



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5 - x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x - 35)(x + 1)}$ .
2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a, b, c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .  $= 2^4 \cdot 5 \cdot 7$

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть первый член геометрической прогрессии равен  $x_0$ , тогда второй равен  $x_0 \cdot b$ , третий равен  $x_0 \cdot b^2$ , четвёртый —  $x_0 \cdot b^3$ , пятнадцатый —  $x_0 \cdot b^{14}$ , где  $b$  — частное двух последовательных членов этой геометрической прогрессии (при делении большего по индексу на меньший).

тогда  $\frac{a_{15}}{a_{13}} = b^8$  (где  $a_{15}$  — пятнадцатый член прогрессии,  $a_{13}$  — тринадцатый)

$$\frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = b^8 \text{ тогда } b^2 = \pm \sqrt{13x-35} \cdot \sqrt{x+1}$$

$(b^2 \neq -\sqrt{x+1}, \text{ т.к. } b^2 \geq 0,$   
 $\text{а } x+1 \neq 0)$

тогда  $a_{13} \cdot b^2 = a_{15}$ , т.е.  $(5-x)(\sqrt{x+1}) = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

но знаяем, что  $b^2 \geq 0$  находит  $x+1 \geq 0$ , т.е.  
 $x \geq -1$ , но тогда

возьдем обе части в квадрат:

$$(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(x+1) \quad \text{т.к. } x+1 \neq 0, \text{ т.к.}$$

Э число  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , а  
деление на него  
неопределено, мы можем  
поделить обе части  
на  $x+1$  если  $(x+1) > 0$

$$13x-35 = (5-x)^2$$

$$\text{т.е. } x^2 - 23x + 60 = 0$$

решения Т. Виета получаем,  
что корни

$$\text{уравнения это } x=20 \text{ и } x=3$$

т.е. если последовательность существует, то  
должны быть равносильны, но они являются следствием)  
Пример: при  $x=20 \quad a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{225 \cdot 21} = 15\sqrt{21}$ ,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и при  $x = 20$  получаем, что

$$b^2 = \sqrt{21^2}, \text{ а } a_{15} = a_{13} \cdot b, \text{ т.е.}$$

$$(5-x)(\sqrt{1(x+1)}) = \sqrt{(13x-35)(x+1)},$$

но  $(5-x)(\sqrt{1(x+1)}) < 0$ , а  $\sqrt{(13x-35)(x+1)} > 0$ ,  
противоречие,  $x \neq 20$

также нужно рассмотреть вариант, когда  $x+1 < 0$ ,

$$(13x-35) = (5-x)^2 - 1 (мы сократили на |x+1|)$$

$$\text{т.е. } x^2 - 10x + 25 + 13x - 35 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

но т. Вместо получаем корни

-5 и 2, но нам подходит только  
-5, т.к. по предположению  $x+1 < 0$ , т.е.

$$x < -1, \text{ а } 2 > -1.$$

остается вариант,

згд  $x = -5$  или  $x = 3$

$$\text{если } x = -5, \text{ то } a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{-100 \cdot -4} = 40 \cdot 2,$$

$$a = b = \sqrt{1(x+1)} = 2, \text{ т.к.}$$

$$a_{13} = \sqrt{\frac{-100}{-8}}, \text{ а } a_{13} = 10,$$

т.е. нам подходит последн. г., згд

$$b = \pm 2, \text{ а } a_{13} = \sqrt{\frac{-100}{-8}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\text{если } x = 3 \text{ то } b = \sqrt{1(x+1)} = 2, \text{ а } a_7 = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4},$$

т.е. нам подходит н-тн, згд  $b = \pm \sqrt{2}$ ,

$$a_7 = \pm \frac{1}{4} \quad (a_{15} = 4, a_{13} = 2)$$

ответ:  $x = 3$  или  $-5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{13^2-z^2} \end{cases}$$

||  
 $(13-z)(13+z)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$\cos^2 x$  по формуле  
двойного угла  $= 2\cos^2 x - 1$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 \cos x \\ &= \cos x \cdot (2 - \sin^2 x) = \\ &= \cos x - \sin^2 x \cos x\end{aligned}$$

$$= \cos^3 x - 3\sin^2 \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \\ = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$3 \cos 2x = (2\cos^2 x - 1)3$$

$$\begin{aligned}\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x &= 4\cos^3 x + (2\cos^2 x - 3 + 6\cos x - 3\cos x) = \\ &= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x = p + 3\end{aligned}$$

$$\cos x (4\cos^2 x + 6\cos x + 3) = p + 3$$

1 1 1  
4 4 4  
6 6 6

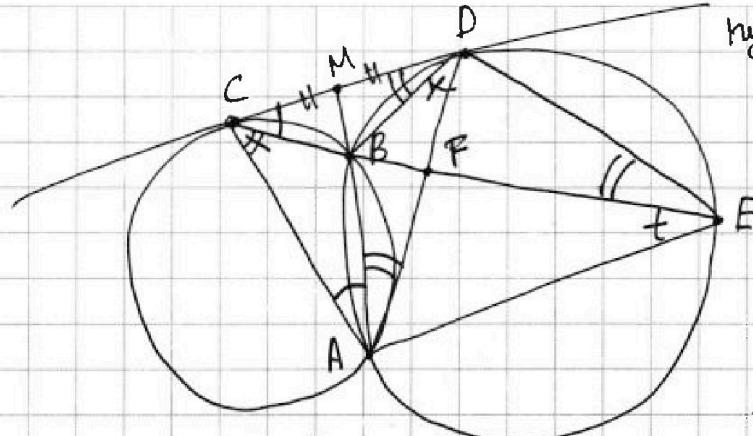
$$p + 3 < 13, \quad p < 10$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



пусть  $\angle DCB = \alpha$ ,

$\angle CDB = \beta$

тогда

по т. об угле  
между касательной  
и хордой

$\angle DCB = \angle CAB$ , а

$\angle CDB = \angle DAB$

(хорды CB и BD и  
касательная (одна из) CD)

F - точка пересечения

$AD \subset CE$ , M - точка пересечения

$AB \subset CD$

Также, по т. об

угле между касательной

и хордой  $\angle CDB = \angle DEB$  (хорда BD)

тогда по т. синусов б  $\triangle CDE$  имеем, что

$$\frac{CD}{\sin \beta} = \frac{DE}{\sin \alpha}, \text{ т.е. } \frac{CD}{DE} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Далее рассмотрим 2 т. синусов б  $\triangle BAD$  и  $\triangle BAC$ :

$$\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha} \quad , \quad \frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \angle BCA} \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BDA} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

но по т. ~~синусов~~ синусов б  $\angle CBD = \angle CAD$   $\frac{CB}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin \alpha}$ , т.е.  $\frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ , значит

$$\frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BDA} = \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2$$

Далее заметим, что  $\angle DAE = \angle DBE$  (углы опираются на

хорду DE), а  $\angle DBE = \alpha + \beta$ , как внешний б  $\angle CBD$ , тогда

$\angle DAE = \angle DBE = \alpha + \beta$ . Но  $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \alpha + \beta \Rightarrow \angle CAD = \angle DAE$

и AF - биссектриса б  $\angle CAE \Rightarrow$  по свойству биссектрисы  $CF/FE = AC/AE$ . но условию задачи  $CF/FE = 3/10$ , а

по т. синусов б  $\angle CAE$   $CA/AE = \sin \angle CEA / \sin \angle BCA$ , но

$\angle CEA = \angle BDA$  (они опираются на одну хорду BA), тогда

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sin \angle CEA}{\sin \angle BCA} = \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CF} = \frac{10}{3} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BCA}, \text{ но мы доказали,}$$

$$\text{что } \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BCA} = \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2, \text{ поэтому } \frac{10}{3} = \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2, \text{ тогда}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{10}{3}} \quad (\sin \text{ угол треугольника} > 0)$$

Заметим, что по т. синусов  $\delta \triangle CDE$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{CE}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{10}{3}}, \text{ т.к.}$$

$$\text{ответ: } \frac{DE}{CE} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введен систему координат для удобства обозначения N5 клеток ~~\* означенных~~ (см. выделенный \* комментарий)

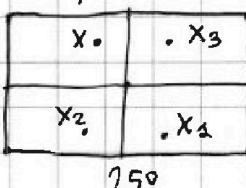
Заметим, что если фигура одновременно обладает

всеми перечисленными симметриями:

Рассмотрим прямогольник так, что его сторона длиной 200 вертикальна

1) Если она обладает центральной симметрией и

симметрией относительно одной из средних линий (без ограничения общности, пусть это ср. линия, параллельная стороне из 200 клеток) рассмотрим произвольную точку (клетку)



которая  
закрашена

$X_3$ , тогда симметрия клетка  $X_3$  относительно центра (пересечение двух средних линий), а в силу центральной симметрии (симметрии относительно средней линии) закрашена клетка  $X_2$ ,

симметричная  $X_1$  относительно ср. линии, параллельной строке из 200 клеток. Осталось заметить, что

в силу центральной симметрии закрашена клетка  $X_3$ , симметрична  $X_2$  относительно центра но у клетки  $X$  были координаты  $(a, b)$ , тогда у клетки  $X_3$  это  $(250-a, 200-b)$ , у  $X_2$  это

$(a, 200-b)$ , у  $X_3$  это  $(200-a, b)$

\* первая координата - расстояние до верхней стороны прямогольника, вторая - до левой стороны прямогольника (у верхней левой клетки координаты  $(0, 0)$ , у нижней правой -  $(250, 200)$ , у нижней левой  $(0, 200)$ , у верхней правой -  $(250, 0)$ )

но тогда точки  $X$  и  $X_3$  симметричны относительно второй средней линии, т.е. у произвольной точки  $X$  (клетки), симметричные ей относительно центра и обеих средних линий закрашены, значит фигура обладает всеми перечисленными симметриями



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) фигура обладает симметриями относительно обеих средних линий:

$\cdot X_1$	$\cdot X_1$
$\cdot X_2$	$\cdot X_2$

Тогда рассмотрим произвольную клетку  $X$  с координатами  $(a, b)$ . В силу симметрии относительно вертикальной средней линии ~~клетка~~ клетка  $X_1$  с координатами  $(250 - a, b)$  закрашена, а в силу симметрии относительно горизонтальной средней линии точка  $X_2$  с координатами  $(250 - a, 250 - b)$  закрашена (она симметрична  $X_1$  относительно вертикальной средней линии)  $\Rightarrow$  у произвольной ~~клетки~~  $X$  ~~клетка~~, центрально-симметричная ей (в данном случае это клетка  $X_2$ ) закрашена. Тогда все фигура центрально симметрична (осталось лишь доказать симметрии она обладает)  $\Rightarrow$  она обладает всеми видами симметрий)

Заметим, что чтобы посчитать кол-во фигур, обладающих всеми видами симметрий, достаточно посчитать кол-во вариантов выбрать 2 клетки из прямоугольника  $100 \cdot 125$ , т.к. любая такая фигура определяется двумя клетками в верхней левой четверти прямоугольника (в силу симметрии в каждой четверти прямоугольника однокаково кол-во закрашенных клеток - 2, и чтобы получить всю фигуру, достаточно отразить эти две клетки ~~своими~~ от горизонтальной, от вертикальной средней линии, и от центра (их пересечения), и закрасить образы ~~из~~ этих двух клеток при переслеках симметричных  $\Rightarrow$  2 клетки в верхней левой четверти определяют всю фигуру  $\Rightarrow$  таких фигур ровно  $C^2_{100 \cdot 125}$  штуки. Теперь заметим, что фигур,

обладающих одним типом симметрии ровно  $3 \cdot C^4_{100 \cdot 125}$ ,

т.к. по отдельности фигур, обладающих центр. симметрией  $C^4_{100 \cdot 125}$  (выбираем 4 из верхней половины прямоугольника, это однозначно определяет всю фигуру), относительно горизонтальной и вертикальной линии  $C^4_{100 \cdot 125}$  (выбираем 4 клетки из верхней половины, в случае горизонтальной симметрии и из левой в случае вертикальной). Ср. линии.

Все фигуры, кроме обладающих всеми видами симметриями  $C^4_{100 \cdot 125}$  появляются



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Когда я смотрел на фигуры, Тогда  
в сумме  $C_{100 \cdot 250}^4 \cdot 3$  ~~было~~ вae фигуры,  
обладающие ~~одним~~ один типом симметрии  
~~одной~~ раз, а обладающие  
посчитали

Всеми тремя типами - Все три раза (поскольку  
фигур, обладающих ~~одним~~ ~~двумя~~ ~~одним~~ типами, нет,  
мы, посчитали ~~все~~ ~~фигур~~) Тогда количество  
фигур ~~одинаково~~ равно

$$\left( \text{Кол-во фигур с центральной симметрией} \right) + \left( \text{Кол-во фигур с симметрией относительно горизонтальной средней линии} \right) + \left( \text{Кол-во фигур с симметрией относительно вертикальной средней линии} \right) =$$

$$- 2 \cdot \left( \text{Кол-во фигур, обладающих всеми тремя симметриями} \right) = 3 \cdot C_{100 \cdot 250}^4 - 2 \cdot C_{100 \cdot 125}^2$$

$$\text{ответ: } 3 \cdot C_{100 \cdot 250}^4 - 2 \cdot C_{100 \cdot 125}^2$$



1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что если произведение двух целых чисел является квадратом простого числа  $p$ , то либо оба эти числа равны  $p$ , либо одно по модулю равно  $p^2$ , а второе по модулю равно 1

1) если оба числа (т.е.  $a-c = b-c$ ) по модулю равны  $p \Rightarrow$  либо  $\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$  либо  $\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases}$

(иначе квадрат  $p$  будет  $< 0$ ,  $\emptyset$ )

но тогда  ~~$a-b=0$~~   $a-b=0$  (в обеих системах)  
и не выполняется условие  $a-b \neq 3$ ,  
противоречие

2) если одно число по модулю равно 1, а второе  $p^2$ , то возможны четыре варианта:

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

Заметим, что в этих случаях

$a-b = 1-p^2$  ~~меньше~~, но  $|p| > 1$  (т.к.  $p$  — наименьшее простое  $= 2$ ),  
тогда  $a-b = 1-p^2 < 0$ , но тогда  $a$  значит и  $p^2 > 1$

но тогда  $a < b$ , что противоречит условию,  
противоречие  
остается два варианта:

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}, \text{ в этих}$$

случаях  $a-b = p^2 - 1$ , но заметим, что если  $p$  — простое, которое не делится на 3, то  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(т.к.  $p$  может иметь остаток или 1 или 2, а квадраты 1 и 2 имеют остаток 1 по модулю 3)

~~также~~ то в таком случае  $a-b = (p^2 - 1) : 3$ ,  
а значит  $a-b$  кратно 3, что противоречит условию  $\Rightarrow p \nmid 3$ , т.е.  $p = 3$  (т.к.  $p$  - простое)

то есть пока возможны два варианта:

$$\begin{cases} a-c = 3^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -3^2 \end{cases} \quad \text{В этих случаях } a-b = 8$$

также мы знаем, что  $a+b^2 = 560$ ,

т.е.  $\begin{cases} a+b^2 = 560 \\ a-b = 8 \end{cases}$ , т.е. ~~если~~,  $b = a - 8$

т.е.  ~~$a^2 + b^2 + 16b + 64 = 560$~~ , т.е.  ~~$a^2 + b^2 - 582 = 0$~~

$$a^2 + a^2 - 16a + 64 = 560, \text{ т.е.}$$

$$a^2 - 16a + 496 = 0$$

но т. Всего имеем корни  $-16$  и  $31$ ,

т.е.

$$\begin{cases} a = -16 \\ b = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{если}} a-c=3^2 \rightarrow$  тогда  $c = -25$        $\xleftarrow{\text{если}} a-c=-1 \rightarrow$  если  $a-c=3^2-1$

$\xrightarrow{\text{если}} \text{или } c = -15$        $\text{или } c = 32$        $\xleftarrow{\text{если}} a-c=3^2$

получаются возможные тройки чисел

$(a, b, c)$  это  $(-16, -24, -25), (-16, -24, -15),$   
 $(31, 23, 32), (31, 23, 22)$

order:  $(-16, -24, -25), (-16, -24, -15),$

$(31, 23, 32), (31, 23, 22)$

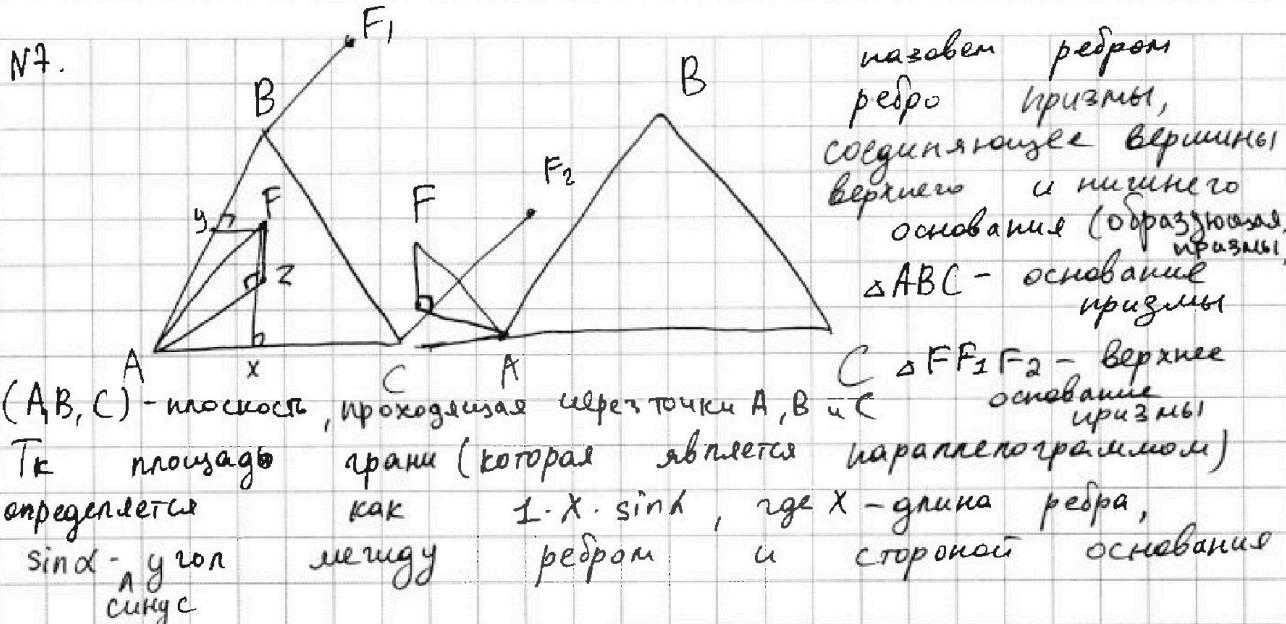


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



и площади двух граней равны, като-то ребро составляет с двумя сторонами (ребро и эти две стороны имеют общую точку) равные с точностью до  $180^\circ$  углы (либо  $d$  и  $d$ , либо  $d$  и  $180^\circ-d$ ) т.к. синусы в произведениях долинки - б/т равны для подсчета площадей граней

Тогда заметим, что если с обими ~~общими~~ сторонами ~~формируется~~ ребро  $AF$  составляет угол  $d$  (т.е.  $\angle FAB = \angle FAC = d$ ) то пусть  $X, Y$  - основания перпендикульров из  $F$  на  $AC$  и  $AB$  соответственно, ~~формируются~~  $\angle FAB = \angle FAC = d$  то  $AX = AY = AF \cdot \cos d$  Заметим, что если  $Z$  - основание перпендикульра из  $F$  на  $(A, B, C)$ , то  $ZX$  и  $YZ \perp FZ$  и  $\perp AC$  и  $AB$  соответственно ~~по~~ из теоремы о трех перпендикулярах. Тогда заметим, что  $ZX = YZ = \sqrt{(AZ)^2 - (AX)^2}$

по т. Пифагора (и т.к.  $AX = AY$ )  $\Rightarrow ZX = ZY$ , тогда  $AZ$  - биссектриса ~~по~~ ~~по~~  $\angle BAC$  равностороннему  $\triangle ABC$  биссектриса  $\perp$  основанию  $\Rightarrow AZ \perp BC \Rightarrow$  по т. о трех перпендикулярах  $AF \perp BC$  (или т.к.  $BC \perp FZ$  и  $\perp AZ$ ,  $BC \perp$  иносостри  $(A, F, Z) \Rightarrow BC \perp AF$  но тогда площадь грани  $B(CF_2F_3) = X(x - \text{длина ребра}) \Rightarrow X=3$ ,  $X \sin d = 4$ , тогда  $\sin d = \frac{4}{3} > 1$ , это невозможно ( $|\sin d| \leq 1$ )

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

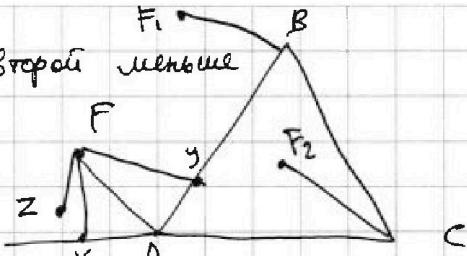
СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

значит один из углов  
 $\angle FAC$  и  $\angle FAB$  больше  $90^\circ$ , а второй меньше  
 ибо это без ограничения  
 общности  $\angle FAC > 90^\circ$

пусть  $X, Y$  - по премисме  
 основания перпендикуляров

из  $F$  на  $AC$  и  $AB$  соответственно  $\Rightarrow$  тогда, т.к.  $\angle FAC >$   
 $> 90^\circ$ ,  $X$  не лежит на отрезке  $AC$ , а т.к.  $Y$  лежит  
 на отрезке  $AB$ . Тогда  $\angle FAX = 180^\circ - \angle FAC = \angle FAB$



$$AX = AF \cdot \cos \alpha, \text{ где } \alpha = \angle FAB$$

Пусть  $Z$  - основание перпендикуляра из  $F$  на  $(AB, C)$ ,  
 тогда ~~так как~~ т.к.  $XA \perp FX$  и  $XA \perp FZ$  (т.к.  $X \in (A, B, C)$ )  
 $XA \perp$  плоскости  $(FX, Z) \Rightarrow XA \perp ZX$  аналогоично  $YA \perp ZY$   
 тогда по т. Пифагора  $ZX = \sqrt{AZ^2 - XA^2}$ ,  $ZY = \sqrt{AZ^2 - YA^2}$   
 но  $AY = AX \Rightarrow ZX = ZY \Rightarrow Z \in$  биссектрисе  $\angle XAY \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle ZAX = 60^\circ$ , но тогда  $ZA \parallel BC$ , т.к.  $\angle BCA =$

$= \angle ZAX = 60^\circ$  (углы при секущей равны  $\Rightarrow$  прямые  
 параллельны)  $\Rightarrow$  угол между прямими  $BC$  и  $AF$   
 равен  $\angle FAZ$  ( $\angle$  между прямими  $AF$  и  $AZ$ ), но тогда  
 (т.к.  $AF \parallel CF_2$ )  $\sin \angle F_2CB = \sin \angle FAZ$  (нам не важно,  
 $\angle F_2CB$  равен  $\angle FAZ$  или  $180^\circ - \angle FAZ$ , т.к. скуче от этого  
 не меняется),  $\sin \angle FAZ = FZ / AF = H/X$ , где  
 $H$  - высота призмы, а  $X$  - длина ребра (образующей)  
 но тогда площадь  $F_2CBF_1 = 1 \cdot X \cdot \sin \angle F_2CB =$   
 $= X \cdot \frac{H}{X} = H = 3 \Rightarrow$  высота призмы равна 3

Ответ: высота призмы равна 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{решение } 13.5: 13 \cdot 5 = 50 - 65 \xrightarrow{\frac{-100}{-8}} -16, 31 \\
 & a_{01} b_{01} b^2 a_1, \dots, b^6 a_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \xrightarrow{b^6 a_1 = 5-x} \\
 & \frac{1}{b^8} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} \xrightarrow{b^8 = (x+1)^2} \\
 & b^4 = \frac{(x+1)}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{(x+1)^2} b^{20} a_1^2 \xrightarrow{\text{окончание}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a = b = a - 8 \xrightarrow{a = -16} \\
 & a + a^2 - 6a + 64 = 56 \xrightarrow{a^2 = 4 \cdot 124} \\
 & a^2 - 15a + 496 = 0 \xrightarrow{a = \frac{15 \pm \sqrt{2025}}{2} = 7.5, 17.5} \\
 & a = 7.5 \xrightarrow{\sqrt{y+x-x^2+2}} \frac{16}{96} \xrightarrow{y+11+3|y-12|=16-2^2} \\
 & \frac{1}{2}\sqrt{y+x-x^2+2} \xrightarrow{\frac{1}{2}\sqrt{4-x-2}+5=35/6} \\
 & \frac{1}{2}(5-x)\sqrt{x+1} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \xrightarrow{(5-x)^2(x+1) = (13x-35)(x+1)} \\
 & \frac{1}{2}(5-x)^2(x+1) = (13x-35)(x+1) \xrightarrow{25x^2+25-10x-x^2-13x=13x^2+13x-35} \\
 & 24x^2+24x+10x-35=0 \xrightarrow{48x^2+48x+10x=0} \\
 & 20x^2+58x=0 \xrightarrow{x(20x+58)=0} \\
 & x_1=0, x_2=-\frac{58}{20}=-\frac{29}{10}=-2.9 \xrightarrow{x_2=2.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a \geq b \xrightarrow{p^2 \geq p^2} (a-c)(b-c) \geq p^2 \\
 & (a-b)^2 / 3^2 \geq p^2 \xrightarrow{10 \cdot 2 =} a - c \geq p^2 \\
 & (a-c)(b-c) = p^2, K \geq p^2 \xrightarrow{y - (-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a+b^2 = 560 \quad a \cdot c \geq 2 \\
 & 560 \quad a-c = b-c \\
 & 280 \quad b=c \quad 0 \quad p^2 = p^2 \\
 & 140 \quad \cos^2 x + \cos^2 x \quad 0 \quad p^2 = p^2 \\
 & 40 \cdot 8 \quad a \cdot c = 2 \quad \cos^2 x + \cos^2 x \\
 & 35 \cdot 16 \quad b \cdot c = p^2 \quad \cos^2 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos^2 x \\
 & 2 \cdot 5 \cdot 7 \quad 2 \cdot \cos^2 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos^2 x = 0 \quad -1 \\
 & 140 \cdot 9 \quad \cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 0 \quad +3 \\
 & 252 \quad 2 \cos^2 x - 1 = 0 \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4} \\
 & 252 \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{\pi}{2} \\
 & 252 \quad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad x_4 = \frac{\pi}{4}, x_5 = \frac{3\pi}{4} \\
 & 252 \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_6 = \frac{\pi}{3}, x_7 = \frac{2\pi}{3} \\
 & 252 \quad \cos x = \pm 1 \quad x_8 = \frac{\pi}{2}, x_9 = \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3d - 24 \cdot 3c + 6c \cos 2x \xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \\
 & -6 \cdot 4 \cdot 3d - 24
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

