



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

111

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = a_{10}$$

$$2-x = a_{12}$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = a_{18}$$

$\{a_n\}$ - геом. прогр. с четн. q

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Заметим $q^2 > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2$

Также $x \neq -\frac{34}{25}$ и $x \neq -\frac{2}{3}$, т.к. иначе $a_{10} = 0$, либо не существует $\Rightarrow 0$, а $2-x \neq a_{12} \neq 0$, что невозможно

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad q^2 = \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

I $x > -\frac{2}{3} \Rightarrow x > -\frac{34}{25}$

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} \quad a_{12} = a_{10} \cdot q^2 = \sqrt{25x+34} = 2-x$$

II $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow x < -\frac{34}{25}$

$$a_{12} = a_{10} \cdot q^2 = \sqrt{-25x-34} = 2-x$$

$$x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$(x+19)(x+2) = 0$$

$$25x+34 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x-30)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 30 \\ x \leq 2 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 19 \\ \hline 225 \\ 25 \\ \hline 475 \\ - 34 \\ \hline 441 = 21^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 30 \\ \hline 750 \\ 750 \\ \hline 750 \\ 750 \\ \hline 750 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -19 \\ x = -2 \\ x \leq 2 \\ x < -\frac{34}{25} \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; -19\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

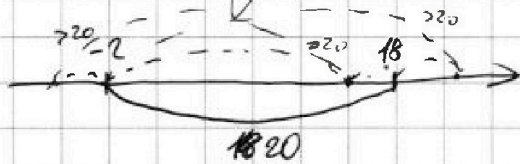
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Заметим из усл. см. 1 $|y+2| + |y-18| \geq 20$



Также $|y-18| \geq 0$ и $\sqrt{400-z^2} \leq 20$

Получается:

$$\begin{cases} z=0 \\ y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=4 \\ c=2,5 \\ ab=4 & (2) \\ ab=2,5 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ ab=4 \\ |a-b| \geq 1 \\ |a+b| \leq 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=\sqrt{17} \\ b-a=1 \\ a+b=\sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ a = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \end{cases}$$

$$x+6 =$$

$$(1) \sqrt{x+6}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ab}{ab} \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{18-3x-x^2} - 4$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ab}{ab}$$

$$\begin{cases} a-b+4 = 2ab \\ a^2+b^2=9 \end{cases}$$

$$a^2+b^2-2ab = 4a^2b^2 - 28ab + 49$$

$$9 - 2c = 4c^2 - 28c + 49 \quad c=ab$$

$$4c^2 - 32c + 40 = 0$$

$$2c^2 - 16c + 20 = 0$$

$$(2c-5)(c-4) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \sqrt{18-3x-x^2} = 4$$

$$18-3x-x^2=16$$

$$x^2+3x-2=0$$

$$D=9+8=17$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right) \right\}$$

$$\textcircled{3} 2\sqrt{18-3x-x^2} = 5$$

$$4x^2-12x-44=25$$

$$4x^2+12x-44=0$$

$$D=144+46\cdot 44=16(9+44)=16\cdot 56=64\cdot 14=8\sqrt{14}^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{14}}{8} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$\begin{aligned} x > -6 \\ x < 3 \end{aligned} \quad \checkmark$$

Замечаем, что $x+6$ и $3-x$ ~~никогда~~ могут быть отрицательными $< 0 \Rightarrow$ не требуется совств. проверка корней.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x + p \cos x =$$

$$12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = -p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$3(2 \cos x + 1)^2 + 1 = -p(\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$3(2 \cos x + 1)^2 + 1 = -p \cdot 4 \cos^3 x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x =$$

$$= \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$3 \cos^2 x + 6 \cos x + 1 = -p \cdot \cos^3 x$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 6 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

($\cos x = 0$ - не корень \Rightarrow делением поделим)

$$p-1 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$\Rightarrow p \neq 0$, или $p \neq 0$

$$-15 \frac{1}{\sqrt{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{1-p} - 1 \geq 1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$1-p \geq 8$$

$$p \leq -7$$

$$\sqrt[3]{1-p} = 1 + \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

Ответ: $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$$x \in \left\{ \pm \arccos \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi k / \pi \right\} \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$

$$1-p \leq 0$$

$$1 \leq p$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

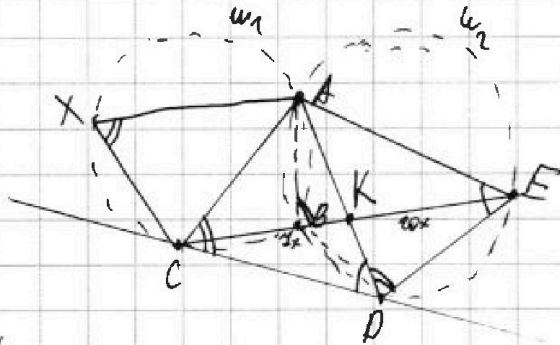


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14



$$CD^2 = CB \cdot CF \Rightarrow CD = \sqrt{CB \cdot CF} = \sqrt{35} \cdot x$$

Пусть точка X на дуге $\overset{\frown}{AC}$ не содержит B , тогда $\angle ACD = \frac{1}{2} \overset{\frown}{ABC} = \angle CXA = 180^\circ - \angle ABC = \angle ABE = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AE} = \angle ADE$

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{ABD} = \angle AED \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle DAE \Rightarrow AK - \text{биссектриса } \angle CAE \Rightarrow AC : AE = 4 : 20$$

Пусть $AC = 4a$, тогда $AE = 20a$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE = 140a \Rightarrow AD = 2\sqrt{35}a$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{20a}{2\sqrt{35}a} = \frac{10}{\sqrt{35}} = \frac{10\sqrt{35}}{35} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$$

Ответ: $ED : CD = \frac{2\sqrt{35}}{7}$

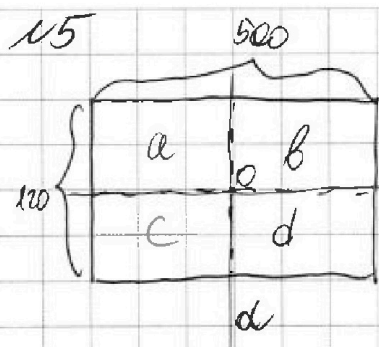


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



разделим п/у на 4 области - a, b, c, d

по $250 \cdot 60 \cdot 1000 = 15000$ кл. в каждой

Заметим, что средние линии п/у не содержат клеток, т.к. $500:2$ и $120:2$

① п/у имеет симметрию отн. d, тогда мы можем расставить 4 клетки в ΔOAC и однозначно определим оставшиеся из симметрии. - C_{3000}^4 способ.

② п/у имеет симм. отн. b. - аналог. ① - C_{3000}^4 способ.

③ п/у имеет симметрию отн. O, тогда по a однозн. определяем d и по c однозн. определяем b \Rightarrow

\Rightarrow расставив 4 клетки в ΔOAC мы однозн. получим способ расстановки $\Rightarrow C_{3000}^4$ способ.

④ Заметим, что если у п/у есть две из этих симм. то есть и 3-я (пусть O - (0,0), координаты точек не рассматриваем)

① a и b

$$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 & 2/2 \\ -1/2 & 1/2 & 2/2 \end{matrix} \quad \text{и } 1/2 \cdot d$$

① d и b. $(x_0; y_0) \Rightarrow$ есть $(-x_0; y_0)$
 $(x_0; -y_0)$
 $(-x_0; -y_0)$

② a и O. $(x_0; y_0) \Rightarrow$ есть $(-x_0; -y_0)$
 $(x_0; -y_0)$
 $(-x_0; y_0)$
 \Rightarrow есть b

④ аналог.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение~~

Таким образом, если мы расставим все в а 2 клетки, мы однозначно восстановим столбцы \Rightarrow таких способов.

C_{15000}^2

Заметим, что каждый из (1) мы можем 3-мя в

(1), (2) и (3) \Rightarrow Ответ: $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$(a - c)(b - c) = p^2 \text{ } p\text{-простое}$$

Ⓟ $p = 3$, тогда

$$(a - c)(b - c) = 9$$

$$a \neq b \Rightarrow a - c \neq b - c$$

$$b > a \Rightarrow b - c > a - c$$

$$1 \quad 9 \quad \textcircled{1}$$

$$-9 \quad -1 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \quad a = c + 1 \quad b = c + 9$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$(c - 30)(c + 33) = 0$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{cases}$$

Ⓣ $p \neq 3$, тогда $p^2 \neq 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a - c) \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ и } (b - c) \not\equiv 0 \pmod{3}, \text{ раз } (b - a) \equiv 0 \pmod{3}$$

b и a имеют разные остатки

деления на 3 $\Rightarrow (b - c)$ и $(a - c)$ имеют разные, а т.к. ни один из них $\neq 0$, то один из них $\equiv 2$, а второй $\equiv 1 \Rightarrow$

$$(a - c)(b - c) \equiv_3 2 \text{ , заметим, что}$$

квадраты целых чисел могут

иметь только ост. $\equiv 0, 1 \pmod{3}$

$$(3k)^2 = 9k^2 \equiv_3 0$$

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv_3 1$$

$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv_3 1$$

т.е. такое невозможно

$$\textcircled{2} \quad a = c - 9 \quad b = c - 1$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 289 + 3680 \\ D &= 3969 = 63^2 \\ c &= \frac{17 \pm 63}{2} \end{aligned}$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{cases}$$

Ответ: $\{(31, 39, 30), (-32, -24, -33), (31, 39, 40), (-32, -24, -23)\}$



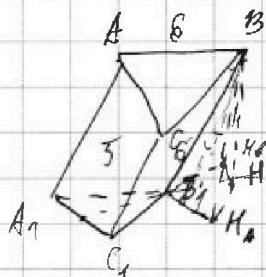
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.4



$ABCA_1B_1C_1$ - призма
 $ABC = A_1B_1C_1$ - р/с Δ $S_{ABC} = 4$
 $S_{ABA_1} = S_{BCC_1} = 6$
 $S_{AA_1CC_1} = 5$

1) Пусть H - проекция B в плоскость $A_1B_1C_1$, тогда a

HA и HB - перпендикуляры из H на A_1B_1 и B_1C_1 соответственно

по Т. О 3-х перп. $BH \perp A_1B_1$, $BH \perp B_1C_1$, заметим $A_1B_1 = B_1C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow BH = BH \Rightarrow$ по геор. лемме $HA = HB \Rightarrow H$ - серединой

содержащей биссектрису $\angle A_1B_1C_1$, ~~где плоскость~~ или ~~плоскостью~~ $\angle A_1B_1C_1$

Пусть M и M_1 - середины AC и A_1C_1 соотв, тогда M_1B_1 и H на 1-ой и $BM \parallel B_1M_1$, то есть

плоск. MM_1B_1H, B - в одной плоскости α , т.к. BH в этой плоскости $\alpha \perp ABC$

Заметим $AC_1 \perp BM_1$ и $A_1C_1 \perp BH \Rightarrow AC_1 \perp \alpha \Rightarrow C_1M_1M = 90^\circ \Rightarrow MM_1$ - высота

$AA_1CC_1 \Rightarrow$ т.к. $MB \parallel B_1M_1$ и $BM = B_1M_1$ MBM_1B_1 - параллелограмм \Rightarrow

$\Rightarrow MM_1 = BB_1 = CC_1 = AA_1 \Rightarrow ACC_1A_1$ - параллелограмм

3) Пусть $AB = a$, тогда

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4 = S_{ABC}$$

$$MM_1 = AA_1 = \frac{S_{AA_1CC_1}}{a} = \frac{5}{a} = BB_1 \quad BH = \frac{S_{ABA_1}}{a} = \frac{6}{a}$$

$BH = \frac{6}{a}$ тогда в Δ BHM_1 \Rightarrow $\angle BHM_1 = 90^\circ$ \Rightarrow H - середина BM_1

$\Rightarrow H$ лежит на бисс. внеш. угла $\angle A_1B_1C_1$

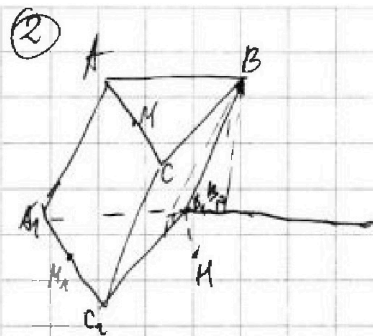


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



тогда $B_1H \parallel A_1C_1$ и плоск $BV_1H \perp ABC$
 ~~$M_1 \parallel M_2$ тогда $B_1M_1 \perp B_1H$ и $B_1M_1 \perp BM \Rightarrow$~~
 ~~$\Rightarrow B_1M_1 \perp$~~
 $B_1H \parallel A_1C_1, AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow AA_1C_1C \parallel \alpha \Rightarrow AA_1C_1C \perp ABC \Rightarrow$
 \Rightarrow высота $AA_1C_1C = h = BH$ ~~так как $\perp A_1C_1, \perp A_1B_1$~~
 \Rightarrow расст. между // прямыми

высота $\frac{\sqrt{3}}{a} a^2 = 4 \quad h = \frac{5}{a} \quad a = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}$

$V_{np.} = S_{ABC} \cdot h = 4 \cdot \frac{5}{a} = \frac{20}{a} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 5\sqrt{3}$

Ответ: $V_{np.} = 5\sqrt{3}$