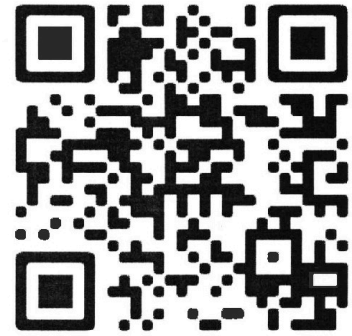




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - первый член геом. прогрессии, q - множитель \Rightarrow

$$\Rightarrow a_4 = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = aq^3; \quad a_{10} = x+4 = aq^9; \quad a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = aq^{11}$$

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (15x+6)(x-3) \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \quad \frac{a_{12}}{a_4} = \frac{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}{\sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \frac{1}{q^8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-3)^4}} = \frac{1}{(x-3)^2} = q^8 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{q^4} + 3\right) \quad (\text{Могут появиться лишние корни, от них избавимся подстановкой})$$

$$q^2 = \sqrt{\frac{1}{|x-3|}} \quad a_{10} = a_4 \cdot q^6 =$$

$$= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3} \cdot \frac{1}{|x-3|}} = x+4 \quad x \geq -4$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = \frac{x+4}{\sqrt{|x-3|}} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$1) \quad x > 3: \quad x+4 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-3)^4}} = \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{q^8} \quad q^2 = \sqrt{|x-3|}$$

$$a_{12} = a_{10} q^2 = (x+4)\sqrt{|x-3|} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$1) \quad x > 3: \quad x+4 = \sqrt{15x+6} \quad x^2 + 8x + 16 = 15x + 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9 \quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2 \quad \text{подстановкой}$$

получаем что $x = 2$ невозможно

$$2) \quad x < 3: \quad x+4 = \sqrt{-15x+6} \quad x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \quad x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$D = 23^2 - 88 = 21^2 \quad x = \frac{-23 \pm 21}{2} = -1; -22 \quad \text{т.к. } x+4 \geq 0 \quad x = -22 \text{ не подх}$$

Ответ: 5; -1

23	529
23	- 88
69	441
46	4
529	
	21
	21
	441



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = \sqrt{x+7}$ $b = \sqrt{5-x}$

$$\begin{cases} a-b+6 = 2ab \Rightarrow 2a-2b+12 = 4ab \Rightarrow \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 - 4ab = 12 - 2a + 2b - 12$$

$$a^2 + a(2-4b) + b^2 - 2b = 0$$

$$D = 16b^2 - 16b + 4 - 4b^2 + 8b = 12b^2 - 8b + 4 = 8b^2 + (2b-2)^2$$

$$b^2 - b(4a+2) + a^2 + 2a = 0$$

$$D = 16a^2 + 16a + 4 - 4a^2 - 8a =$$

$$ab \begin{cases} a^2+b^2 - 2ab = 4(ab)^2 - 24ab + 36 \\ a^2+b^2 = 12 \end{cases}$$

$$a^2+b^2 = 12$$

$t = ab$
ТОЛЬКО с минусом так как $5-x \geq 0$

$$2t = 12 - 4t^2 + 24t - 36$$

$$t = 6 - 2t^2 + 12t - 18$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 96 = 25$$

$$t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$$

$$D = 36 + 4 \cdot 14 = 112$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{112}}{2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \rightarrow x+7 = 4 + 4\sqrt{5-x} + 5-x$$

$$2x - 2 = 4\sqrt{5-x}$$

$$x-1 = 2\sqrt{5-x}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 20 - 4x$$

$$x^2 - 6x - 19 = 0$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{x+7} + 3 = \sqrt{5-x} \rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: $x = \frac{6 - \sqrt{112}}{2}; y = 35; z = 0$

~~$x = \frac{6 + \sqrt{112}}{2}; y = 35; z = 0$~~

Ответ: $\left(\frac{6 - \sqrt{112}}{2}; 35; 0 \right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим график $f(y) = |y-20| + 2|y-35|$

1) $y \leq 20$: $f(y) = -y + 20 - 2y + 70 = -3y + 90$

На данном отрезке $f(y)$ убывает \Rightarrow min знач = $f(20) = 30$

2) $y \in (20; 35]$ $f(y) = y - 20 - 2y + 70 = 50 - y$

На данном отр $f(y)$ убыв \Rightarrow min $f(35) = 15$

3) $y > 35$ $f(y) = y - 20 + 2y - 70 = 3y - 90$ - возраст

Мин знач $f(y) \stackrel{\text{ищется}}{=} 15$ \Rightarrow корни одинаковы \Rightarrow
 $f(y) = 15$

$$\sqrt{225 - 2^2} \leq 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(y) = 15 \Rightarrow y = 35 \\ \sqrt{225 - 2^2} = 15 \Rightarrow z = 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x} = 2\sqrt{-(x+7)(x-5)} = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$\sqrt{x+7} + 6 = 2\sqrt{5-x} \quad (\sqrt{x+7} \neq 1)$$

$$2\sqrt{35+1-(x^2+2x+1)} = 2\sqrt{36-(x+1)^2} \leq 12$$

$$g(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}} - \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}} = 0$$

$\sqrt{5-x} = \sqrt{x+7}$ подбором найдем корни $x = -1$, он
 убыв возраст подходит т.к. $-1+7 \geq 0$ $5+1 \geq 0$

повед $g(x)$ \rightarrow \rightarrow
 Ответ: $x = -1$ знаки $g'(x)$ $-$ $+$ $\Rightarrow x = -1 - \min$
 $g(-1) = 6 \Rightarrow g(x) \geq 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad 3\cos 2x = 6\cos^2 x - 3$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p \quad \text{Пусть } t = \cos x \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 6t^2 - 3 + p \quad 4t^3 - 6t^2 + 3t = -3 + p$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 \quad f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0$$

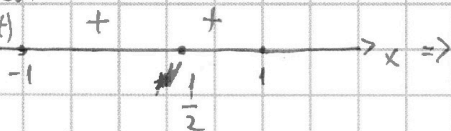
$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \quad D = 16 + 16 = 2 \cdot 16$$

$$(2t-1)^2 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{2 \cdot 16}}{12} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (2t-1)^2 = 0$$

поведение $f(t)$

знаки $f'(t)$



$$t = 1/2$$

функция неубывает $\Rightarrow f_{\min} = f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$

$$f_{\max} = f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4 \Rightarrow \text{т.к. } f - \text{я непрерывна чтобы был корень } p \in [-10; 4]$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \sqrt[3]{\frac{4}{8}}\right)^3 - 4t^3 - 3\sqrt[3]{4^2}t - \sqrt[3]{\frac{4}{8}} + 3\sqrt[3]{4t} \cdot \sqrt[3]{\frac{4^2}{8}} =$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \sqrt[3]{\frac{4}{2}}\right)^3 = 4t^3 - 3 \cdot 2t + 3t \cdot \frac{4}{8} = p - 3 \cdot \frac{4}{8} = p - \frac{3}{2}$$

$$t \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{p - \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \quad t = \sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{3}{2}$$

$$t = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{3}{2}\right)$$

Ответ: при $p \in [-1,5; 6,5]$:

$$t \in \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{p - \frac{3}{2}}{4}} + \frac{3}{2}\right)$$

при $p \in (-\infty; -1,5) \cup (6,5; +\infty)$:
 $x \notin \mathbb{R}$

$$t = \sqrt[3]{\frac{2p - 7}{8}} + \frac{1}{2}$$

$$x = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{2p - 7}{8}} + \frac{1}{2}\right)$$

Ответ:

2) при $p \in [-10; 4]$ $x = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{2p - 7}{8}} + \frac{1}{2}\right)$

при $p \in (-\infty; -10) \cup (4; +\infty)$ $x \notin \mathbb{R}$

1) при $p \in [-10; 4]$ уравнение имеет хотя бы один корень



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как $a > b$ и $(a-c)(a+b)$: на квадрат простого числа
 то $b-c=1$; $(a-c)$ - квадрат простого числа (пусть p - прост \Rightarrow
 $\Rightarrow (a-c) = p^2 \Rightarrow a-b = (p^2-c) - (1+c) = p^2-1 = (p+1)(p-1)$

если p не кратно трем то у него может быть остаток при делении на 3 только 1 и 2, но если ост = 1 то $(p-1) \div 3$, а если ост. = 2 то $(p+1) \div 3$. Если $p \div 3$, то $a-b = ((p+1)(p-1)) \div 3$ число не должно быть $\Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p=3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c=9 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+b=812 \\ b^2+b-812=0 \end{cases} \Rightarrow D=1+4 \cdot 812=3249=57^2$$

$$b_1 = \frac{-1+57}{2} = 28; \quad b_2 = \frac{-1-57}{2} = -29$$

$$a_1 = 36; \quad a_2 = 8 - 29 = -21$$

$$c_1 = 27; \quad c_2 = -30$$

Также может быть что $a-c = -1$; $b-c = -p^2$ (т.к. $a > b$)

$$a-b = (-1+c) - (-p^2+c) = p^2-1 \Rightarrow p=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3=28 \\ b_4=-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3=36 \\ a_4=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3=27 \\ c_4=-20 \end{cases}$$

Ответ: $(-21; -29; -30); (36; 28; 27); (36; 28; 27); (-21; -29; -20)$

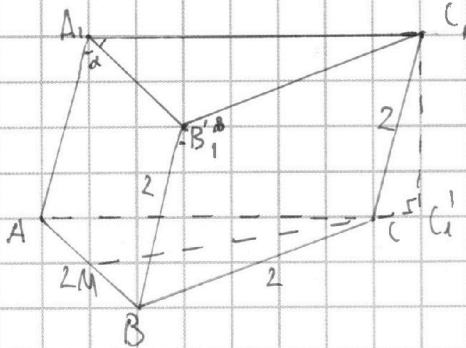
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ - р/к $AB=2$

$$S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1C_1C} = 5$$

$$S_{AA_1B_1B} = 4$$

Найти: h

Решение:

$$1) S_{A_1C_1CA} = S_{C_1B_1BC} = C_1C$$

$$S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1C_1C} = BB_1$$

$$S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot A_1C \cdot \sin \alpha = BB_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow$$

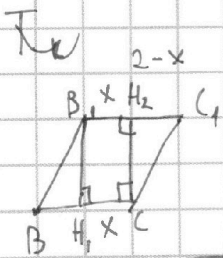
$$\Rightarrow \alpha = \beta \quad (\alpha \neq 180^\circ - \beta)$$

$$A_1C_1 = B_1C_1$$

$$A_1A = B_1B$$

$$\Rightarrow \triangle AA_1C_1 = \triangle BB_1C_1$$

$\Rightarrow AC_1 = BC_1 \Rightarrow C_1$ проеку на $AB \perp AB$



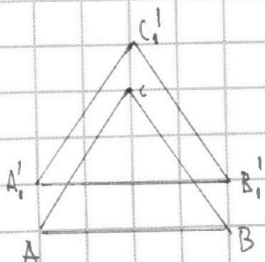
$B_1H_1 \perp BC$; $CH_2 \perp B_1C_1$ Пусть $B_1H_2 = x$

$$B_1H_1 = \frac{S_{BB_1C_1C}}{BC} = \frac{5}{2}$$

$CC_1 \cap AB = M \Rightarrow CM$ - мед $\triangle ABC$ ($\triangle ABC$ - р/к; CC_1 - $AB \perp$)

Фигура симметрична относительно $C_1M \Rightarrow AA_1B_1B$ - квадрат \Rightarrow

$\Rightarrow BB_1 = AB = 2 = C_1C \Rightarrow BB_1C_1C$ - ромб





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

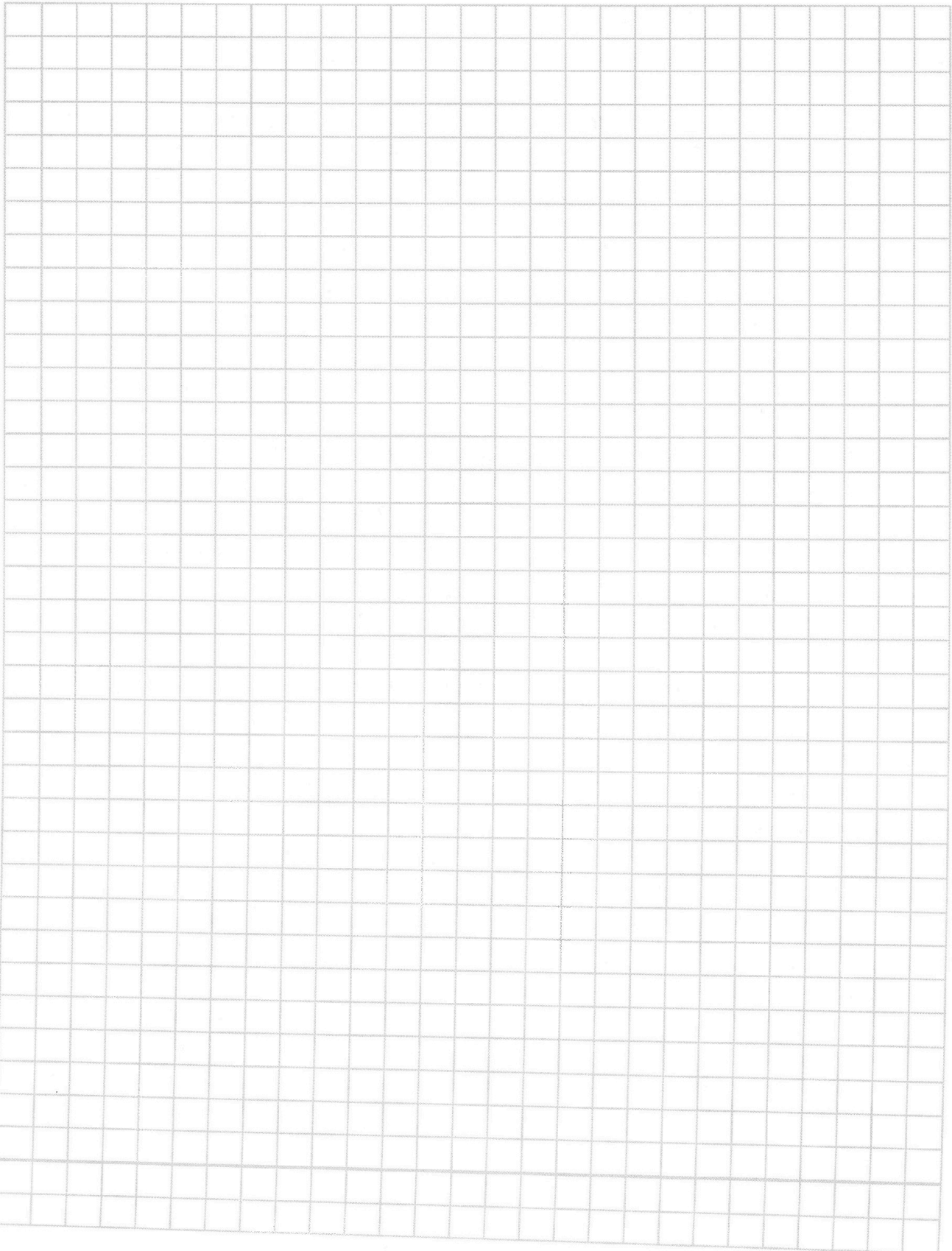
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	$\begin{array}{r} 8\ 1\ 2 \\ 32\ 4\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4^3 \\ 5\ 7 \\ 5\ 2 \\ 3\ 9\ 9 \\ 2\ 8\ 5 \\ 3\ 2\ 4\ 9 \end{array}$	$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3 = 4t -$
$\begin{array}{r} 28 \\ 8 \\ 36 \end{array}$			$\left(\frac{2}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3} - 2\right)^3 = \frac{8}{27} - 3 \cdot 32 + 3 \cdot 16 - 4$
$\begin{array}{r} 1 \\ 29 \\ 2 \\ 5\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ -2\ 9 \\ 2\ 9 \\ 2\ 7\ 1 \\ 5\ 8 \\ +8\ 5\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ 2\ 8 \\ 2\ 8 \\ 2\ 2\ 4 \\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 4 \end{array}$	$a - b + 6 = 2ab$
$\begin{array}{r} 75 \\ \sqrt{\frac{81}{2^3}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \\ 9 \cdot 9 = \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 18\sqrt{2} \\ q^2 = 20\sqrt{2} \end{array}$			$t - \sqrt{12-t^2} + 6 = 2t\sqrt{12-t^2}$
$-9 \cdot -1$	$\begin{array}{r} 8 \\ 29 \\ 29 \\ 221 \\ 59 \\ 8\ 61 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ 29 \\ 29 \\ 201 \\ 58 \\ 8\ 90 \end{array}$	$t - \sqrt{12-t^2} = 2t\sqrt{12-t^2} - 6$
$p = -10$	$12\sqrt{x+7} + x + 7 + 36 = 5-x + 4(x+7)(5-x) + 4\sqrt{x+7}(5-x)$		
$\sqrt[3]{\frac{-20-5}{2}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = -1$	$8 - 5 \cdot 3$		$-24t\sqrt{12-t^2} + 36$
$8 - \sqrt[3]{\frac{20-7}{8}} + \frac{1}{2} = -1 - \frac{3}{2}$			$- \frac{2}{2}$
	$-20 - 7 = -13$		



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_4 = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$a_{10} = 9$$

$$a_{12} = 9 \cdot \sqrt{2}$$

$$q^2 = \sqrt{2}$$

$$q^6 = 2\sqrt{2}$$

$$a_4 = \sqrt{\frac{-9}{-43}} = \frac{3}{8}$$

$$a_{10} = 3$$

$$a_{12} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$$

$$a + b =$$

$$a - b + b = 2ab \cdot 2 \quad 2 =$$

$$a^2 + b^2 = 12$$

4
17
17
119
17
289

$$\sqrt{10} - \sqrt{2} = 2$$
$$4 = 2\sqrt{2}$$

3
19
4
76
36
112