



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть b_1 - 1-ый член геом. прогрессии, а q - знаменатель ее. Тогда
 $b_4 = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{15x+6}$, $b_{10} = b_1 \cdot q^9 = x+4$; $b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$, $b_{10} = b_4 \cdot q^6$,
 $q^6 > 0 \in \mathbb{R}$ $b_4 \geq 0 \Rightarrow b_{10} \geq 0 \Rightarrow x+4 \geq 0; x \geq -4$. $\frac{15x+6}{x-3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{5} \leq x < 3$

$$q^6 > 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow b_4 \geq 0 \Rightarrow b_{10} \geq 0 \Rightarrow x+4 \geq 0; x \geq -4$$

$$\frac{15x+6}{x-3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{5} \leq x < 3$$

1) $15x+6=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$, $b_4 = 0$, $b_{10} = \frac{18}{5}$; $b_{12} = 0 \Rightarrow q^6 = 0$, но т.к. $b_4 \cdot q^6 \neq 0$, то такое допустить невозможно $\Rightarrow x \neq -\frac{2}{5}$.

$$2) x \neq -\frac{2}{5}. \quad b_{12}/b_4 = q^6 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow q = \sqrt{|x-3|}$$

$$b_{10}/b_4 = q^6 = \frac{(x+4)\sqrt{|x-3|^3}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{|x-3|^3}$$

2.1) $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$. $\frac{(x+4)\sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{(x-3)^3}$, т.к. $x \neq 3$, можно сократить

$$\frac{(x+4)\sqrt{x-3}}{\sqrt{15x+6}} = 1; x+4 = \sqrt{15x+6}; x^2+8x+16 = 15x+6; x = 2; 5 \Rightarrow x = 5$$

2.2) $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$ $\frac{(x+4)\sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{-(x-3)^3}; (x+4)\sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(8-x)^3}$

$$x+4 = \sqrt{-15x-6}; x^2+8x+16 = -15x-6; x = -1; -2.9 \Rightarrow x = -1$$

Ответ: -1; 5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{м2 Расстояние 2 вур-е}$$

$$|\sqrt{225-2z^2}| \leq 15$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2z^2}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ 20 \quad 35 \quad y \end{array} \quad \text{если } y < 20 \text{ или } y > 35,$$

то \emptyset . если $y \in [20; 35]$ то сумма расстояний ≥ 15 .

а равна 15 при $y = 35$. $\Rightarrow y = 35$. $|35-20| = 15 = \sqrt{225-2z^2}$

$\Rightarrow z = 0; y = 35$. (1) : $\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N3 \quad \cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p; \quad 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x - 6\cos^3 x + 3 = p.$$

Пусть $\cos x = t, t \in [-1; 1] \Rightarrow p(t) = 4t^3 - 6t^2 + 8t + 3$. $p(t)$ — куб. ф-я.

$$p'(t) = 12t^2 - 12t + 8 = 3(4t^2 - 4t + 1) - 3(2t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ — корень } p' \text{ — } t \text{ —}$$

$p(t)$ ↑ при всех t . \Rightarrow принимает каждое свое значение раз и имеет вид монотонно ↑ $\frac{1}{2}$ ↑ t
невозвратное $E(p) = [p(-1); p(1)]$.

$$p(-1) = -4 - 6 - 8 + 3 = -10.$$

$$p(1) = 4 - 6 + 8 + 3 = 9 \Rightarrow p \in [-10; 9]. \text{ Подложим наше уравнение}$$

$$4t^3 - 6t^2 + 8t + 3 = p \Rightarrow \frac{(2t-1)^3 + 9}{2} = p \Rightarrow (2t-1)^3 = 2p - 9; \quad 2t-1 = \sqrt[3]{2p-9};$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p-9} + 1}{2} = \cos x \Rightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p-9} + 1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: при $p = -10$: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

при $p \in (-10; 3)$: $x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p-9} + 1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

при $p = 3$: $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

при $p \in (3; 9)$: $x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p-9} + 1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

при $p = 9$: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5 Всего у нас 30000 клеток. Попробуем исходить при подсчете на чравках по 7500 к. каждой.

1) 4 клетки в I зоне, тогда у нас есть 3 варианта записать оставшиеся 4, для каждой из симметрий (в II, III или IV. Тогда всего их: $3 \cdot C_{7500}^4 = 3 \cdot 7500!$



2) 3 клетки в I и 1 в III. 3 клетки в одной зоне и 1 в другой.

(Дополнение: если мы записали 4 клетки, но оставшиеся однозочно задаются (с учетом нулевой симметрии) с помощью симметрии). Есть 2 варианта расположения: $\dots | \cdot$ и $\cdot | \dots$

Для каждого из них можно выделить 2 вида симметрии. $\dots | \cdot$ и $\cdot | \dots$
 $(\dots | \cdot \cup \cdot | \dots)$ Тогда всего их: $2 \cdot 2 \cdot C_{7500}^3 \cdot 7500 =$

$= 30000 \cdot C_{7500}^3$

3) 2 клетки в 1 и 2 в другой. По 2 клетки в каждой зоне.

будет, когда нет симметрии отн. сред. линии: $C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 \cdot 2$

(Выбираем 2 к. в I зоне, тогда 2 уже симметрично однозочно задаются, тогда 2 к. в одной из оставшихся зон, \Rightarrow опять однозочно задаются 2 оставшиеся, $\cdot 2$, т.к. 2 линии средних линий). При этом, можно заметить, что, если есть симметрия отн. 2 средних линий, то есть и центральная симметрия. Следовательно, учета центральной симметрии уже не требуется.

Тогда все: $3 \cdot C_{7500}^4 + 30000 \cdot C_{7500}^3 + 2 \cdot C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2$

Ответ:

Ответ: $3 \cdot C_{7500}^4 + 30000 \cdot C_{7500}^3 + 2 \cdot C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$. $a > b$; $(a-b) \not\equiv 3$; $(a-c)(b-c) = k^2$, где k - простое; $a+b^2=20$

★ П.к. $(a-b) \not\equiv 3$, то a и b имеют разные остатки при делении на 3. П.к. k - простое, то k^2 можно представить как:

$k \cdot k, k^2 \cdot 1, 1 \cdot k^2, -k^2 \cdot (-1), -1 \cdot (-k^2)$. Случай $k \cdot k$ невозможен, т.к. $a-c = k$ и $b-c = -k \Rightarrow a = b$, но $a > b$.

1) $k^2 \cdot 1 = (a-c)(b-c) \Rightarrow b-c = 1; a-c = k^2, c = b-1, a-b+1 = k^2$

и $a = 20 - b^2 \Rightarrow 20 - b^2 - b = k^2$. Пусть $a = 3n; b = 3m+1$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow a-b+1 = 3n - 3m = 3(n-m) = k^2 \Rightarrow k=3, \Rightarrow b^2 + b + 9 - 20 = 0$
 $\Rightarrow b^2 + b - 11 = 0$
 $\begin{cases} b = -29; 28 \\ a = -21; 36 \\ c = -30; 27 \end{cases}$

2) $k^2 \cdot (-1) = (a-c)(b-c)$, но $a = 3n, b = 3m+2$

$a-c = a-b+1 = 3n-3m-1 = 3(n-m)-1$

$\Rightarrow k^2$ имеет остаток 2 при делении на 3, но такое быть не может.

(Пусть $k = 3x+1, \Rightarrow k^2 = 9x^2 + 6x + 1 = 3(3x^2 + 2x) + 1$ - остаток 1. Пусть $k = 3x+2,$

$k^2 = 9x^2 + 12x + 4 = 3(3x^2 + 4x + 1) + 1$ - остаток 1.

3) $k^2 \cdot 1 = (a-c)(b-c)$, но $a = 3n+1, b = 3m+2$

$a-c = a-b+1 = 3n+1+1-3m-2 = 3(n-m) = k^2 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k=3$

\Rightarrow случаи, когда остатки a и b при делении на 3 отличаются на 2 не подходят (но при этом $a \equiv 3$). $n+m=3$.

$\Rightarrow b^2 + b - 812 = 0 \Rightarrow b = -29; 28; a = -21; 36; c = -30; 27$

4) $a = 3n+2, b = 3m. (a-c)(b-c) = k^2 \cdot 1, a-c = a-b+1 = 3n+2-3m+1 =$

$= 3(n-m+1) = k^2 \Rightarrow k=3, n=m-1 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0, b = -29; 28$

$\Rightarrow n = m-1$, но $a > b \Rightarrow 3n+2 > 3m; n > m - \frac{2}{3}$

5) $a-c = 1; b-c = k^2, b-a+1 = k^2$, т.к. $b-a < 0$, но $b-a+1 \leq 0$

$\Rightarrow \emptyset$ таких случаев нет.

6) $(a-c) = -1; b-c = -k^2, c = a+1, b-a-1 = -k^2 \Rightarrow k^2 = a-b+1$

$20 - b^2 - b = k^2$ - аналогичный предположить. $k^2 = 20 - b^2 - b$.

\rightarrow аналогично предыдущим $b = -29; 28, a = -21; 36$; но $c = -20; 27$

7) $(a-c) = -k^2; b-c = -1; c = b+1, a-b-1 = -k^2, k^2 = b-a+1 \leq 0$

Ответ: $(-29; -21; -30); (-29; -21; -20); (28; 36; 27); (28; 36; 27)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



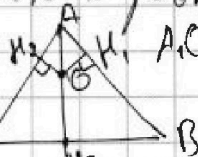
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 1) Предположим, что A_1 проектируется внутрь $\triangle ABC$. при этом
возаем $S_{AA_1B_1B_1} = S_{AA_1C_1C_1} = 5$. (треугольники равнобедренные, поэтому
вершины равнобедренные). Тогда!

$$S_{AA_1C_1C_1} = S_{AA_1B_1B_1} = AC \cdot AD \cdot h_1 = AB \cdot h_2$$

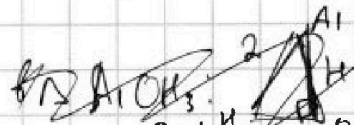


$\Rightarrow h_1 = h_2 = 5/2$, где h_1 и h_2 - высоты $\triangle AA_1B_1B_1$ параллелограмма $AA_1B_1B_1$
 $AA_1C_1C_1$. Проведем OH_1 и $OH_2 \perp AB$ и AC соответственно. \Rightarrow по т. о
перпендикулярных где A_1H_1 и $A_1H_2 = h_1$ и h_2 соответственно
т.к. A_1O - общая сторона, то $\triangle A_1OH_2 = \triangle A_1OH_1$ (по 2 углам)

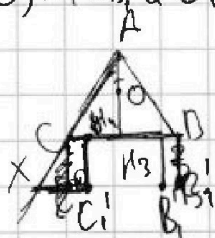
$\Rightarrow H_2O = H_1O \Rightarrow AO$ - биссектриса и высота. AH_3 - высота $\triangle ABC$.

В $\triangle A_1OH_1$: $5/2$ Пусть $A_1O = H$ тогда $H_1O = \sqrt{25/4 - H^2}$. $AO = 2OH_1$, т.е.

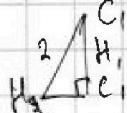
$$\angle OAH_1 = 30^\circ \Rightarrow AO = \sqrt{25 - 4H^2}$$



тоже высоты призмы. т.к. $A_1O \parallel B_1B_1 \parallel H_3$ C_1C_1 и B_1B_1 -
 $\parallel C_1C_1$, то $\angle A_1AO = \angle B_1B_1B_1' = \angle C_1C_1C_1'$ (т.к. проекции на $\triangle ABC$
 A_1AO , $B_1B_1B_1'$ и $C_1C_1C_1'$ равны) то $A_1O = C_1C_1' = B_1B_1'$. Тогда:



$AC \cap C_1B_1' = X$. C_1H_4 - высота $\square C_1B_1B_1'$.



$AH_3 = \sqrt{3}$. $C_1H_4 = 2$. $C_1H_4 = \sqrt{4 - H^2}$.

$$C_1H_4 = AO \cdot \sqrt{4 - H^2} = \sqrt{25 - 4H^2}; 25 - 4H^2 = 4 - H^2;$$

$$21 = 3H^2; H = \sqrt{7}$$

Ответ: $\sqrt{7}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.9 $b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}}$; $b_1 \cdot q^3 = x+4$; $b_1 \cdot q^6 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^2}$; $\frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3} = q^3 = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

$q = \sqrt{|x-3|}$

$\frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3} = q^3 = \frac{(x+4)\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{15x+6}} = (x-3)^2 = \sqrt{15x+6}$

1) $x > 3$ $\frac{(x+4)\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{(x-3)^2}$ $x+4 = \sqrt{15x+6}$ $x^2+8x+16 = 15x+6$ $x^2-7x+10=0$ $(x-5)(x-2)$

2) $x < 3$ $\frac{(x+4)\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{15x+6}} = \sqrt{(x-3)^2}$ $x+4 = -\sqrt{15x+6}$ $x^2+8x+16 = -15x-6$ $x^2+23x+22=0$ $(x+1)(x+22)$

№2 $\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-32} + 6 = 2\sqrt{4-2x-x^2+2}$ $14-201+214-351 = \sqrt{225-2x^2}$ $14-20 = -6$ $4 - \frac{2}{3} = \frac{20-2}{3} = \frac{18}{3} = 6$ $4 - \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$ $x = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

№3 $\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$ $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = p$ $4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 9 \cos x + 3 = p$ $\cos x = t$ $p(t) = 4t^3 - 6t^2 + 9t + 3$, $t \in [-1; 1]$ $4t^3 - 6t^2 + 9t + 3 = 0$ $4t^3 - 6t^2 + 9t + 3 = 0$ $4t^3 - 6t^2 + 9t + 3 = 0$ $4t^3 - 6t^2 + 9t + 3 = 0$

$4 \cos^3 x + 9 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$ $4t^3 - 6t^2 + 9t + 3 = 0$ $p'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0$ $p = 4t^2 - 4t + 1 = (2t-1)^2$ $(2t-1)^2 = 8t^3$ $p(t) = \frac{(2t-1)^2}{2} + \frac{7}{2}$ $8t^3 - 8t^2 + 2t - 4t^2 + 4t - 7 = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 7$ $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$

$\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin^2 x \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x(1 - \cos^2 x)$ $= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ $4t^3 - 6t^2 + 9t + 3 = 0$ $12t^2 - 12t + 3 = 0$ $t = \frac{1}{2}$ $p(-1) = \frac{(-3)^2}{2} + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = \frac{16}{2} = 8$ $p(1) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $\left(\frac{2t-1}{2}\right)^2 = p - \frac{7}{2}$ $(2t-1)^2 = 2p - 7$ $2t-1 = \sqrt{2p-7}$ $2t = \sqrt{2p-7} + 1$ $t = \frac{\sqrt{2p-7} + 1}{2}$ $(2t+1)^2 + 7 = 2x$ $3\sqrt{2p-7} + 1 = 0$ $3\sqrt{2p-7} = -1$ $\sqrt{2p-7} = -\frac{1}{3}$ $2p-7 = \frac{1}{9}$ $2p = \frac{1}{9} + 7 = \frac{64}{9}$ $p = \frac{32}{9}$ $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$

$p=4$. $\arccos t = 0$ $3\sqrt{2p-7} + 1 = 0$ $3\sqrt{2p-7} = -1$ $\sqrt{2p-7} = -\frac{1}{3}$ $2p-7 = \frac{1}{9}$ $2p = \frac{1}{9} + 7 = \frac{64}{9}$ $p = \frac{32}{9}$ $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$. $a > b$. $a - b \mid (a - c)(b - c) = k^2$ $a + b^2 = 820$.

1) $a = 3n$; $b = 3m + 1$. $3n > 3m + 1 \Rightarrow n > m + \frac{1}{3} \Rightarrow n \geq m + 1$.

$a - c = k$; $b - c = k$.

$a - c = k^2$, $b - c = 1$. $-c = 1 - b$. $a - c = (a - b + 1) = k^2$

~~$3n - 3m + 1 = k^2$~~ ~~$3(4n - m) = k^2$~~ $a = 820 - b^2$

$(820 - b^2 - b) = k^2$ $b^2 + b - 820 = 0$ $D = 1 + 4 \cdot 820$

$b^2 + b + k^2 - 820 = 0$ $D = 1 - 4k^2 + 4 \cdot 820 = 3285 - 4k^2 = 0$

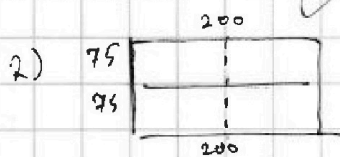
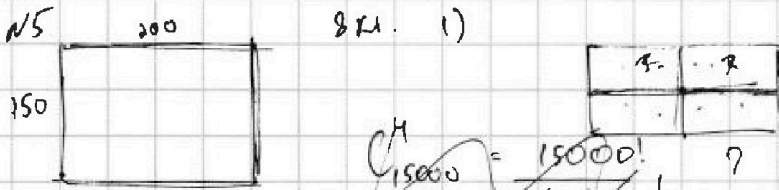
$3(n - m) = k^2 \Rightarrow k = 3$. $n - m = 3$. $n = m + 3$.

$a = 3m + 9$; $b = 3m + 1$; $c = 3m$. $b^2 + b + 9 - 820 = 0$ $b^2 + b - 810 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 810 = 3249 = 9 \cdot 19^2$ $b_{1,2} = \frac{-1 \pm 3 \cdot 19}{2}$

$= \frac{-58}{2}$ и $\frac{56}{2}$. $\boxed{29 \text{ и } 28}$. $\boxed{a = -21; 36; c = -30; 27}$.

2) ...



-29; 28.

$a = 3n$ $b = 3m + 1$.

$(-21 + 20)(-29 + 20) = -1 \cdot (-9) = 9 = 3^2$ $(n - m) = 3$. $n = m + 3$

$(28 - 37)(36 - 37) = -1 \cdot (-9) = 9$ $m = -10$. $m = 9$

$(-29 + 30)(-21 + 30)$ $n = -87$. $n = 12$

1; 3; 6.

30000 КЛ.

15000 КЛ.

$k = (3x + 1)$

$9x^2 + 16x + 1$

$3m + 2, 3m$

$3n + 2 + 1 - 3m$

$C = a + 1$

$\boxed{20} \boxed{37}$



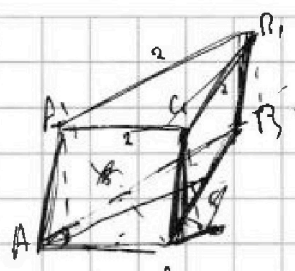
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

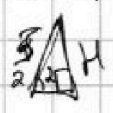
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 17.

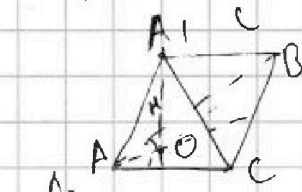


$S_{бок} = 2 \cdot h_2 = 5 \Rightarrow h_2 = \frac{5}{2}$
 $A_1A_1' = H$

$\angle A_1H = 2$
 $\angle = 3 - 1$



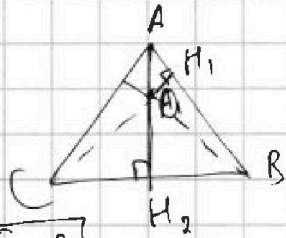
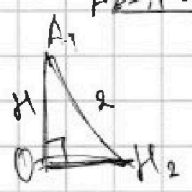
$\sin \alpha = \frac{2}{5}$



$BO = CO, A_1O = H$



$H_1O = \sqrt{\frac{25}{4} - H^2}$
 $\sin 30^\circ = \frac{OH_1}{AO} \Rightarrow AO = 2OH_1 = \sqrt{25 - 4H^2}$



$H_1O = \sqrt{\frac{25}{4} - H^2}$

$OK_2 = \sqrt{4 - H^2}$
 $AH_2 = -\sqrt{4 - H^2} + \sqrt{25 - H^2} = \sqrt{3}$

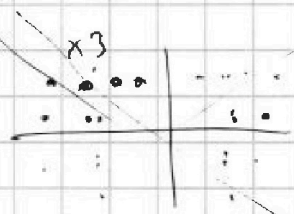
$AH_2 =$

$a + b = \sqrt{3}$
 $a^2 - b^2 = 21$
 $a - b = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3}$
 $2a = 8\sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}, b = -3\sqrt{3}$

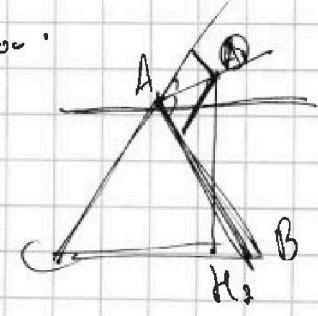
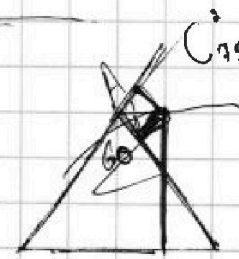
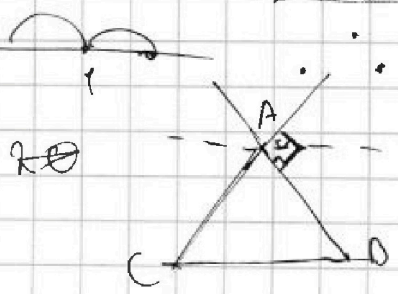
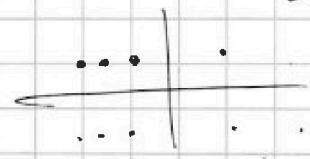
$\Rightarrow a - b = \sqrt{3}$
 $(a - b)(a + b) = 21$

$a + b = 7\sqrt{3}, a - b = \sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}, b = 3\sqrt{3}$

$4 - H^2 = 27$



30000
 15000
 7500
 $7500 \cdot 4 = 30000$
 $7500 = \frac{OH_1}{AO}$



20 35



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

