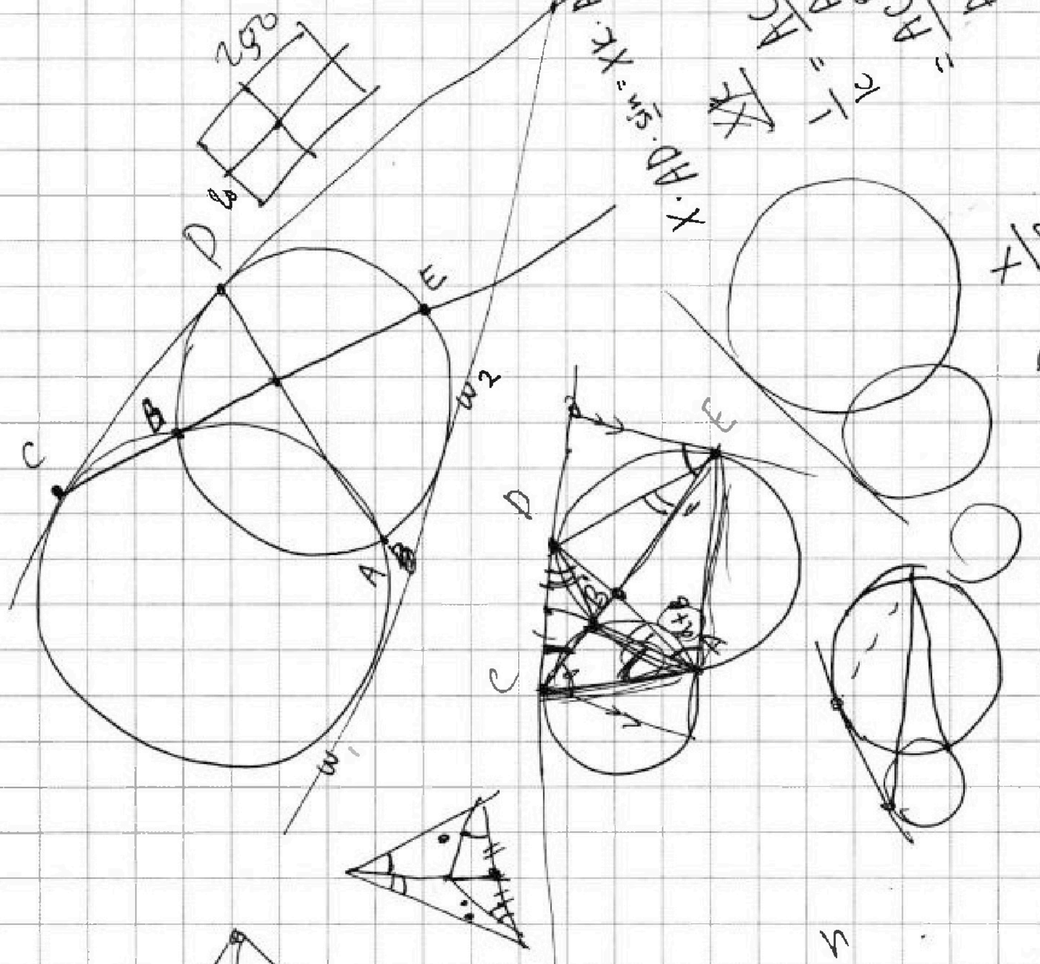
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$ED/CD=?$

$a>b$



$\frac{BD}{AF}=\frac{x}{\sqrt2}$

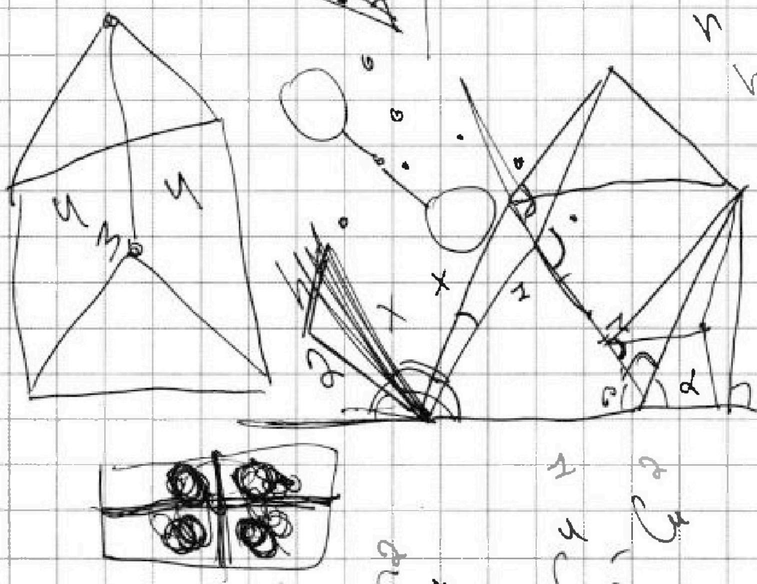
$\frac{CD}{AF}=\frac{\sqrt2}{5}$

$\frac{BD}{CD}=\frac{x}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}$

$\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{x}{\sqrt5}$

$x\cdot AD\cdot\frac{\sin}{5}=XC\cdot AC\cdot\frac{\sin}{\sin B}$

$\frac{XF}{XC}=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{\sin B}{\sin}$



$3\cdot C^{4}_{100\cdot 200}-2C_4^2$

$x\sin\alpha=4$ $\quad x\cdot\frac{h}{x}=3$

$\frac{x\sin\alpha}{\ldots}=4,\ x=3$

$\sin\alpha=\frac{4}{3}$

C_4^2 $\quad C_n^4$ $\quad C_4^2$