



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{Решение} \quad a_{13} &= 4 \cdot q^6 = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10 \\ a_{15} &= a_{13} \cdot q^2 = 10 \cdot 2 = 20 \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{прогрессия суж}.$$

Ответ: 3; -5.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Пусть $\{a_n\}$ - данная прогрессия, q - ее знаменатель.

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad a_{13} = 5-x, \quad a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

$$(x+1)^3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1.$$

$$a_{15} = a_7 \cdot q^8.$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$(x+1)^2 \sqrt{13x-35} = q^8 \sqrt{13x-35}.$$

1) $13x-35=0 \Leftrightarrow a_7 = a_{15} = 0 \Rightarrow$ прогрессия состоит только

из 0.

$$13x-35=0$$

$$x = \frac{35}{13} \Rightarrow a_{13} = 5-x = \frac{30}{13} \neq 0 \Rightarrow \text{такой прогрессии нет} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x-35 \neq 0.$$

$$2) 13x-35 \neq 0$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \sqrt{|x+1|}$$

$$\bullet x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1.$$

$$\sqrt{x+1} (\sqrt{13x-35} - 5+x) = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \neq -1 \Rightarrow \sqrt{13x-25} - 5 + x = 0.$$

$$\sqrt{13x-25} = 5-x \Rightarrow x \leq 5.$$

$$13x-25 = x^2 - 10x + 25.$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0.$$

$$\begin{cases} x=20 > 5 \Rightarrow \text{не подходит.} \\ x=3. \end{cases}$$

$$\text{При } x=3, a_4 = \frac{1}{4}, a_{13} = 2, a_{15} = 4, q = \pm\sqrt{2}$$

$$a_{13} = a_4 \cdot q^9 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2 = 2 \cdot 2 = 4. \Rightarrow \text{прогрессия есть.}$$

$$x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1, x < -1.$$

$$\sqrt{35-13x} \cdot (x-1) = (5-x) \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-1} (\sqrt{35-13x} - 5 + x) = 0$$

$$x \neq -1 \Rightarrow 5-x = \sqrt{35-13x} \Rightarrow x \leq 5.$$

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x.$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = 2 > -1 \Rightarrow \text{не подходит.} \end{cases}$$

$$\text{При } x = -5, a_4 = \frac{5}{4}, a_{13} = 10, a_{15} = 20, q = \pm\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ур-е (2):

1) $y < -1$.

$$|y+1| + 3|y-12| = -y-1 - 3y+36 = 35-4y$$

$$35-4y > 35+4 = 39 \text{ при } y < -1, \text{ т.к. } 35-$$

$$-4y \downarrow \Rightarrow |y+1| + 3|y-12| > 39 \text{ при } y < -1.$$

2) $-1 \leq y < 12$.

$$|y+1| + 3|y-12| = y+1 - 3y+36 = 37-2y$$

$$37-2y > 37-2 \cdot 12 = 13 \text{ при } -1 \leq y < 12,$$

$$\text{т.к. } 37-2y \downarrow \Rightarrow |y+1| + 3|y-12| > 13 \text{ при } -1 \leq y < 12.$$

3) $y \geq 12$

$$|y+1| + 3|y-12| = y+1 + 3y-36 = 4y-35 \geq 13$$

$$\text{при } y \geq 12, \text{ равенство при } y=12, \text{ т.к. } 4y-35$$

Таким образом $|y+1| + 3|y-12| \geq 13$.

$$\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13, \text{ т.к. } z^2 \geq 0, \text{ равенство при } z=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{6y-2z^2} \quad \left| \Rightarrow \sqrt{6y-2z^2} = 13, |y+1| + 3|y-12| = 13 \right.$$

$$\Rightarrow y=12, z=0.$$

Подставим в (1).

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x+12-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}, \quad -3 \leq x \leq 4.$$

$$\sqrt{x+3} (2\sqrt{4-x} - 1) = 5 - \sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{5 - \sqrt{4-x}}{2\sqrt{4-x} - 1}$$

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(4-x)(x+3)} - 5)^2$$

$$x+3 + 4-x - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} = 4(4-x)(x+3) + 25 - 20\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$18\sqrt{(4-x)(x+3)} = 4(4-x)(x+3) + 18.$$

$$t = (4-x)(x+3), \quad t \geq 0, \text{ т.к. } \text{neg кортежи.}$$

$$18\sqrt{t} = 4t + 18.$$

$$9\sqrt{t} = 2t + 9.$$

$$81t = 4t^2 + 81 + 36t.$$

$$4t^2 - 45t + 81 = 0.$$

$$(t-9)(4t-9) = 0$$

$$\begin{cases} t=9 \\ t=\frac{9}{4} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4-x)(x+3)=9$$

$$(4-x)(x+3)=\frac{9}{4}$$

$$-x^2+x+12=9$$

$$-x^2+x+12=\frac{9}{4}$$

$$x^2-x-3=0, \quad D=13$$

$$4x^2-4x-39=0, \quad D=60$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{2} \quad - \text{подходит}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad - \text{не подходит (можно убедиться подстановкой)}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{2} \quad - \text{не подходит (можно убедиться подстановкой)}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}}{4} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} \quad - \text{подходит}$$

Ответ: $(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0)$, ~~$(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 12; 0)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3.

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$3t = \cos x, \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$\left(\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 - \frac{7}{2} = p, \quad \text{т.к.} \left(\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 =$$

$$= 4t^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{2} = 4t^3 + 6t^2 + 3t + \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 = p + \frac{7}{2}$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot t + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}}$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \geq -1 \\ \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+7 \geq -1 \\ 2p+7 \leq 27 \end{cases} \Leftrightarrow p \in [-4; 10]$$

$$\begin{cases} x = \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n \\ x = -\arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n \end{cases}$$

Ответ: При $p \in [-4; 10]$; $x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

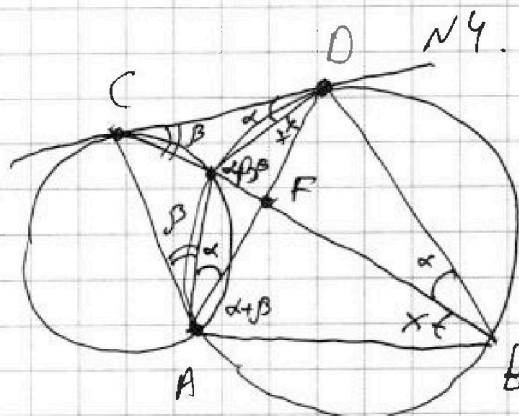
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть ~~CF = CE~~ AD ∩ CE = F.

Пусть $\angle CED = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle CEA = x$.

1) $\angle BCD = \angle CAB = \beta$, $\angle CDB = \angle BED = \alpha$ из-за касания $\Rightarrow \angle DBE = \alpha + \beta$, как внешний в $\triangle CDB \Rightarrow \Rightarrow \angle DAE = \angle DBE = \alpha + \beta$ из вписанности.

$\angle BAD = \angle BED = \alpha$ из вписанности \Rightarrow

$\Rightarrow \angle CAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow AF$ - биссектриса в $\triangle ACE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$$

Пусть $AC = 3b$, $AE = 10b$.

2) из $\triangle DAE$ ~~$\angle ADE = 180^\circ - (\alpha + \beta) = (2 + x)$~~ $\angle ADE = 180^\circ - \alpha - \beta - x$,

~~$\angle BDA = \angle BEA = x$~~ $\angle BDA = \angle BEA = x$ из вписанности \Rightarrow

$\Rightarrow \angle CDA = \angle DEA = \alpha + x \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$ по

2-м углам ($\angle DAE = \angle DAC = \alpha + \beta$, $\angle DEA = \alpha + x = \angle CDA$)

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC = 10b \cdot 3b = 30b^2$$

$$\Rightarrow AD = b\sqrt{30} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{3b}{b\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \text{ (берем } \sqrt{10} : \sqrt{3} \text{)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

стороны от l_1 , все 4 клетки с другой. Прямой
4 клетки с одной стороны однозначно задает
все мн-во X . l_1 разбивает ~~прямоугольник~~ ^{прямоугольник} на 2 ~~прямоугольника~~ ^{прямоугольника}
площадью 25000 кв. $\Rightarrow |A| = C_{25000}^4$ (число
способов выбрать 4 клетки из 25000).

Из аналогичных соображений (в рассуждениях
~~место~~ ^{нет} помещается только l_1 на l_2) $|B| = |C| = C_{25000}^4$.

5) из формулы включений и исключений:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$$

Ответ $3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

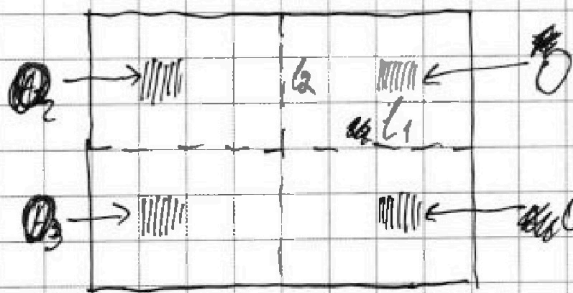
Пусть A - множество всех множеств из условий, симметричных относительно центра, B - множество симметричных относительно одной средней линии (пусть той, у которой длина 200), C - мн-во симметр. отн. другой ср. линии.

1) Покажем, что $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$.

Т.к. прямоугольник имеет четные стороны, ср. линии проходят по линиям сетки, а центр - узел сетки.

Рассмотрим мн-во X , симметричное относительно

2-х ср. линий, покажем, что оно симметрично отн. центра



Пусть $O \in X$; ~~тогда~~

l_1, l_2 - ср. линии; O_1, O_2 - симметрия

O отн. l_1 и l_2 , O_3 - симметрия

отн. центра.

Тогда $O_2, O_1 \in X$, т.к. X симметрично отн. l_1 и l_2 .

O_3 - симметрия O_1 отн. l_2 , O_2, O_3 - симметрия

O_2 отн. l_1 . $\Rightarrow O_3 \in X \Rightarrow X$ симметрично отн. центра,

т.к. для произв. ~~тогда~~ $O \in X$ доказано, что $O \in X$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрией отн. центра тогда $\in X \Rightarrow B \cap C = A \cap B \cap C$.

Пусть теперь X - множество симметричное отн. центра и l_1 . $O \in X$. O_1, O_3, O_2 - симметрии O отн. l_1 , центра и $l_2 \Rightarrow O_1, O_3 \in X$. O_2 - симметрия O_1 отн. центра и симметрия O_3 отн. $l_1 \Rightarrow O_2 \in X \Rightarrow X$ симметрично отн. l_2 . Аналогично при X симметр. отн. центра и $l_2 \Rightarrow A \cap C = B \cap C = A \cap B = A \cap B \cap C$.

2) Посчитаем количество множеств в $A \cap B \cap C$.

l_1 и l_2 делят плоск. на ~~24~~ ~~квадр.~~ ~~прямоуг.~~ 100×125 . Для любого $X \in A \cap B \cap C$ в каждом из этих 4 прямоуг. есть по 2 клетки. Притом 2 клетки в одном квадрате однозначно задают свои симметрии отн. осей. mn -во $\Rightarrow |A \cap B \cap C| = C_{125 \cdot 100}^2 = C_{12500}^2$ (число способов выбрать 2 клетки в одном прямоуг. ~~12500~~ 125×100).

3) Посчитаем $|A|$, $|B|$, $|C|$.

Рассмотрим $X \in A$. В нём есть 4 клетки соседней

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$a+b^2=560.$$

~~квадраты целых чисел~~

$$(a-c)(b-c) = p^2, \quad p\text{-простое} \Rightarrow \text{или } a-c = b-c = p,$$

$$\text{или } a-c = b-c = -p, \quad \text{или } a-c = 1, b-c = p^2, \quad \text{или } a-c = p^2, b-c = 1$$

~~Рассмотрим~~ 3-4 случая невозможны, т.к. ~~а~~ $a-c > b-c$, но $p^2 > 1$ (по усл. $a > b$).

В 1-м и 2-м случаях $a=b$, что противоречит условию $\Rightarrow a-c = p^2, b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1$.

Если $p \neq 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, т.е. при $p \neq 3 \quad (p^2) \not\equiv 3$,

т.е. $a-b \not\equiv 3$, что невозможно $\Rightarrow p \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a-c = 9, b-c = 1.$$

$$\begin{cases} a-c=9 \\ b-c=1 \\ a+b^2=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c+9 & (1) \\ b=c+1 & (2) \\ c+9+c^2+2c+1=560 & (3) \end{cases}$$

(3):

$$c^2 + 3c - 550 = 0.$$

$$\begin{cases} c = 22 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \\ a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \end{cases}$$

Легко убедиться, что оба варианта подходят

Ответ: $(31; 23; 22), (-16; -24; -25)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
8 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $S_{AA_1C_1C} = S_{BB_1C_1C} = 4$, $S_{AA_1B_1B} = 3 \Rightarrow$

\Rightarrow ~~тогда~~ $p(C_1; AA_1C) = p(C_1; BB_1C) = \frac{1}{2}$, т.к.

$S_{AA_1C_1C} = p(C_1; AC) \cdot AB = p(C_1; AC) = \frac{1}{2} \cdot 4 = S_{BB_1C_1C}$
 $= \frac{1}{2} p(C_1; BC) \Rightarrow C_1$ равноудалена от ~~AA_1~~

BC и $AA_1C \Rightarrow$ проекция C_1 на (ABC)
 тоже равноудалена от (AC) и (BC) , т.е. C_1
 лежит на оси симметрии $\triangle ABC$, проходящей

через C .

$AB \parallel A_1B_1 \parallel A_1'B_1'$, $BC \parallel B_1C_1 \parallel B_1'C_1'$, $AC \parallel A_1C_1 \parallel$

$A_1'C_1'$, ~~тогда~~ $\triangle A_1'B_1'C_1' = \triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$, т.к.

$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow$ по формуле $S_{A_1B_1C_1} +$

$+ S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B}$.

В силу симметрии $\angle((ABC); (AA_1C)) = \angle((ABC);$
 $(AB_1BC)) = \alpha$, пусть $\angle((ABC); (AB_1B_1)) = \beta$,

тогда $S_{A_1B_1C_1} = 4 \cdot \cos \alpha = S_{AA_1C_1C}$, $S_{A_1B_1C_1A} =$

$= 3 \cos \beta \Rightarrow 4 \cos \alpha = 3 \cos \beta$.

$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{p(A_1; AC)}{p(A_1; AB)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$

$\begin{cases} 4 \cos \alpha = 3 \cos \beta \\ 4 \cos \alpha = 3 \cos \beta \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

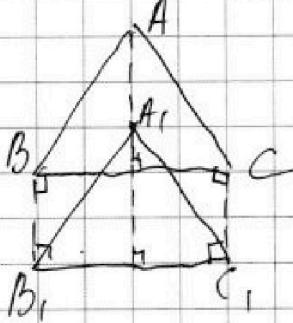
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

Лемма:

Рассмотрим на плоскости 2 равных треугольника, $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$, проведем AA_1 - ось симметрии, и они совмещаются параллельным переносом на $\vec{AA_1}$. Тогда $S_{AB_1A_1} + S_{ACC_1A_1} = S_{B_1C_1C}$.



Доказано:

$$1) AA_1 = BB_1 = CC_1 = h, AB = BC = AC =$$

$$2) A_1C_1 = B_1C_1 = A_1B_1 = a.$$

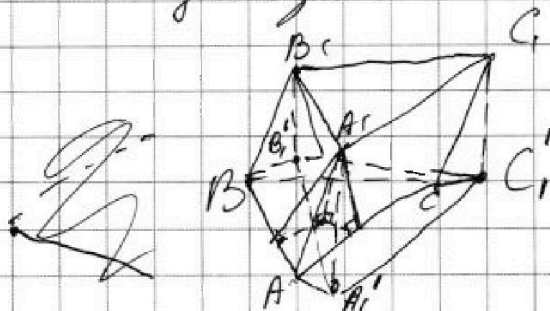
$$S_{B_1C_1C} = a \cdot h.$$

$$S_{AB_1A_1} = AB \cdot AA_1 \cdot \sin \angle BAA_1 = ah \sin 30^\circ = \frac{1}{2} ah. \quad \Rightarrow$$

$$S_{ACC_1A_1} = AA_1 \cdot AC \cdot \sin \angle CAA_1 = \frac{1}{2} ah$$

$$\Rightarrow S_{ACC_1A_1} + S_{AB_1A_1} = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ah = ah = S_{B_1C_1C}.$$

Лемма доказана



$ABCA_1B_1C_1$ - правильная призма.
 A_1', B_1', C_1' - проекции A_1, B_1, C_1 на (ABC) .

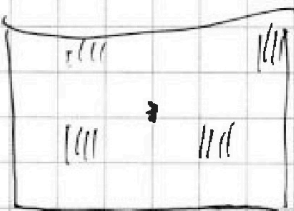
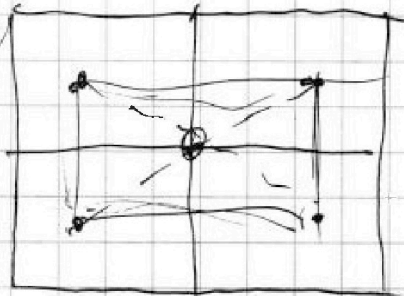
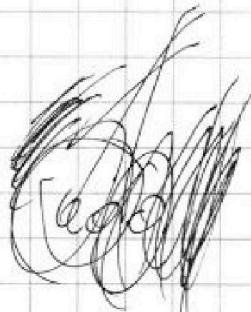
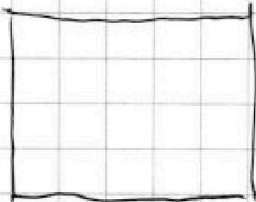


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$12x^2 + 12x + 3 = 0$$

$$(4x+1)^2 \quad x = -\frac{1}{4} \quad 4+6+3-3$$

$$25000 \quad 50000$$

$$10$$

$$-4+6-3-3$$

$$25000 \cdot 25000 \quad [-4; 10]$$

$$3 \cdot 25000 \quad 25000 \quad 12500$$

2

$$\frac{1}{2}$$

$$6053x + 6005^2x - 6007x - 3$$

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$4x^2(x+3)$$

$$\sqrt[3]{4}x$$

$$x^3 + 3(x^3 + 5 - 1)$$

$$6 = 3 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot x^2 \cdot y \quad \sqrt[3]{2}$$

$$x = \sqrt[3]{2} \cdot y$$

$$\frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

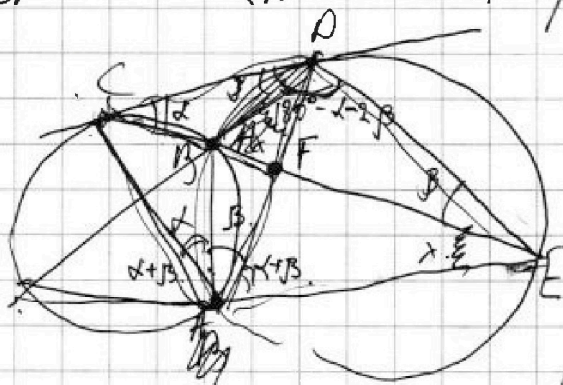


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p. \quad a - b = 3.$$



~~CF = 2~~
~~DE = 2~~
 $\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$
 $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$
 $CD \parallel BE \sim CED$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$(a-b) = 3$$

$$180^\circ - 2 - 2\beta - \alpha$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = 22$$

$$560 \equiv 2$$

$$a + b^2 \equiv 2$$

$$b^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$b^2 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$$

$$AD^2 = 30b^2$$

$$AD = \sqrt{30}b$$

$$b = 3 \quad a =$$

$$b = 8$$

$$b = 6$$

$$b = 12$$

$$b = 15$$

$$b = 18$$

$$b = 21$$

$$9 + 4 \cdot 550 = -2209$$

$$b^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha$$

$$a - c \neq p$$

$$b - c = p$$

$$a = b$$

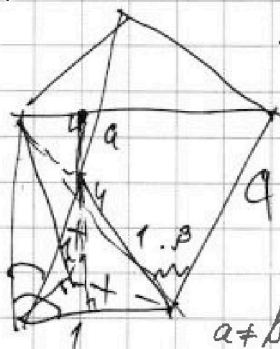
$$a - c = p^2$$

$$b - c = 1$$

$$a = p^2 + c$$

$$c + 1 = b$$

$$p^2 + c + c^2 + 2c + 1 = 560$$



$$a \sin \alpha = 4$$

$$a \sin \beta = 3$$

$$c^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3}$$

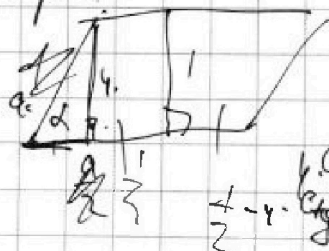
$$\sin \alpha = 4x$$

$$\sin \beta = 3x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4x}{2} = \frac{4x}{2}$$

$$329$$

$$\frac{168}{2209}$$



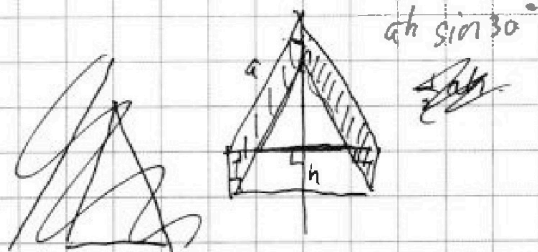
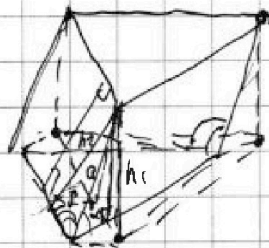


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a \cdot \cos \alpha = 3 \cos \beta$$

$$h_2 = a \sin \beta$$
$$h_1 = a \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{h_1}{h_2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a_{11}}{q^4} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\sqrt{q^8(13x-35)(x+1)} = a_{11} \cdot q^4$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$\frac{\sqrt{\frac{7+2\sqrt{10}}{2}}}{2} = \frac{q^4 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)}{2} = \frac{4-2\sqrt{10}}{1-\sqrt{5}}$$

$$\frac{-100}{-64} = \frac{100}{64} = \frac{5}{4} \Rightarrow x \geq -3$$

$$\sqrt{\frac{4-12\sqrt{10}}{2}} = \frac{-100}{(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2} = \frac{4-2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x+2}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2z^2}$$

$$y < -1$$

$$-y - 13 - 3y + 36 = 34 - 2y$$

$$35 = 4y$$

$$y \geq -1$$

$$y+1 - 3y + 36 = 34 - 2y$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{4-\frac{1+\sqrt{13}}{2}} = 1$$

$$3 + \frac{1-\sqrt{13}}{2} = \frac{7-\sqrt{13}}{2} = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{102\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 39 - 4 = 160$$

$$-x^2 + x + 12 = 4\cos^2 - 3\cos$$

$$(4-x)(x+3) = 6\cos^2 - 3$$

$$4\cos^3 + 6\cos^2 + 3\cos - 3 = 0$$

$$x \in [-13; 13]$$

$$a(2b-1) = 5-b$$

$$b(2a+1) = a-5$$

$$z = 0$$

$$y = 12 - \min \frac{81}{1296}$$

$$y = 12 - \min \frac{81}{1296}$$

$$q \cdot \frac{3}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$