



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наша прогрессия выглядит так:

$$b, bq, bq^2, \dots, bq^n, \dots$$

Тогда из условия получим:

$$\begin{cases} bq^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ bq^3 = x+4 \\ bq^n = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{cases}$$

Добавьте сюда третье условие на второе и третье поделем на 2 (Понятно, что если прогрессия геометрическая, то  $bq^i \forall i \in \mathbb{N} : bq^i \neq 0$ )

$$\begin{cases} q^8 = \sqrt{(x-3)^4} \\ q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^8 = (x-3)^2 \\ q^8 = \frac{(15x+6)^2 (x-3)^2}{(x+4)^4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 \cdot \frac{(15x+6)^2 (x-3)^2}{(x+4)^4} \Leftrightarrow (x-3)^2 \left( 1 - \frac{(15x+6)^2}{(x+4)^4} \right) = 0$$

$$\text{! } x \neq -4 \text{ !}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ (15x+6)^2 = (x+4)^4 \end{cases} \text{ ①}$$

$$\text{① } (15x+6 - (x+4)^2) (15x+6 + (x+4)^2) = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 15x + 6 - x^2 - 8x - 16 = 0 \\ 15x + 6 + x^2 + 8x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x^2 + 23x + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ x = -22 \\ x = -1 \end{cases}$$

В итоге получаем  ~~$x = 5$~~   $\begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ x = -22 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Проверка:

- 1)  $x = 5$ :  $bg^3 = \frac{9}{2\sqrt{2}}$   $bg^2 = 9$   $bg^{11} = 9\sqrt{2}$  (✓)
- 2)  $x = 2$ :  $bg^3 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(-1)^3}}$   $bg^3 = 6$   $bg^{11} = 6 \cdot \sqrt{-1}$  (!?) (✗)
- 3)  $x = -22$ :  $bg^3 = \sqrt{\frac{15 \cdot (-22) + 6}{(-25)^3}}$   $bg^3 = -18$   $bg^{11} = \sqrt{(15 \cdot (-22) + 6)}$   
 $\cdot (-25)$   $\Leftrightarrow bg^3 = \sqrt{\frac{324}{25^3}}$   $bg^3 = -18$   $bg^{11} = \sqrt{324 \cdot 25}$   $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow bg^3 = \frac{18}{125}$   $bg^3 = -18$   $bg^{11} = 18 \cdot 5 \Rightarrow g^6 = -\frac{1}{125}$
- 4)  $x = -1$ :  $bg^3 = \frac{3}{8}$   $bg^3 = 3$   $bg^{11} = 6 \Rightarrow g = \sqrt{2}$  (✓)
- 5)  $x = 3$ :  $bg^3 = \frac{\sqrt{51}}{0}$  (!?)

В итоге  $x = 5$  или  $x = -1$ .

Ответ:  $x = 5$  или  $x = -1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

Давайте посмотрим на второе уравнение, но левая часть не больше 15, т.к.  $z^2 > 0 \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 225 - z^2 \leq 225 \quad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{225 - z^2} \leq 15 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

① Заметим, что если  $y > 35$ , то левая часть больше 15, т.к.  $|y-20| + 2|y-35| > |y-20| > 15$

②  $y = 35$  - подходит.

③ Если  $y \in [20, 35)$ , то:  $y-20 + 70 - 2y \leq 15 \Leftrightarrow y \geq 35$  ? - против  $y$  нет, т.к.  $y \in [20, 35)$

④ Если  $y < 20$ :  $20 - y + 70 - 2y \leq 15 \Leftrightarrow 3y \geq 75 \Leftrightarrow y \geq 25$  ? - против  $y < 20$  нет.

В итоге получаем, что чтобы существовал  $z$ ,

$y$  должен быть равен:  $y = 35 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{3(x+7)(5-x)} - 6$$

$$x+7 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + 5-x = 4(x+7)(5-x) - 24\sqrt{(x+7)(5-x)} + 36$$

$$\text{Пусть } \sqrt{(x+7)(5-x)} = t \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12 - 2t = 4t^2 - 24t + 36$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 8 \cdot 12 = 121 - 96 = 25$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{11-5}{4} = \frac{3}{2} \quad (1) \\ t_2 = \frac{11+5}{4} = 4 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{11-5}{4} = \frac{3}{2} \quad (1) \\ t_2 = \frac{11+5}{4} = 4 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \sqrt{(x+7)(5-x)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x+7)(5-x) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 35 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 - 8x + 140 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 131 = 0$$

$$D = 64 + 16 \cdot 131 = 2160 = 6^3 \cdot 10 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-8 + 4\sqrt{135}}{8} = -1 + \frac{\sqrt{135}}{2} \\ x_2 = \frac{-8 - 4\sqrt{135}}{8} = -1 - \frac{\sqrt{135}}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-8 + 4\sqrt{135}}{8} = -1 + \frac{\sqrt{135}}{2} \\ x_2 = \frac{-8 - 4\sqrt{135}}{8} = -1 - \frac{\sqrt{135}}{2} \end{array} \right.$$

Проверим, что  $x_1, x_2 \in [-7; 5]$ :  $-1 + \frac{\sqrt{135}}{2} < -1 + \frac{12}{2} = 5 \quad (\checkmark)$

$$-1 - \frac{\sqrt{135}}{2} \in (-1-6; -1-5,5) \quad (\checkmark)$$

$$(2) \sqrt{(x+7)(5-x)} = 4 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 35 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$D = 4 + 19 \cdot 4 = 80 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2 - \sqrt{80}}{2} \in -1 - \sqrt{20} \in (-6; -5) \quad (1) \\ x_2 = \frac{-2 + \sqrt{80}}{2} \in -1 + \sqrt{20} \in (3; 4) \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left(-1 \pm \frac{\sqrt{135}}{2}; 35; 0\right) \quad \left(-1 \pm \sqrt{20}; 35; 0\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- ① Если  $p < -10$ , то корней нет
- ② Если  $p > 4$ , то корней нет.
- ③ Если  $p \in [-10; 4]$ , то ровно 1 корень. относительно  $t$ ,  
а относительно  $x$  — два корня.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$$

$f(x)$

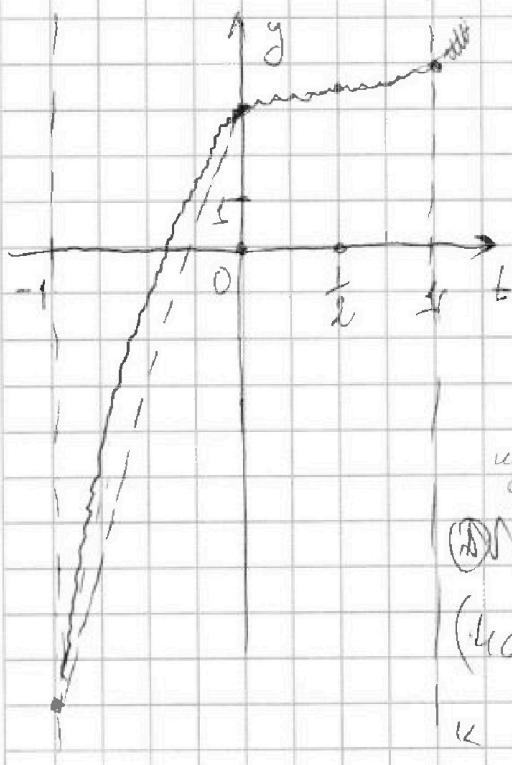
Пусть  $\cos x = t \in [-1; 1]$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

Давайте нарисуем  $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$  и  $p$  на плоскости:

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t - 1)^2 \Rightarrow \text{стационарный пункт}$$

$$t = \frac{1}{2}$$



Если  $y$  на одна стационарная точка, то ~~есть~~ наша функция изгибается, как  $x^3$ .

Также возьмем производную  $(4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3)$  и приравняем к нулю, но лучше, если  $\sin x \geq 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \min(y) = f(-1)$  или  $f(1)$ . Получается, что  $\min(y) = f(-1) = -10$

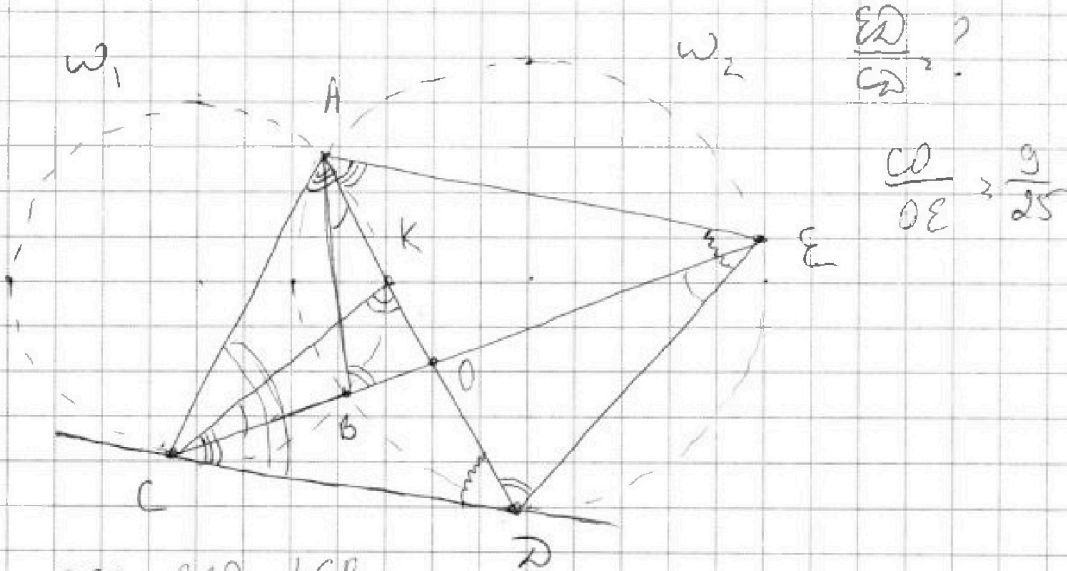


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1)  $\angle DEO = \angle BAO = \angle KCB$

2)  $\angle EDA = \angle ABE = 180 - \angle CBA = 180 - \angle CKA = \angle CKD$

3)  $\triangle CDK \sim \triangle AED$ , т.к.  $\angle CDK = \angle AED$  и  $\angle DCK = \angle ADE$

$\Rightarrow \angle DCK = \angle DAE = \angle DAC \Rightarrow AD - \text{биссектриса } \angle CAE$

4)  $\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$

5)  $CD^2 = AD \cdot DK \Leftrightarrow \frac{CD}{DK} = \frac{AD}{CD}$

6)  $\angle DCA = \angle CKD = \angle ADE$

7)  $\triangle ACD \sim \triangle ADE$  по 2 углам  $\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{CK}$

$\triangle ACD$  и  $\triangle CKD$ .

8)  $\triangle KOC \sim \triangle ODE$  по 2 углам  $\Rightarrow \frac{CK}{OE} = \frac{9}{25} \Rightarrow CK = \frac{9 \cdot ED}{25}$

9)  $\frac{ED}{CD} = \frac{CD}{ED} \cdot \frac{25}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$

Ответ:  $\frac{5}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③  $p=5$ :  $D = 144(821-25) = 144 \cdot 796 = 2485$ , - это если только квадрат числа, которое оканчивается на 5, но  $55^2 = 3025 > 2485$ , а  $45^2 = 2025 < 2485$ .

④  $p=7$ :  $D = 144 \cdot (821-49) = 3089$ , это если только  $53^2 = 2809 \neq 3089$

⑤  $p=11$ :  $D = 144 \cdot (821-121) = 2801$ , это либо  $59^2$ , но  $59^2 > 3000$ , либо  $51^2 = 2601 \neq 2801$

⑥  $p=13$ :  $D = 144 \cdot (821-169) = 2609$ , но  $51^2 = 2601 \neq 2609$   
 $\Rightarrow 53^2 > 2609$  и  $57^2 > 2609$

⑦  $p=17$ :  $D = 144 \cdot (821-289) = 2529$ ,  $\Rightarrow 2529 < 51^2$

⑧  $p=19$ :  $D = 144 \cdot (821-361) = 1841$ , это либо  $41^2 = 1681 \neq 1841$ , либо  $49^2 = 2000$

⑨  $p=23$ :  $D = 144 \cdot (821-529) = 1169$ ,  $33^2 = 1089 \neq 1169$   
 $37^2 > 1169$

⑩  $p=29$ :  $D = 144(821-841) < 0$   $\Rightarrow$  при  $p > 29$ :  $D < 0$

для всех  $p > 0$ , но где  $p < 0$  тоже самое, т.к.  
 $p^2 = (-p)^2$

Ответ:  $(36, 28, 27)$   $(-21, -28, -30)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $(a-c)(b-c) = p^2$ , где  $p$  - простое

Тогда давайте рассмотрим 3 случая:

$$① \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Leftrightarrow b-a+1=p^2, \text{ но по условию}$$

$$a > b \Rightarrow b-a < 0 \Rightarrow b-a+1 < 1 < p^2, \text{ т.к. } 1 \text{ и } 0 - \text{ не простые}$$

$$② \begin{cases} b-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Leftrightarrow a=b \stackrel{!}{=} - \text{ по условию это не так}$$

$$③ \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=p^2 \\ c=b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-1=p^2 \\ c=b-1 \end{cases}$$

из второго условия  $a = 820 - b^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 820 - b^2 - b + 1 = p^2 \Leftrightarrow b^2 + b + p^2 - 821 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4p^2 + 821 \cdot 4 = 3285 - 4p^2 = 1 + 4(821 - p^2)$$

Получено, что если  $b \in \mathbb{N}$ , то  $\Delta$  должен быть полным квадратом.  $p^2 \leq 821$ , иная картина вообще не будет

Давайте рассмотрим все простые  $p \in [2; 29]$ :

$$① p=2: \Delta = 1 + 4 \cdot (821 - 4) = 1 + 4 \cdot 817 = 3269 \in (50^2; 60^2) \Rightarrow$$

$$\rightarrow \text{если } \Delta \text{ квадрат, то } \Delta = 53^2 \text{ или } \Delta = 57^2 = 3249 \neq 3269$$

$$② p=3: \Delta = 1 + 4 \cdot (821 - 9) = 1 + 4 \cdot 812 = 3249 = 57^2$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{-1+57}{2} = 28 \Rightarrow a = 820 - 28^2 = 9 - 1 + 28 \cdot 36 \Rightarrow c = 27 \\ b_2 = \frac{-1-57}{2} = -29 \Rightarrow a = 9 - 1 + 29^2 = 21 \Rightarrow c = -80 \end{cases}$$

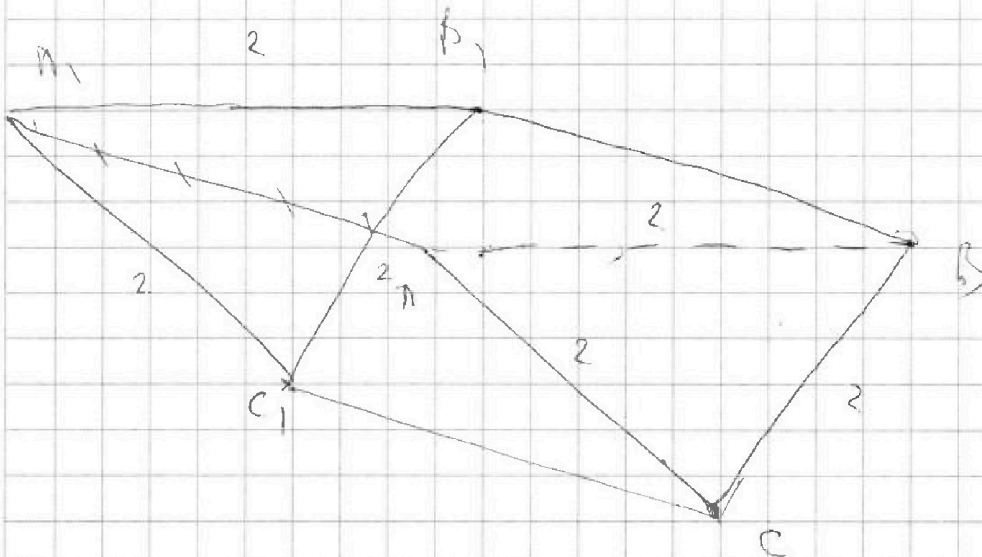


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
 2   
 3   
 4   
 5   
 6   
 7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Проведем высоту

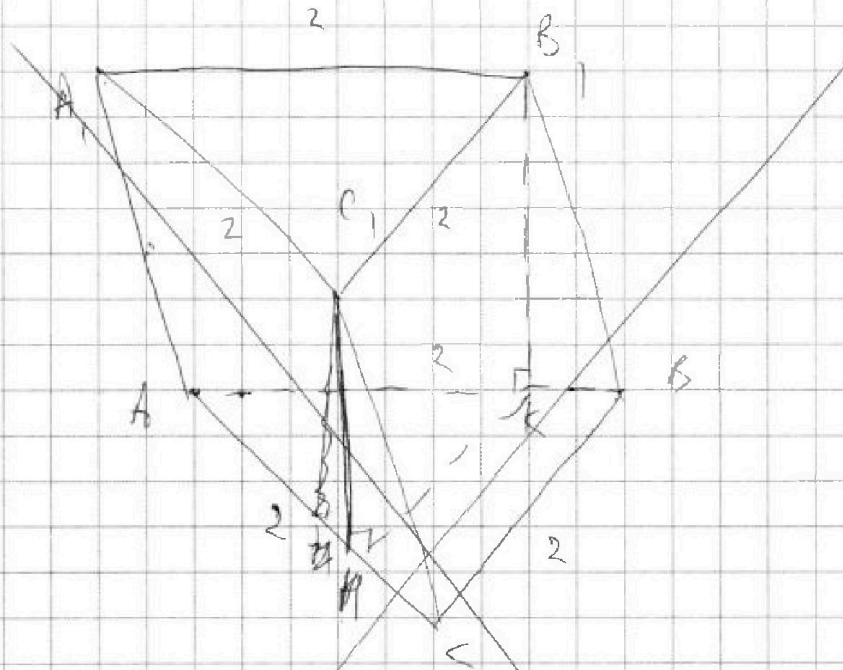


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



① проведем высоту  $B_1H$  и  $B_1K$ . Они будут равны  
 $B_1K = C_1H = \frac{5}{2}$

② Давайте докажем, что проекция  $C_1B_1$  на плоскость  $ABC$  перпендикулярна  $BC$ , тогда  $B_1K \perp BC$  высота призмы

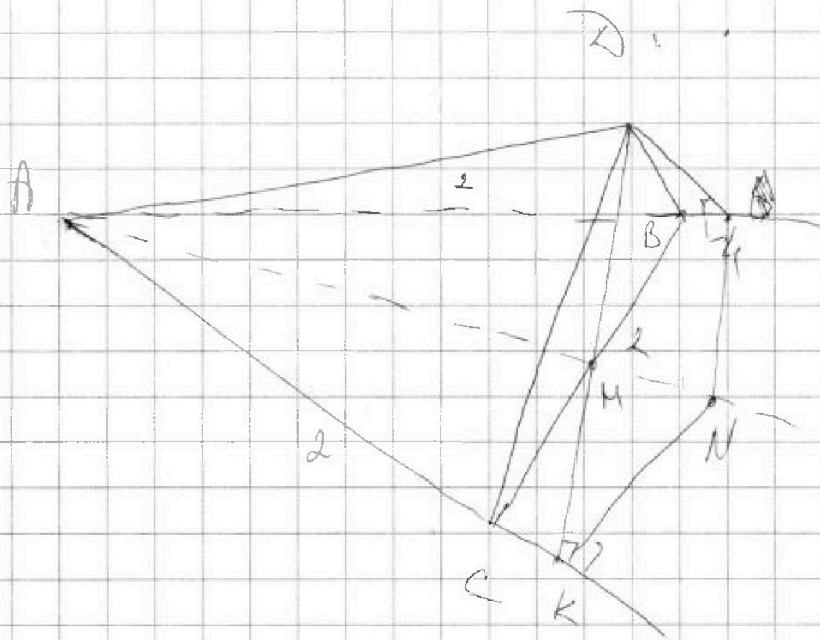


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) Добавьте опущенными высотами  $DK$  в  $\triangle ADK$  и  $DL$  в  $\triangle ADB$ .  
Все дуги равны, т.к.  $\angle ADK = \angle ADB$  по условию и  $AC = AB$ .
- 2)  $\sin \angle KAD = \frac{DK}{AD}$   $\sin \angle BAD = \frac{DL}{AD}$ , т.к.  $\angle CAD$  и  $\angle CBD$  острые  
(или тупые) оба, то  $\angle CAD = \angle CBD$ , т.к. равны синусы.
- 3)  $\triangle ADK = \triangle ALD$  по гипотенузе и острому углу  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AK = AL$ ,  $\Rightarrow$  Добавьте проведем перпендикуляр из  
точек  $L$  и  $K$  к прямой  $AM$  и  $AK$ . Все перпендикуляры  
на  $AM$ , т.к.  $\triangle AKM = \triangle ALM$ , т.к.  $AK = AL$ .  $\Rightarrow$  проекция  
 $AD$  на плоскость  $ABC$  лежит на отрезке  $AM$ .
- 4) т.к.  $\angle CAD = \angle CBD \Rightarrow \triangle ACD = \triangle ABD \Rightarrow CD = DB \Rightarrow$



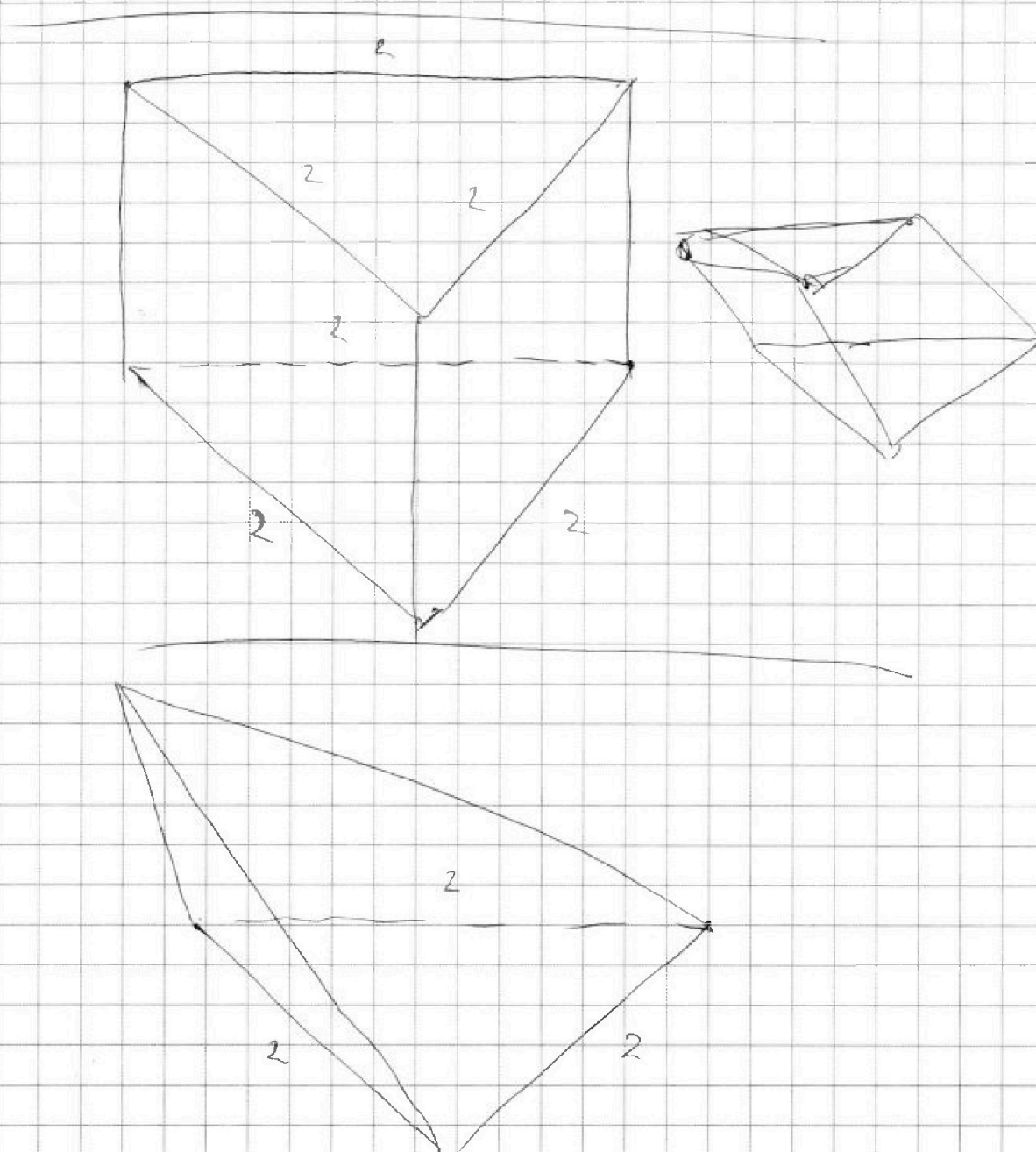
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ высота пирамиды опускается в  $M$ -сердцу





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$b_1$     $b_9$     $b_9^2$     $b_9^3$    ...    $b_9^9$    ...    $b_9^{12}$     $\frac{336}{216}$

$b_9^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$     $b_9^9 = x+4$     $b_9^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$

$b_9^3 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^7}{(x-3)^9}} = \frac{b_9^{11}}{(x-3)^2}$

$(x-3)^2 = b_9^8$     $(x = b_9^5 - 4)$

$b_9(x-3)^2 = x+4$

$(x-3)^2 = \frac{(15x+6)^2 \cdot (x-3)^2}{(x+4)^4}$

$(x-3)^2 \left( 1 - \frac{(15x+6)^2}{(x+4)^2} \right) = 0$

$(15x+6)^2 = (x+4)^2$

$15x-6 = (x+4)^2$

$-x^2 + 7x - 10$

$q = \sqrt{5}$

$b_9^6 =$

$12-2t = 4t^2 - 24t + 36$

$x \neq -4$   
 $x = 3$

$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$   
 $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 \cos x + p$   
 $4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$

$\cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$   
 $2 \cos^2 x - \cos x = 2 \cos x \sin^2 x + 4 \cos^3 x - \cos x$   
 $2 \cos^2 x - \cos x = 2 \cos x (1 - \cos^2 x) + 4 \cos^3 x - \cos x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+7} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2^2} \end{cases}$$

$$|y-20| + 2|y-35| < 15$$

$$|y-20| + 2|y-35| < 15$$

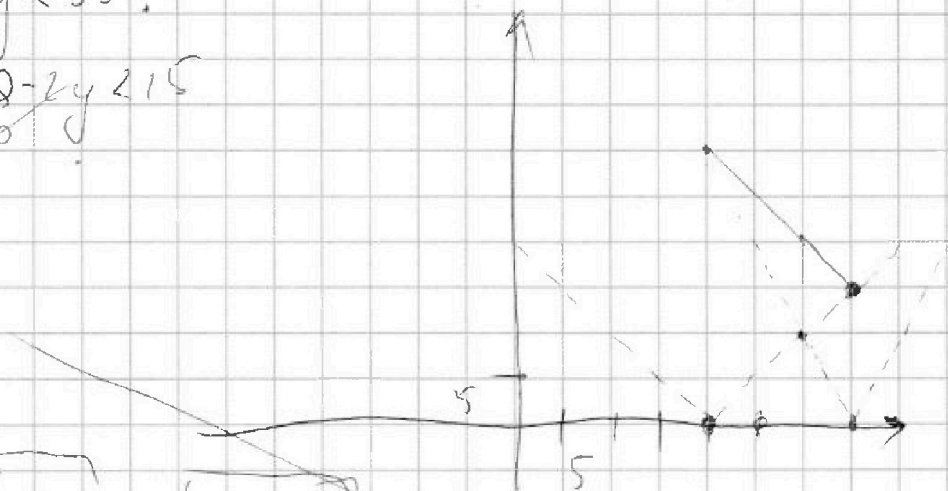
$$y = 35 \quad \checkmark$$

1) Пусть  $y < 35$ :

$$y-20 + 2(35-y) < 15$$

$$-y < -35$$

$$y > 35$$



$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

$$x+7+5-x - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4$$

$$\sqrt{x+7} = t \quad x+7 = t^2$$

$$\sqrt{5-x} = m$$

$$t - m = 2\sqrt{t^2 - 6} - 6$$

$$\begin{array}{r} 327 \\ \wedge 5 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times 16 \\ \hline 786 \\ 131 \\ \hline 2096 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2096 \\ - 64 \\ \hline 2160 \end{array}$$

$$2160 = 10 \cdot 216 = 10 \cdot 6^3 = 2$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$$\sqrt{20+6} - \sqrt{6-\sqrt{20}+6} = 2\sqrt{16}$$

$$\sqrt{20+6} = \sqrt{6-\sqrt{20}+6} + 2$$

$$20 - 2\sqrt{20}$$

$$\sqrt{20} + x = 6 - \sqrt{20} + 2\sqrt{6-\sqrt{20}+6} + 4$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{6-\sqrt{20}+6} + 2$$





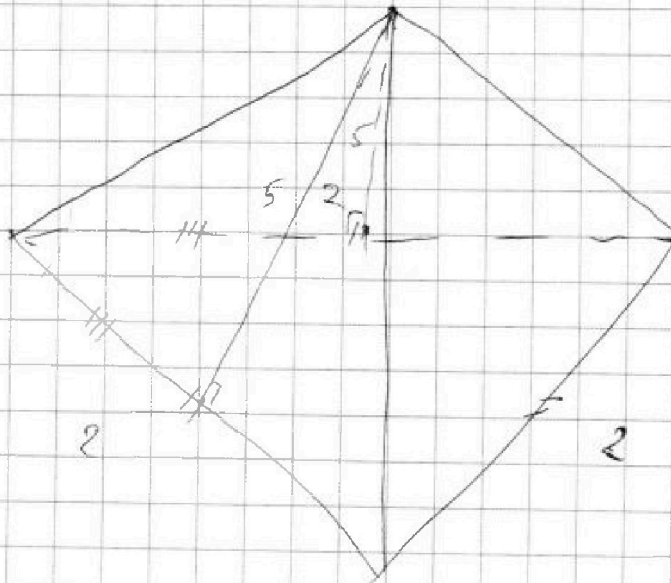
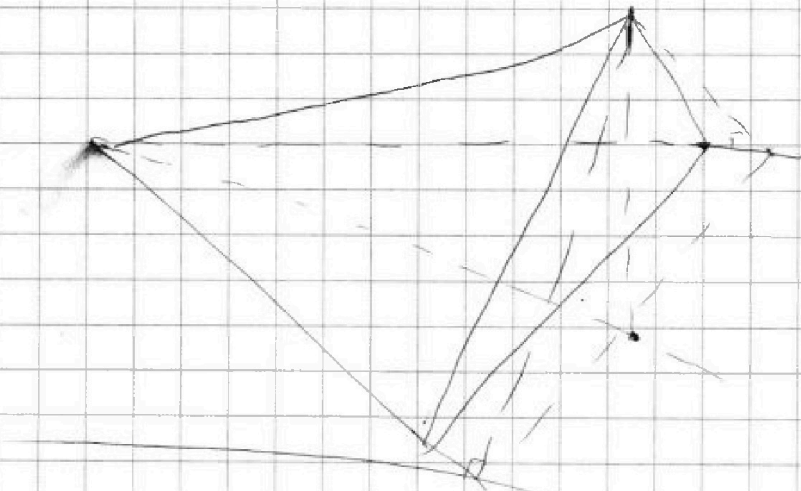
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos x \rightarrow \sin x$$

$$y = \cos x \quad y' = -\sin x$$

$$f'(x) = 12 \cos^2 x \sin x - 12 \cos x \sin x + 3 \sin x = 0 \quad y' = -\sin x$$

$$4 \cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0 \quad \cos x = z$$

$$2z^2 - 4z + 3 = 0 \quad 4z^2 - 6z + 3 = p$$

$$4 - 6z + 3z^2$$

$$36 - 48$$

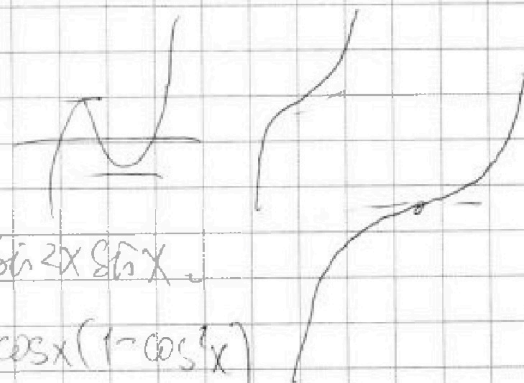
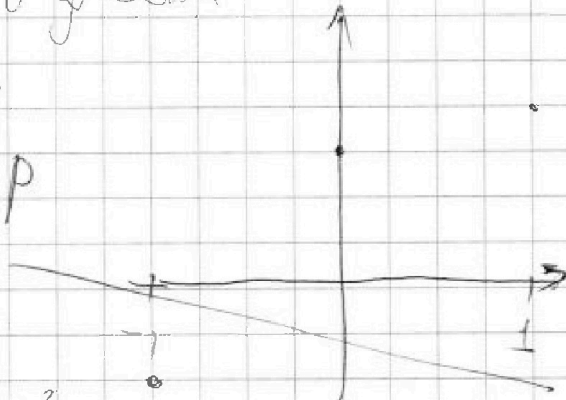
$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} + 3 =$$

$$\frac{2 - 6 + 6 + 12}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

$$(2 \cos^2 x - 1)^2$$



$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= \cos 2x \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$2t^2(2t-3) + 3(t-1)^2$$

$$3t(t-1)^2 + 3t^3 + 3 = p$$

$$3t(t-1)^2 + 3(t-1)(t^2+t+1) = p-6$$

$$3(t-1)(t(t-1) + t^2+t+1) = p-6$$

$$3(t-1)(2t^2+1) = p-6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sin^2 x \cos x = 2\cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$2\cos^3 x - \cos x = \cos x - 2\cos^3 x$$

$$a = 36$$

$$b = 28$$

$$c = 27$$

$$(a-c)(b-c) = 9 \cdot 1 = 9 = 3^2$$

$$36 + 28 = 64$$

$$(20-1) = 19$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$400 - 40 \cdot 1 = 360$$

$$18$$

$$b + c - 812 = 0$$

$$41$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ \hline 252 \\ 56 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$1581$$

$$\begin{array}{r} 821 \\ - 169 \\ \hline 2652 \\ \times 4 \\ \hline 2608 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 821 \\ - 361 \\ \hline 2460 \\ \times 4 \\ \hline 1840 \end{array}$$

$$1167$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 33 \\ \hline 117 \\ 117 \\ \hline 1287 \end{array}$$

$$29$$

$$30 - 1^2 = 29$$

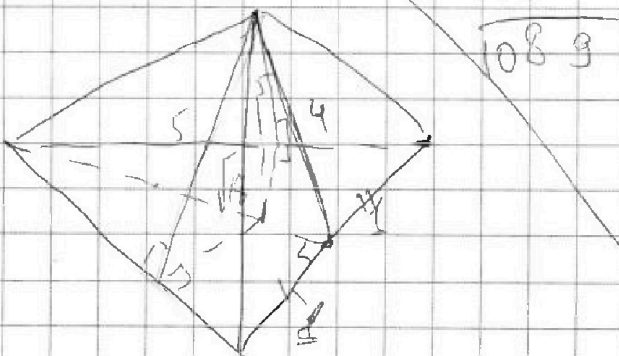
$$= 900 - 90 \cdot 1 = 810$$

$$= 941$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 821 \\ - 529 \\ \hline 3292 \\ \times 4 \\ \hline 1168 \end{array}$$

$$\sqrt{1168} = \sqrt{17}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6)  $a > b$   
 $a - b \neq 3$

$(a - c)(b - c) = p^2$

$a + b^2 = 820 \quad a = 820 - b^2$

2	3	5	7	11	13	17
1	2	3	4	5	6	7
19	23	29				
e	5	10				

1)  $a - c = 1$

$c = a + 1$

$b - a + 1 = p^2$

3)  $a - c = p$

$b - c = p$

$a = b$

$\begin{array}{r} 2 \\ 817 \\ \times 4 \\ \hline 3268 \\ + 1 \\ \hline 3269 \end{array}$

$\begin{array}{r} 5 \\ 53 \\ \wedge 53 \\ \hline 159 \\ + 205 \\ \hline 2809 \\ \wedge 25 \\ \hline 125 \\ \hline 5 \end{array}$

2)  $b - c = 1$

$c = b + 1$

$a - b + 1 = p^2$

$\begin{array}{r} 821 \\ - 289 \\ \hline 532 \\ \times 4 \\ \hline 2128 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1 \\ 53 \\ \times 53 \\ \hline 159 \\ \hline 2809 \end{array}$

$\begin{array}{r} 4 \\ 57 \\ \wedge 57 \\ \hline 399 \\ + 205 \\ \hline 3249 \end{array}$

$a - b + 1 = p^2$

$b^2 + b - 819 + p^2 = 0$

$2 = 1 + 819 - 4p^2 = 820$

$2 = 1 + 4 \cdot 819 - 4p^2$

$\begin{array}{r} 821 \\ = 49 \\ \hline 772 \end{array}$

$\begin{array}{r} 26 \\ \wedge 28 \end{array}$

$\begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 159 \\ + 205 \\ \hline 2609 \end{array}$

$\begin{array}{r} 32 \\ 796 \\ \times 4 \\ \hline 2484 \\ + 1 \\ \hline 2485 \end{array}$

3025

$\begin{array}{r} 812 \\ \times 4 \\ \hline 3248 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2 \\ 772 \\ \times 4 \\ \hline 3088 \end{array}$

$\times 53$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2x) \quad 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 = f(x)$$

$$f'(x) = 2\sin x + 2\sin x + 3$$

$$f(x) = 4\sin^3 x - 6\cos^3 x$$

$$f(x) = 4 \cdot (\cos x)^3 - 6 \cdot (\cos x)^2 + 3 \cdot (\cos x) + 3$$

$$f'(x) = -12 \cdot \cos^2 x \sin x + 12 \cos x \sin x - 3 \sin x = 0$$

$$\sin x (-4\cos^2 x + 4\cos x - 3) = 0$$

$$D = 16 - 48 = -32$$

$$\cos x_1 = \frac{-4 - 8}{-8} = \frac{3}{2}$$

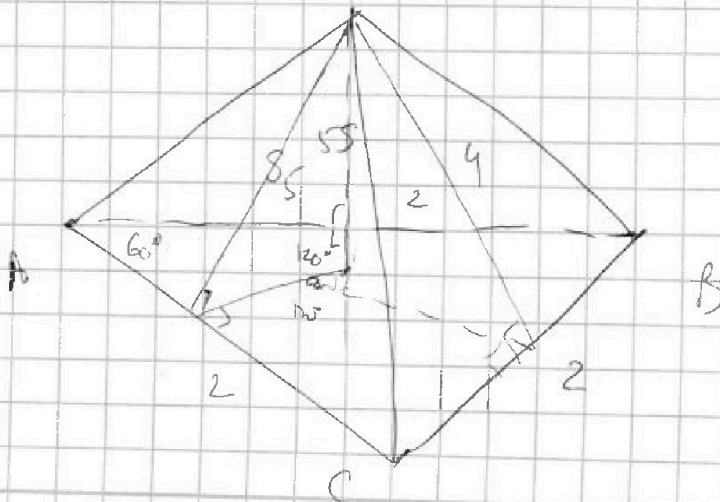
$$\cos x_2 = \frac{-4 + 8}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} + 3 =$$

$$\frac{-2 + 6 - 8 + 12}{4} = \left(\frac{1}{2}\right) \quad 12 - 8$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$



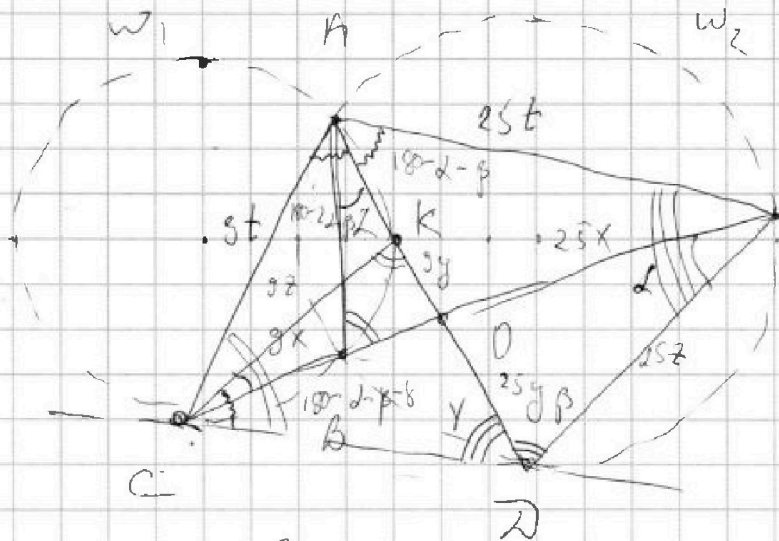


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1     2     3     4     5     6     7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ED}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{9}{25}$$

$$CB \cdot CE = CD^2 = DK \cdot DA$$

$$CB \cdot 25x = AD \cdot DA$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{CD}{AE} = \frac{DK}{DE}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{CK} = \frac{AE}{AD}$$

$$AE = \frac{9 \cdot AC}{25}$$

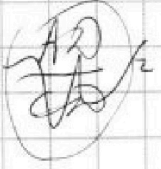
$$AE = \frac{25 \cdot AC}{9}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AC}{AD} = \frac{AC \cdot DK}{CD^2}$$

$$AD \cdot DK = CD^2$$

$$AD = \frac{CD^2}{DK}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CK}{ED} = \frac{9}{25}$$



$$\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

$$CD^2 = AD \cdot AD$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{CD \cdot ED \cdot 9}{25}$$

$$25 \cdot ED = CD^2 \cdot 9$$

$$CD^2 = \frac{25}{9} \quad CD = \frac{5}{3}$$

$$CK = \frac{9 \cdot ED}{25}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

