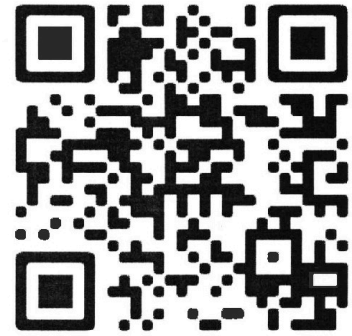




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a$  - первый член геом. прогрессии,  $q$  - множитель  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_4 = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = aq^3; \quad a_{10} = x+4 = aq^9; \quad a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = aq^{11}$$

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (15x+6)(x-3) \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \quad \frac{a_{12}}{a_4} = \frac{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}{\sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \frac{1}{q^8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-3)^4}} = \frac{1}{(x-3)^2} = q^8 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{q^4} + 3\right) \quad (\text{Могут появиться лишние корни, от них избавимся подстановкой})$$

$$q^2 = \sqrt{\frac{1}{|x-3|}} \quad a_{10} = a_4 \cdot q^6 =$$

$$= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3} \cdot \frac{1}{|x-3|}} = x+4 \quad x \geq -4$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = \frac{x+4}{\sqrt{|x-3|}} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$1) \quad x > 3: \quad x+4 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-3)^4}} = \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{q^8} \quad q^2 = \sqrt{|x-3|}$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = (x+4)\sqrt{|x-3|} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$1) \quad x > 3: \quad x+4 = \sqrt{15x+6} \quad x^2 + 8x + 16 = 15x + 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9 \quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2 \quad \text{подстановкой}$$

получаем что  $x = 2$  невозможно

$$2) \quad x < 3: \quad x+4 = \sqrt{-15x-6} \quad x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \quad x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$D = 23^2 - 88 = 21^2 \quad x = \frac{-23 \pm 21}{2} = -1; -22 \quad \text{т.к. } x+4 \geq 0 \quad x = -22 \text{ не подх}$$

Ответ: 5; -1

23	529
23	- 88
69	441
46	4
529	
	21
	21
	441



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = \sqrt{x+7}$   $b = \sqrt{5-x}$

$$\begin{cases} a-b+6 = 2ab \Rightarrow 2a-2b+12 = 4ab \Rightarrow \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 - 4ab = 12 - 2a + 2b - 12$$

$$a^2 + a(2-2b) + b^2 - 2b = 0$$

$$D = 16b^2 - 16b + 4 - 4b^2 + 8b = 12b^2 - 8b + 4 = 8b^2 + (2b-2)^2$$

$$b^2 - b(4a+2) + a^2 + 2a = 0$$

$$D = 16a^2 + 16a + 4 - 4a^2 - 8a =$$

$$ab \begin{cases} a^2+b^2 - 2ab = 4(ab)^2 - 24ab + 36 \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases}$$

$$a^2+b^2 = 12$$

$t = ab$   
ТОЛЬКО с минусом так как  $5-x \geq 0$

$$2t = 12 - 4t^2 + 24t - 36$$

$$t = 6 - 2t^2 + 12t - 18$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 96 = 25$$

$$t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$$

$$D = 36 + 4 \cdot 14 = 112$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{112}}{2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \rightarrow x+7 = 4 + 4\sqrt{5-x} + 5-x$$

$$2x - 2 = 4\sqrt{5-x}$$

$$x-1 = 2\sqrt{5-x}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 20 - 4x$$

$$x^2 - 6x - 19 = 0$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{x+7} + 3 = \sqrt{5-x} \rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ:  $x = \frac{6 - \sqrt{112}}{2}; y = 35; z = 0$

$x = \frac{6 + \sqrt{112}}{2}; y = 35; z = 0$

Ответ:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим график  $f(y) = |y-20| + 2|y-35|$

1)  $y \leq 20$ :  $f(y) = -y + 20 - 2y + 70 = -3y + 90$

На данном отрезке  $f(y)$  убывает  $\Rightarrow$  мин знач  $= f(20) = 30$

2)  $y \in (20; 35]$   $f(y) = y - 20 - 2y + 70 = 50 - y$

На данном отр  $f(y)$  убыв  $\Rightarrow$  мин  $f(35) = 15$

3)  $y > 35$   $f(y) = y - 20 + 2y - 70 = 3y - 90$  - возраст

Мин знач  $f(y) \stackrel{\text{ищется}}{=} 15$   $\Rightarrow$  корни одинаковы  $\Rightarrow$   
 $f(y) = 15$

$$\sqrt{225 - 2^2} \leq 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(y) = 15 \Rightarrow y = 35 \\ \sqrt{225 - 2^2} = 15 \Rightarrow z = 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x} = 2\sqrt{-(x+7)(x-5)} = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$\sqrt{x+7} + 6 = 2\sqrt{5-x} \quad (\sqrt{x+7} \neq 1)$$

$$2\sqrt{35+1-(x^2+2x+1)} = 2\sqrt{36-(x+1)^2} \leq 12$$

$$g(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}} - \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}} = 0$$

$\sqrt{5-x} = \sqrt{x+7}$  подбором найдем корни  $x = -1$ , он  
 убыв возраст подходит т.к.  $-1+7 \geq 0$   $5+1 \geq 0$

повед  $g(x)$   $\Rightarrow$  знаки  $g'(x)$   $\Rightarrow x = -1 - \min$   
 $g(-1) = 6 \Rightarrow g(x) \geq 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad 3\cos 2x = 6\cos^2 x - 3$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p \quad \text{Пусть } t = \cos x \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 6t^2 - 3 + p \quad 4t^3 - 6t^2 + 3t = p - 3$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 \quad f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \quad D = 16 - 16 = 0$$

$$(2t-1)^2 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{12} = 1 \pm \frac{0}{12} \quad (2t-1)^2 = 0$$

поведение  $f(t)$



функция не убывает  $\Rightarrow f_{\min} = f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$

$$f_{\max} = f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4 \Rightarrow \text{т.к. } f \text{ — непрерывна чтобы был корень } p \in [-10; 4]$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \sqrt[3]{\frac{4}{8}}\right)^3 - 4t^3 - 3\sqrt[3]{4^2}t - \sqrt[3]{\frac{4}{8}} + 3\sqrt[3]{4t} \cdot \sqrt[3]{\frac{4^2}{8}} =$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \sqrt[3]{\frac{4}{2}}\right)^3 = 4t^3 - 3 \cdot 2t + 3t \cdot \frac{4}{8} = p - 3 \cdot \frac{4}{8} = p - \frac{3}{2}$$

$$t \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{p - \frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2}} \quad t = \sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$t = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{1}{2}\right)$$

Ответ: при  $p \in [-1.5; 6.5]$ :

$$t \in \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{1}{2}\right)$$

при  $p \in (-\infty; -1.5) \cup (6.5; +\infty)$ :  
 $x \notin \mathbb{R}$

$$t = \sqrt[3]{\frac{2p - 3}{8}} + \frac{1}{2}$$

$$x = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{2p - 3}{8}} + \frac{1}{2}\right)$$

Ответ:

2) при  $p \in [-10; 4]$   $x = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{2p - 3}{8}} + \frac{1}{2}\right)$

при  $p \in (-\infty; -10) \cup (4; +\infty)$   $x \notin \mathbb{R}$

1) при  $p \in [-10; 4]$  уравнение имеет хотя бы один корень



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для

№



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как  $a > b$  и  $a \neq b$  и  $(a-c)(a+b)$ : на квадрат простого числа  
 ①  $\Rightarrow c = b - 1$   
 То  $b - c = 1$ ;  $(a - c)$  - квадрат простого числа (пусть  $p$  - прост  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow (a - c) = p^2 \Rightarrow a - b = (p^2 - c) - (1 + c) = p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$   $\times$

если  $p$  не кратно трем то у него может быть остаток при делении на 3 только 1 и 2, но если ост = 1 то  $(p - 1) \div 3$ , а если ост. = 2 то  $(p + 1) \div 3$ . Если  $p \div 3$ , то  $a - b = ((p + 1)(p - 1)) \div 3$  число не должно быть  $\Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c = 9 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + b = 812 \\ b^2 + b - 812 = 0 \end{cases} \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249 = 57^2$$

$$b_1 = \frac{-1 + 57}{2} = 28; \quad b_2 = \frac{-1 - 57}{2} = -29$$

$$a_1 = 36; \quad a_2 = 8 - 29 = -21$$

$$c_1 = 27; \quad c_2 = -30$$

Также может быть что  $a - c = -1$ ;  $b - c = -p^2$  (т.к.  $a > b$ )

$$a - b = (-1 + c) - (-p^2 + c) = p^2 - 1 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b_3 = 28 & a_3 = 36 & c_3 = 27 \\ b_4 = -29 & a_4 = -21 & c_4 = -20 \end{matrix}$$

Ответ:  $(-21; -29; -20); (36; 28; 27); (36; 28; 27); (-21; -29; -20)$

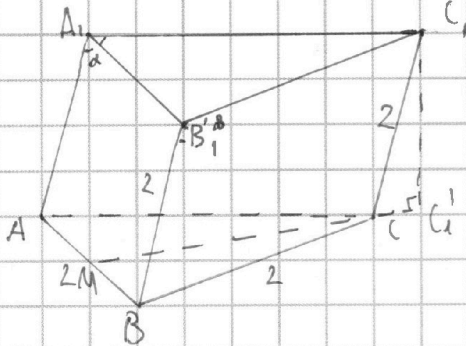
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC - \text{р/к}$   $AB = 2$

$$S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1C_1C} = 5$$

$$S_{AA_1B_1B} = 4$$

Найти:  $h$

Решение:

$$1) S_{A_1C_1CA} = S_{C_1B_1BC} = C_1C$$

$$S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1C_1C} = BB_1$$

$$S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha = BB_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow$$

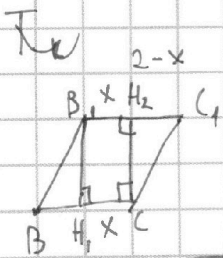
$$\Rightarrow \alpha = \beta \quad (\alpha \neq 180^\circ - \beta)$$

$$A_1C_1 = B_1C_1$$

$$A_1A = B_1B$$

$$\Rightarrow \triangle AA_1C_1 = \triangle BB_1C_1$$

$\Rightarrow AC_1 = BC_1 \Rightarrow C_1$  проеку на  $AB \perp AB$



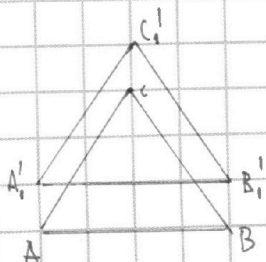
$B_1H_1 \perp BC$ ;  $CH_2 \perp B_1C_1$  Пусть  $B_1H_2 = x$

$$B_1H_1 = \frac{S_{BB_1C_1C}}{BC} = \frac{5}{2}$$

$CC_1 \cap AB = M \Rightarrow CM - \text{мед } \triangle ABC$  ( $\triangle ABC - \text{р/к}$ ;  $CC_1 - \text{сер } \perp AB$ )

Фигура симметрична относительно  $C_1CM \Rightarrow AA_1B_1B - \text{квадрат} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB_1 = AB = 2 = C_1C \Rightarrow BB_1C_1C - \text{ромб}$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

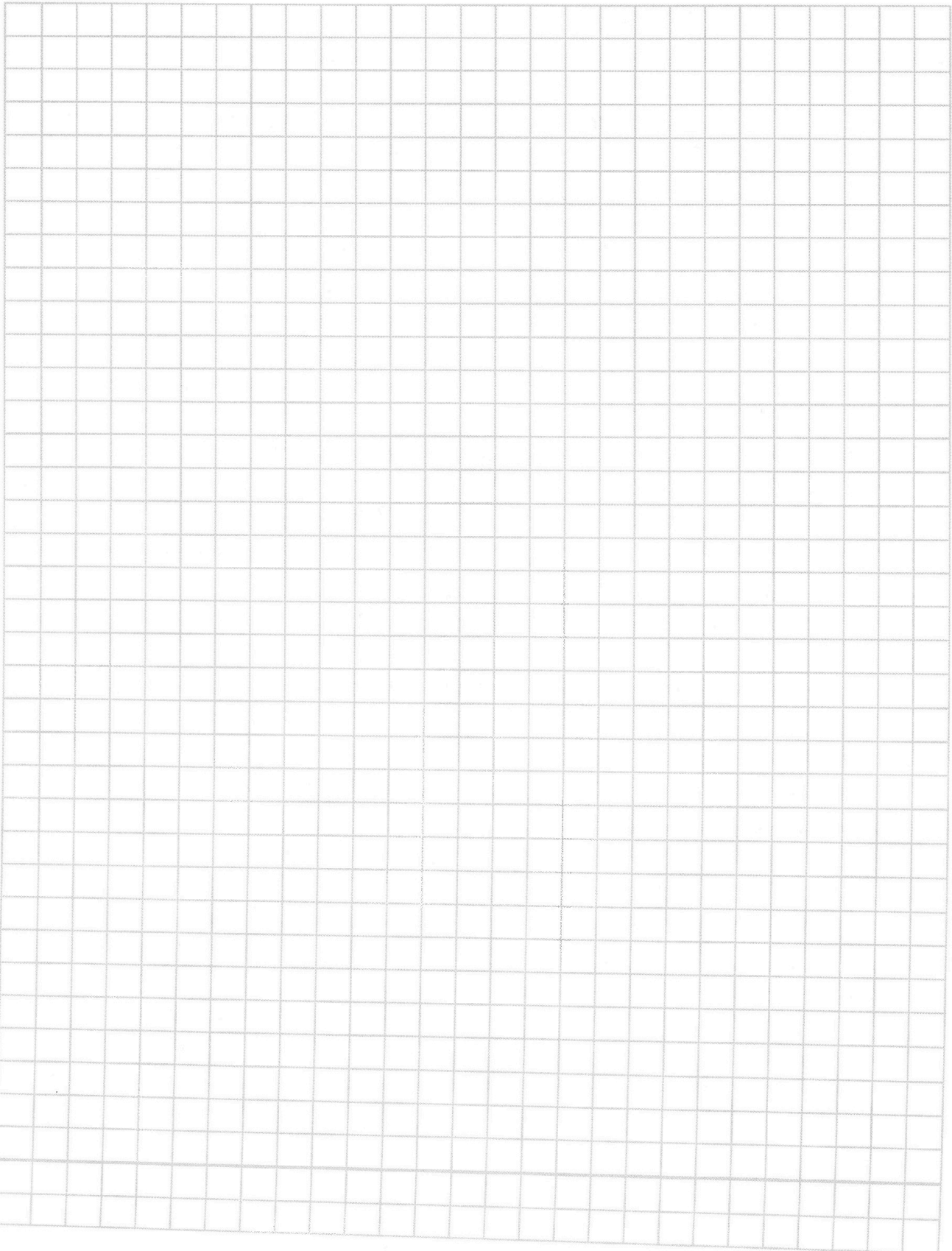
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_4 = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$a_{10} = 9$$

$$a_{12} = 9 \cdot \sqrt{2}$$

$$q^2 = \sqrt{2}$$

$$q^6 = 2\sqrt{2}$$

$$a_4 = \sqrt{\frac{-9}{-43}} = \frac{3}{8}$$

$$a_{10} = 3$$

$$a_{12} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$$

$$a + b =$$

$$a - b + b = 2ab \cdot 2 \quad 2 =$$

$$a^2 + b^2 = 12$$

4  
17  
17  
119  
17  
289

$$\sqrt{10} - \sqrt{2} = 2$$

$$4 = 2\sqrt{2}$$

3  
19  
4  
76  
36  
112