



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

111

$\{a_n\}$  - геом. прогр. с четн.  $q$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = a_{10}$$

$$2-x = a_{12}$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = a_{18}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Заметим  $q^2 > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2$

Также  $x \neq -\frac{34}{25}$  и  $x \neq -\frac{2}{3}$ , т.к. иначе  $a_{10} = 0$ , либо не существует  $\Rightarrow 0$ , а  $2-x \neq a_{12} \neq 0$ , что невозможно

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad q^2 = \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

I  $x > -\frac{2}{3} \Rightarrow x > -\frac{34}{25}$

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} \quad a_{12} = a_{10} \cdot q^2 = \sqrt{25x+34} = 2-x$$

II  $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow x < -\frac{34}{25}$

$$a_{12} = a_{10} \cdot q^2 = \sqrt{-25x-34} = 2-x$$

$$25x+34 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x-30)(x+1) = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$(x+19)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 30 \\ x \leq 2 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \emptyset$$

25  
x 19  
---  
225  
25  
---  
445  
34  
---  
441 = 21^2

25  
x 30  
---  
750  
751

25  
x 19  
---  
225  
25  
---  
445  
34  
---  
441 = 21^2

$$\begin{cases} x = -19 \\ x = -2 \\ x \leq 2 \\ x < -\frac{34}{25} \end{cases}$$

Ответ:  $\{-2; -19\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

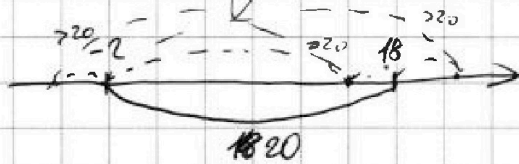
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Заметим из усл. см. 1  $|y+2| + |y-18| \geq 20$



Также  $|y-18| \geq 0$  и  $\sqrt{400-z^2} \leq 20$

Получается:

$$\begin{cases} z=0 \\ y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=4 \\ c=2,5 \\ ab=4 & (2) \\ ab=2,5 & (3) \end{cases}$$

(1)  ~~$\sqrt{x+6}$~~

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\frac{a}{b} + 4 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{18-3x-x^2} - 4$$

$$\frac{a}{b} - \sqrt{18-3x-x^2} = 4 - 4$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a-b=1 \\ ab=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b+4 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=\sqrt{17} \\ b-a=1 \\ a+b=\sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ a = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2b^2 - 28ab + 49$$

$$9 - 2c = 4c^2 - 28c + 49 \quad c=ab$$

$$4c^2 - 32c + 40 = 0$$

$$2c^2 - 16c + 20 = 0$$

$$(2c-5)(c-4) = 0$$

$x+6 =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \sqrt{18-3x-x^2} = 4$$

$$18-3x-x^2=16$$

$$x^2+3x-2=0$$

$$D=9+8=17$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left( \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right) \right\}$$

$$\textcircled{3} 2\sqrt{18-3x-x^2} = 5$$

$$4x^2-12x-44=25$$

$$4x^2+12x-44=0$$

$$D=144+46 \cdot 44=16(9+44)=16 \cdot 56=64 \cdot 14=8\sqrt{14}^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{14}}{8} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$\begin{aligned} x > -6 \\ x < 3 \end{aligned} \quad \checkmark$$

Замечаем, что  $x+6$  и  $3-x$  ~~никогда~~ могут быть отрицательными  $< 0 \Rightarrow$  не требуется совств. проверка корней.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x + p \cos x =$$

$$12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = -p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$3(2 \cos x + 1)^2 + 1 = -p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$3(2 \cos x + 1)^2 + 1 = -p \cdot 4 \cos^3 x$$

$$3 \cos^2 x + 6 \cos x + 1 = -p \cdot 4 \cos^3 x$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$p-1 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$\Rightarrow p \neq 0, \text{ или } p \neq 0$$

$$-15 \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{1-p} - 1 \neq 0 \geq 1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$1-p \geq 8$$

$$p \leq -7$$

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$x \in \left\{ \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right) + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \right\} \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$

$$1-p \leq 0$$

$$1 \leq p$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

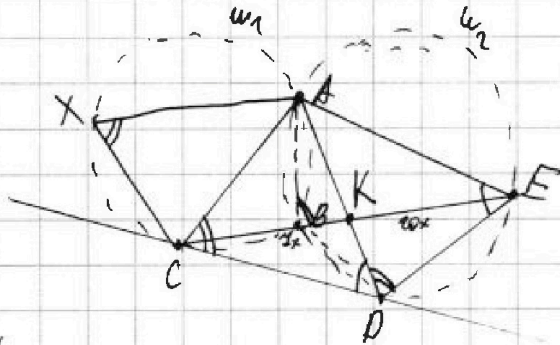


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14



$$CD^2 = CB \cdot CF \Rightarrow CD = \sqrt{CB \cdot CF} = \sqrt{35} \cdot x$$

Пусть точка  $X$  на дуге  $\omega_1$   $AC$  не содержит  $B$ , тогда  $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle CXA = 180^\circ - \angle ABC = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle AE = \angle ADE$

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AED \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle DAE \Rightarrow AK - \text{биссектриса } \angle CAE \Rightarrow AC : AE = 4 : 20$$

Пусть  $AC = 4a$ , тогда  $AE = 20a$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE = 140a \Rightarrow AD = 2\sqrt{35}a$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{20a}{2\sqrt{35}a} = \frac{10}{\sqrt{35}} = \frac{10\sqrt{35}}{35} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$$

Ответ:  $ED : CD = \frac{2\sqrt{35}}{7}$



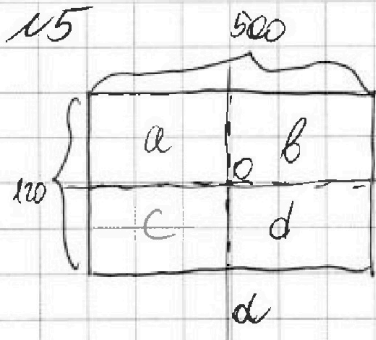


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



разделим п/у на 4 области - a, b, c, d

по  $250 \cdot 60 \cdot 2 = 15000$  кл. в каждой

Заметим, что средние линии п/у не содержат клеток, т.к.  $500:2$  и  $15:2$

① П/у имеет симметрию отн. d, тогда мы можем расставить 4 клетки в вол a, b, c и однозначно определим оставшиеся из симметрии. -  $C_{30000}^4$  способ.

② П/у имеет симм. отн. b. - аналог. ④ -  $C_{30000}^4$  способ.

③ П/у имеет симметрию отн. 0, тогда в по a однозн.

определим d и по c однозн. определим b  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  расставив 4 клетки в a, b, c мы однозн. получим способ расстановки  $\Rightarrow C_{30000}^4$  способ.

④ Заметим, что если у п/у есть две из этих симм. то есть и 3-я. (Пусть 0 - (0,0), координаты точек по оси x -  $x_0, y_0$ )

① a и b

$$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 & 2/2 \\ -1/2 & 1/2 & 2/2 \end{matrix} \quad \text{и } 1/2 \cdot 2/2$$

① d и b.  $(x_0, y_0) \Rightarrow$  есть  $(-x_0, y_0)$   
 $(x_0, -y_0)$   
 $(-x_0, -y_0)$

② a и 0  $(x_0, y_0) \Rightarrow$  есть  $(x_0, -y_0)$   
 $(-x_0, y_0)$   
 $\Rightarrow$  есть b

④ аналог.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение~~

Таким образом, если мы расставим все в а 2 клетки, мы однозначно восстановим столбцы  $\Rightarrow$  такая сложив.

$C_{15000}^2$

Заметим, что каждый из (1) мы можем 3-мя в

(1), (2) и (3)  $\Rightarrow$  Ответ:  $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$(a - c)(b - c) = p^2 \quad p - \text{простое}$$

Ⓣ  $p = 3$ , тогда

$$(a - c)(b - c) = 9$$

$$a \neq b \Rightarrow a - c \neq b - c$$

$$b > a \Rightarrow b - c > a - c$$

$$1 \quad 9 \quad \textcircled{1}$$

$$-9 \quad -1 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \quad a = c + 1 \quad b = c + 9$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$(c - 30)(c + 33) = 0$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{cases}$$

ⓐ  $p \neq 3$ , тогда  $p^2 \neq 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a - c) \neq 3 \text{ и } (b - c) \neq 3, \text{ раз } (b - a) \neq 3$$

$b$  и  $a$  имеют разные остатки

деления на 3  $\Rightarrow (b - c)$  и  $(a - c)$  имеют разные, а т.к. ни один из них  $\neq 0$ , то один из них - 2, а второй - 1  $\Rightarrow$

$$(a - c)(b - c) \equiv_3 2$$

Заметим, что квадраты целых чисел могут

иметь только ост.  $0, 1$  и  $4 \pmod 3$

$$(3k)^2 = 9k^2 \equiv_3 0$$

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv_3 1$$

$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv_3 1$$

т.е. такое невозможно

$$\textcircled{2} \quad a = c - 9 \quad b = c - 1$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 289 + 3680 \\ D &= 3969 = 63^2 \\ c_{1,2} &= \frac{17 \pm 63}{2} \end{aligned}$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{cases}$$

Ответ:  $\{(31, 39, 30), (-32, -24, -33), (31, 39, 40), (-32, -24, -23)\}$



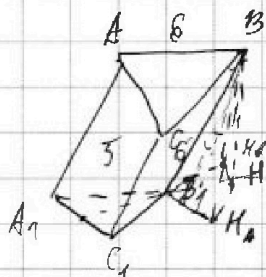
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.4



$ABCA_1B_1C_1$  - призма  
 $ABC = A_1B_1C_1$  - р/с  $\Delta$   $S_{ABC} = 4$   
 $S_{ABCA_1} = S_{BCCA_1} = 6$   
 $S_{ABCA_1} = 5$

1) Пусть  $H$  - проекция  $B$  в плоскость  $A_1B_1C_1$ , тогда  $a$

$HN_A$  и  $HN_B$  - перпендикуляры из  $H$  на  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  соответственно

по Т. О 3-х перп.  $BN_A \perp A_1B_1$ ,  $BN_B \perp B_1C_1$ , заметим  $A_1B_1 = B_1C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow BN_A = BN_B \Rightarrow$  по теор. Пифаг.  $HN_A = HN_B \Rightarrow H$  - серединой

содержащей биссектрису  $\angle A_1B_1C_1$ , ~~тогда плоскость~~ или ~~плоскостью~~  $\angle A_1B_1C_1$

2) Пусть  $M$  и  $M_1$  - середины  $AC$  и  $A_1C_1$  соотв, тогда  $M_1B_1$  и  $H$  на 1-ой и 2-ой

плоскости  $\alpha \perp ABC$

Заметим  $AC_1 \perp BM_1$  и  $A_1C_1 \perp BN \Rightarrow AC_1 \perp \alpha \Rightarrow C_1M_1M = 90^\circ \Rightarrow MM_1$  - высота

$AA_1C_1C \Rightarrow$  т.к.  $MB \parallel BM_1$  и  $BM = BM_1$   $MBMM_1B_1$  - параллелограмм  $\Rightarrow$

$\Rightarrow MM_1 = BB_1 = CC_1 = AA_1 \Rightarrow ACC_1A_1$  - квадрат

3) Пусть  $AB = a$ , тогда

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4 = S_{ABC}$$

$$MM_1 = AA_1 = \frac{S_{ACC_1A_1}}{a} = \frac{5}{a} = BB_1 \quad BN_A = \frac{S_{ABM_1A_1}}{a} = \frac{6}{a}$$

$BN_A = \frac{6}{a}$  тогда в т.у.  $\Delta$  косая  $\Rightarrow$  ~~используем~~ ~~применяем~~

$\Rightarrow H$  лежит на бисс. внеш. угла  $\angle A_1B_1C_1$



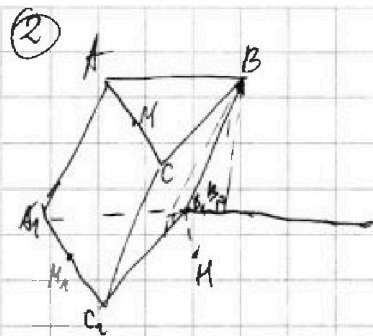


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



тогда  $B_1H \parallel A_1C_1$  и плоск  $BB_1H \perp ABC$   
 ~~$M_1 \parallel M_2$  тогда  $B_1M_1 \perp B_1H$  и  $B_1M_1 \perp BH \Rightarrow$~~   
 ~~$B_1M_1 \perp$~~   
 $B_1H \parallel A_1C_1, AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow AA_1C_1C \parallel \alpha \Rightarrow AA_1C_1C \perp ABC \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  высота  $AA_1C_1C = h = BH$  ~~так как  $\perp A_1C_1, \perp AA_1$~~   
 $\Rightarrow$  расст. между // прямыми

высота  $\frac{\sqrt{3}}{a} a^2 = 4$      $h = \frac{5}{a}$      $a = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}$

$V_{np.} = S_{ABC} \cdot h = 4 \cdot \frac{5}{a} = \frac{20}{a} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 5\sqrt{3}$

Ответ:  $V_{np.} = 5\sqrt{3}$