



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Обозначим десятый член - d , а знаменатель
исходной прогрессии - a . Тогда

$$d = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$da^2 = 2-x$$

откуда

$$da^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$\left(\sqrt{(25x+34)(3x+2)}\right)^9 \cdot \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = d^9 \cdot da^8 = (da^2)^4 =$$

$$= (2-x)^4$$

$$\sqrt{(25x+34)^4} = (2-x)^4 \Leftrightarrow (25x+34)^2 = (2-x)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((2-x)^2 + 25x + 34)((2-x)^2 - 25x - 34) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4 + 25x + 34)(x^2 - 4x + 4 - 25x - 34) = (x^2 + 21x + 38).$$

$$\cdot (x^2 - 29x - 30) = (x+2)(x+19)(x+1)(x-30) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \{-19; -2; -1; 30\}$$

Но ещё необходимо, чтобы $3x+2 \neq 0, (25x+34)(3x+2) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{34}{25} \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \{-19; -2; 30\}$$

Ответ: $\{-19; -2; 30\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$p \cos^3 x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cdot \cos^3 x + 12 \cos^2 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x - 6 + 10 = 0$$

$$4p \cdot \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cdot \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad (\text{Заметим, что } \cos x \neq 0)$$

$$(p-1) \cdot \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$1-p = \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p} = 1 + \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1 \quad (*)$$

1. Если $\sqrt[3]{1-p} - 1 = 0$, то $1-p=1 \Leftrightarrow p=0$, решений $(*)$ нет.

2. Если $\sqrt[3]{1-p} - 1 \neq 0$, то $(*) \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$.

Для каждого значения p решение x существует,

если $-1 \leq \cos x \leq 1$,

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq -1 \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-p \leq 0 \\ 1-p \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi k$, при $k \in \mathbb{Z}$, $p \in (-\infty; -7] \cup$

$\cup [1; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

1. Если множество клеток M переходит в себя при симм. отн. горизонтальной средней линии (обозначим это пр.-е S_1) и переходит в себя при симм. отн. вертикальной средней линии (обозначим это пр.-е S_2), то оно центрально симметрично (обозначим это пр.-е R). Это так, поскольку $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1 = R$. А ещё, раз $S_1 = S_1^{-1}$ и $S_2 = S_2^{-1}$, верен такой факт: если M переходит в себя при двух преобразованиях из набора S_1, S_2, R , то и при третьем M перейдёт в M .

2. Вычислить количество N таких множеств можно с помощью формулы включения - исключения:

~~$\# M: S_1(M) = M$~~ ~~$\# M: S_2(M) = M$~~ ~~$\# M: R(M) = M$~~ Если S_1, S_2, R - биекции, то это $\# M: S_1(M) = M$ - это кол-во способов выбрать 4 пары из всех $\frac{120 \cdot 500}{2}$ пар образ-образ. Аналогично $\# M: S_2(M) = M = \frac{120 \cdot 500}{2}$
 $\# M: R(M) = M$. Значит $N = C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{30000}^4 = C_{30000}^4$.
Ответ: C_{30000}^4

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$1. a < b \Rightarrow a - c < b - c \quad \left[\begin{array}{l} a - c = 1, b - c = p^2 \\ (a - c) \cdot (b - c) = p^2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - c = -p^2, b - c = -1 \end{array} \right. \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b - a = p^2 - 1 \\ b - a = -1 + p^2 = p^2 - 1 \end{array} \right. \Rightarrow p^2 - 1 \not\equiv 3 \quad (p - \text{обозначение простого числа из условия})$$

2. Но если $p \equiv 3$, то $p^2 \equiv 1$, что не так. Значит

$$p \equiv 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow b - a = 8$$

~~Если $a \not\equiv 0$, то $a^2 + b \equiv b \equiv 1000 \equiv 1$, откуда $b - a \equiv 1 - 0 \equiv 1 \not\equiv 8$, противоречие.~~

Или

$$3. a^2 + b = a^2 + a + (b - a) = a^2 + a + 8 = 1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 992 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 992}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3969}}{2} = \frac{-1 \pm 63}{2} = \frac{-1 \pm 9\sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 63}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -32 \\ a = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -24 \\ b = 39 \end{cases}$$

4. Из п. 1: $\begin{cases} c = a - 1 \\ c = b + 1 \end{cases}$

Ответ: $\{(-32; -24; -33); (-32; -24; -23); (31; 39; 30); (31; 39; 40)\}$

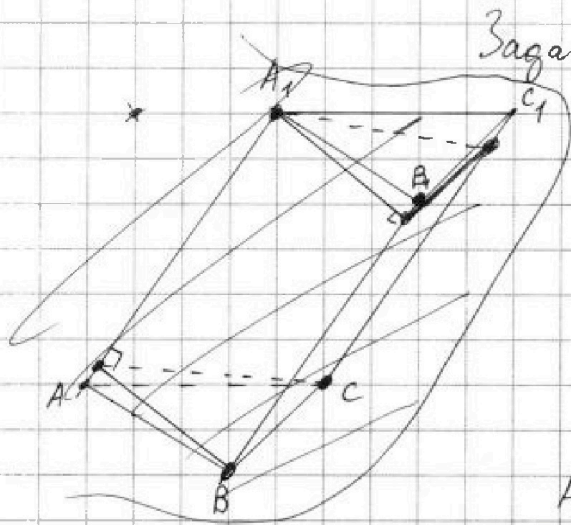
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



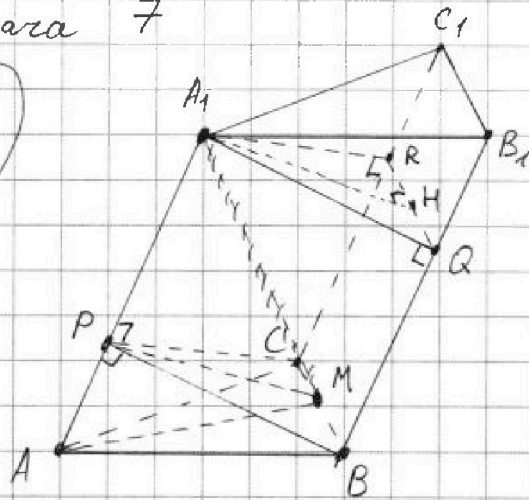
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 ~~5~~ ИЗ ~~8~~ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7



1. Обозначим вершины так, что $S_{AA_1B_1B_1} = S_{AA_1C_1C_1} = 6$.
 Тогда, раз $S_{AA_1B_1B_1} = S_{AA_1C_1C_1}$ высоты в гранях из B_1C_1 на AA_1 равны, а углы попадают в одну точку P такую, что $AP^2 = AB^2 - \left(\frac{6}{AA_1}\right)^2 = AC^2 - \left(\frac{6}{AA_1}\right)^2$. Значит прямая AA_1 лежит в плоскости α , перпендикулярной BC и проходящей через середину BC , то есть вся призма симметрична отн. α . Высоты в гранях из A_1 на CC_1 и BB_1 обозначим A_1R и A_1Q .

2. Весь объём V призмы равен сумме объёмов

$$V = V_{ABCP} + V_{PCBA_1RQ} + V_{RQB_1C_1A_1} = \frac{1}{3} AP \cdot S_{PCB} + (AA_1 - AP) \cdot S_{PCB} + \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot RQ \cdot B_1Q = \frac{1}{3} AP \cdot S_{PCB} + AA_1 \cdot S_{PCB} + AP \cdot S_{PCB} + \frac{1}{3} \cdot 2 S_{PCB} \cdot AP = AA_1 \cdot S_{PCB} ; H = RQ \cap \alpha.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
26 из 22

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отметим также, что $BF, CP \perp AA_1 \Rightarrow BC \perp BB_1$;

$PM \perp BC$, где M - середина BC . Значит $BC \cdot AA_1 = 5$.

$$3. V = AA_1 \cdot S_{PCB} = \frac{5}{BC} \cdot \frac{PM \cdot BC}{2} = 2,5 \cdot PM =$$

$$= 2,5 \cdot \sqrt{PB^2 - BM^2} = 2,5 \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{AA_1}\right)^2 - \left(\frac{5 \cdot 1}{AA_1 \cdot 2}\right)^2} = 2,5 \cdot \frac{BC}{5} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{36 - 6,25} = \frac{BC}{2} \cdot \sqrt{\frac{12^2 - 5^2}{4}} = \frac{BC}{4} \cdot \sqrt{144 - 25} =$$

$$= \frac{BC}{4} \cdot \sqrt{119}$$

$$4. \frac{BC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4 \Rightarrow BC^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{119}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

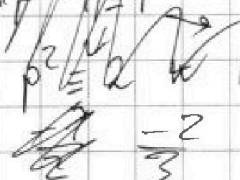
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AE \stackrel{?}{=} AD$$

$$a-c = -1 \quad (da^{10}) \quad b-a = 1$$

$$b-c = -p^2 \quad (da^{10}) \cdot a^2$$

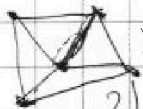
$A^2 \neq AE$



$$1) a = 0, b = 1$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^2 = 0 \Rightarrow p = 0$$



$$2) a = 1, b = 0$$

$$a-c = -1$$

$$b-c = -p^2$$



$$a = 2, b = 0$$

$$b-a+2 = mp^2 \Rightarrow p = 3$$

$$2x + 4x^2 = 4.992 \quad 0-2+2 = -p^2$$

$$2x^2 + x - 7.992 = 0 \quad 0-2+1 = p^2$$

$$f(1) = p + 7$$

$$f(-1) = 1 - p$$

$$9.441 = 9$$

$$3600 + 360 + 9$$

$$4000 + 1 - 32 = (p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1) = 0$$

$$= 4000 - 31 = 3969$$

$$1-p = \frac{(\cos x + 1)^3}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} = 1 + \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1323}{12}$$

$$\frac{111}{12}$$

$$\frac{99}{12}$$

$$\frac{87}{12}$$

$$\frac{75}{12}$$

$$\frac{63}{12}$$

$$\frac{51}{12}$$

$$\frac{39}{12}$$

$$\frac{27}{12}$$

$$\frac{15}{12}$$

$$\frac{3}{12}$$

$$-1 \leq \cos x = \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq 1$$

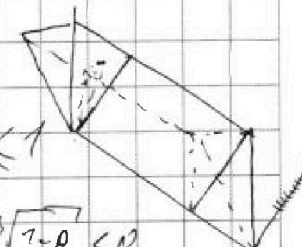
$$\sqrt[3]{1-p} \leq 2$$

$$1-p \leq 8 \Rightarrow p \geq -7$$

$$\sqrt[3]{1-p} - 1 \geq -1 \Rightarrow 1-p \geq 0 \Rightarrow p \leq 1$$

$$1-p \geq 0 \Rightarrow p \leq 1$$

$$1-p \geq 0 \Rightarrow p \leq 1$$



$$p \geq 1$$

$$p \geq 1$$

$$p \geq 1$$

$$p \geq 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\cos 60 = \frac{1}{2}$
 $\cos 90 = 0$
 $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4 \cos^3 x - 3 \cos x = \dots$
 $2 \cos^2 x - 1$
 $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
 $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$
 $a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$
 $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$36 - 25 = 11$
 $\frac{1}{2}(2+0) =$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

$\sin x \cos 3x = \sin(4x) - \sin 2x + 6 \sin 3x$
 $a - c = 1$
 $b - c = p^2$
 $p^2 = 1/3$
 $p = 1/3$

$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 2 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 =$
 $2t^4 = pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$
 $8t^4 = 3pt^2 + 6t + 3$

$d^3 \cdot da^8 = (da^2)^4 pt^2 + 2t + 1$
 $da^2 = \sqrt{(25x+34)^4} = (2-x)^2$
 $p \cdot \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = (2-x)^2$
 $p \cdot \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 - \cos^3 x = (p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$
 $p-1 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$
 $3t(p-1)$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

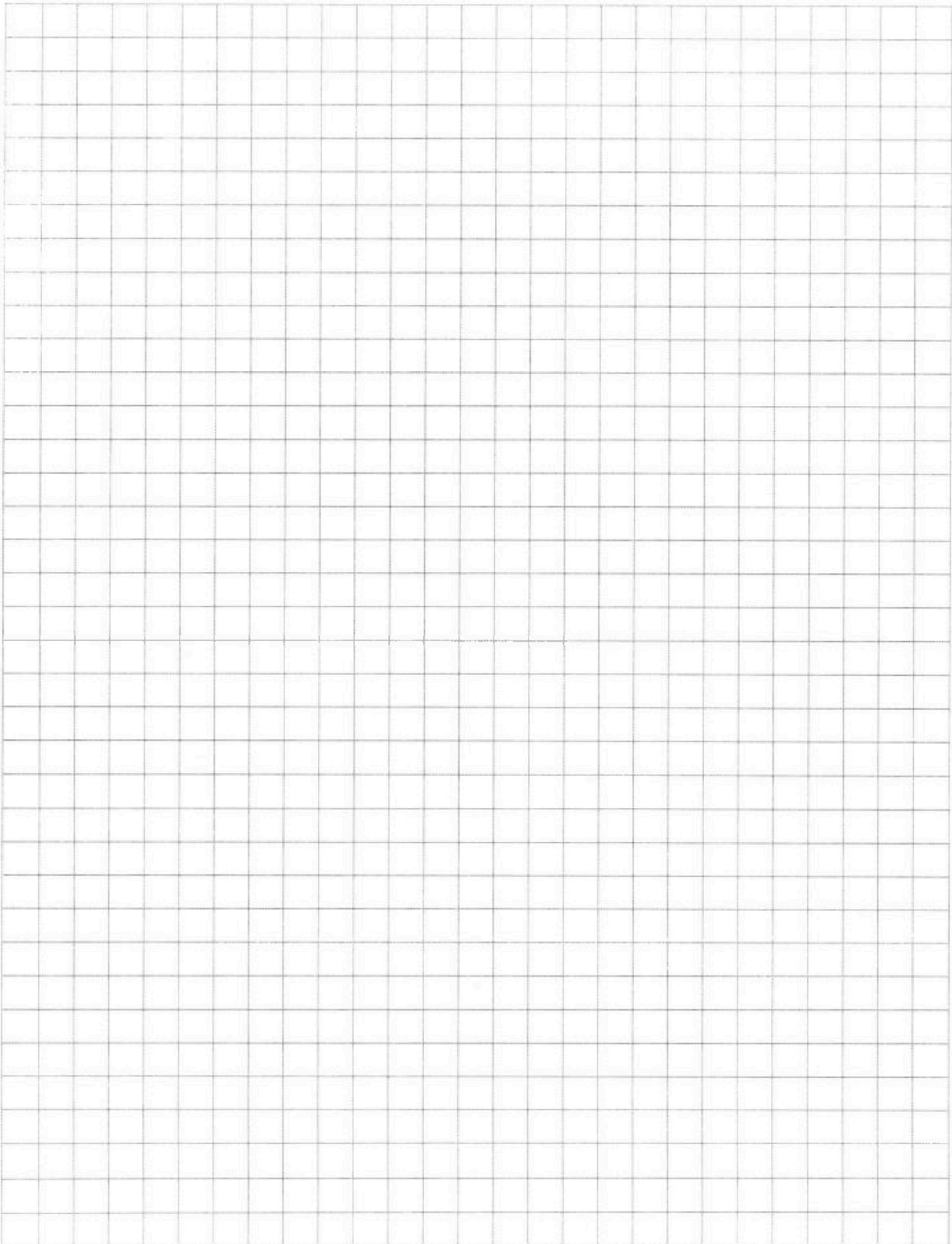
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

