



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  - некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .  
*САН*
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0 \quad a=1 \quad b=2\sqrt{3}t \quad c=4t^2-4$$

Чтобы квадратное уравнение имело 2 корня  $D > 0$ .

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

$$4t^2 < 16$$

$$t < 4$$

$$t \in (-2; 2)$$

По теореме Виета  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4t^2 - 4 > 0$

$$t^2 > 1$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} t < -1 \\ t > 1 \end{cases} \quad t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\begin{cases} -2 < t < 2 \end{cases}$$

Ответ:  ~~$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$~~  При  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

Предположим, что  $a-b$  и  $a-b+15$  кратны  $p$ . Тогда  $a-b+15-a-b = 15 : p$ . Тогда  $p = 2, 3$  или  $5, 7, 11$  или  $13$ . Однако максимальное

Заметим, что максимальное значение  $a-b = 38$  т.к.

$a+b=40$ . Тогда максимальное значение  $(a-b)(a-b+15)$  будет

равно  $38 \cdot 53 = 2014$ . При этом если  $p \geq 3$ , то  $17p^5 \geq 4131$ .

Значит  $p=2$  и  $17p^5 = 17 \cdot 32 = 544$ . Теперь заметим,

что  $a-b$  всегда кратно 2 т.к.  $a+b=40 \Rightarrow a-b=40 \Rightarrow b=2(20-b)$ .

Значит  $a-b+15$  - нечетное. Это возможно если  $a-b+15=17$  или  $\pm 1$ .

При  $a-b+15 = \pm 1$ ,  $a-b = \pm 544$ , что невозможно, ведь  $a+b=40$ .

или

При  $a-b+15 = -17$ ,  $a-b = -32 \Rightarrow a=4, b=36$

При  $a-b+15 = 17$ ,  $a-b = 17-15 = 2$ . Но тогда  $(a-b)(a-b+15) = 34$ , что

противоречит условию. Значит  $a=4, b=36$

Ответ:  $a=4, b=36$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ANC - \triangle$  (по признаку  $\triangle$ )

$$\angle NAC = \angle NCA$$

$$\angle BNA = 180^\circ - \angle ANC = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle NAC) = 2\angle NAC$$

$\triangle BAC \sim \triangle BAN$  (по 1 признаку подобия  $\triangle$ )

$$\angle BAC = \angle BAN + \angle CAN = 2\angle NAC = \angle BNA$$

$$\angle BCA = \angle BAN$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN}$$

$$AB^2 = BC \cdot BN$$

$$AB^2 = 12 \cdot 8 = 96$$

$$AB = 4\sqrt{6}$$

Ответ:  $AB = 4\sqrt{6}$



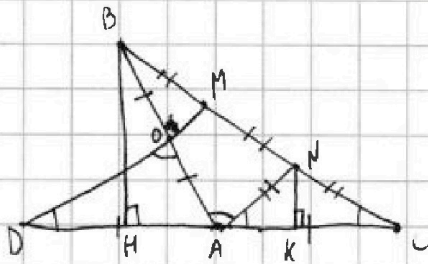


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle NAC = \angle ADM \text{ (как соотв при } AN \perp DM \text{ и сек. } AD)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{AC} = \frac{MN}{AC} = \frac{MN}{AD} \text{ (по теореме Птолемея)}$$

$$AC = AD$$

$$\frac{BM}{MN} = \frac{BO}{OA} \Rightarrow BO = OA \text{ (по теореме Птолемея)}$$

$$AC = AD = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB = OA = OB$$

$$\angle ODA = \angle DOA \text{ (по св-ву } \Delta)$$

$$\angle DOA = \angle OAN \text{ (как соотв при } DM \perp AN \text{ и сек. } DA)$$

$$\angle DOA = \angle OAN \text{ (как н.д.у при } DM \perp AN \text{ и сек. } DA)$$

$$\angle BAD = 180^\circ - 2 \angle NAC \text{ (по св-ву смежных } \angle)$$

Проведем в \Delta OAD высоту BH на DC.

$$AH = \cos(\angle BAD) \cdot AB$$

$$AH = \cos(180^\circ - 2 \angle NAC) \cdot AB = \frac{1}{2} AB \text{ (т.к. } \cos(x) = -\cos(180^\circ - x))$$

Проведем высоту NK на сторону DC.

$$\frac{NK}{KC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{4}{KC} = \frac{12}{AH \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{KC} = \frac{12}{15AC} \Rightarrow KC = \frac{1}{2} AC \text{ (по теореме Птолемея)}$$

$$NK \text{ - высота } \Delta AK = AC - KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow NK \text{ - высота и медиана } \Delta AKC$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что деревни из которых высаживают по 1 дереву могут быть соединены лишь с 4 другими деревнями т.к. иначе <sup>из них не получится добраться до других</sup> ~~получится~~ <sup>удалёнными</sup> ~~удалёнными~~ деревнями и условия не будет выполняться. Также известно, что никакие 3 не соединены друг с другом ведь в противном случае можно добраться из одной до другой двумя способами.

Теперь рассматривая задачу в виде графа, где деревни - вершины, а дороги - рёбра, рассмотрим как могут быть соединены деревни с 3, 4, 5 и 7 дорожками.

Тогда случаев всего 2 (не считая те, что получаются перестановкой вершин):  $\Pi$   $\kappa$ . В каждом из случаев сумма степеней вершин этих деревьев (без дорог к остальным) будет равна 6. Остальные 13 дорог будут вести к другим деревням.

Итого получается 17 деревьев

Ответ: 17 деревьев.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \\ -1 \leq x+y-2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y) \geq x^2+y^2 \\ 2 \leq 2(x+y) \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2+y^2 \leq 6.$$

Если в целых числах есть всего 3 способа как это возможно

( $x$  и  $y$  в данном уравнении взаимозаменяемы т.е. <sup>их можно</sup> поменять местами

и ноль ничего не изменится):  $0+1 \leq 6$   $1+1 \leq 6$   
 $0+4 \leq 6$   $0+0 \leq 6$   
 $1+4 \leq 6$ .

Значит возможные значения  $x$  и  $y$  будут <sup>(0;0);(1;±1)</sup> (0;±1); (0;±2); (±1;±2).

Подставляя значения в уравнение получим, что <sup>они</sup> подходят пары (0;1), (0;2) и (1;2) (и наоборот)

Ответ: (0;1); (0;2); (1;2) и наоборот.



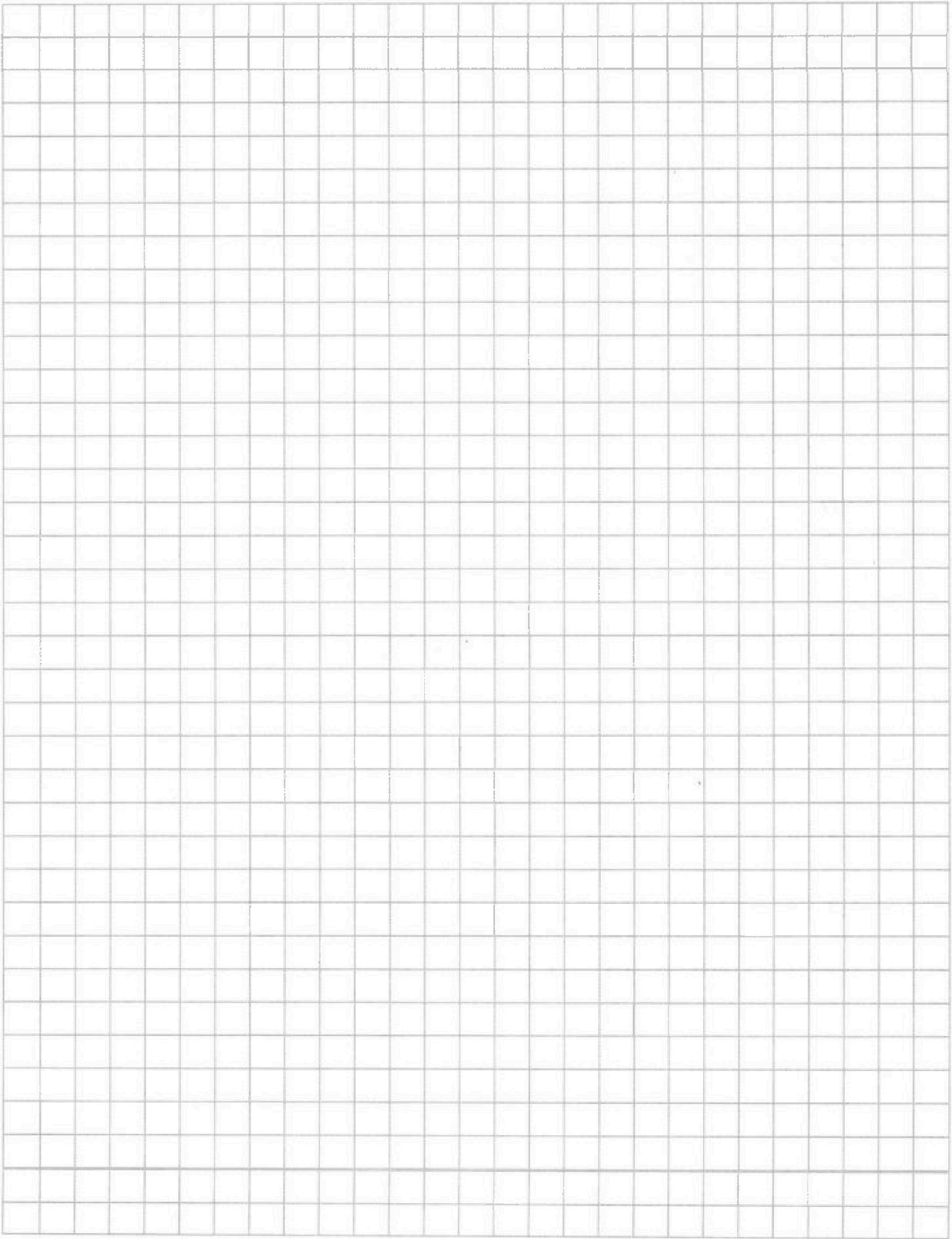


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\square \square \square$   
 $\square \square \square$   
 $\square \square \square$   
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$   
 $\sin = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{15}}{4}$   
 $a = -\frac{1}{4}c$   
 $a^2 + \frac{1}{16}c^2 + b^2 = c^2$   
 $b = \frac{\sqrt{15}}{4}c$

$\cos 2\alpha$   
 $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$   
 $\cos(180^\circ - 2\angle CAN)$

$\frac{4}{2x} = \frac{10}{5x} = \frac{5x}{12}$   
 $x = 5$   
 $x = \sqrt{5}$

$180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 2\angle 1$   
 $180^\circ - 2\angle 1$   
 $180^\circ - 3\angle 1$   
 $180^\circ + 180^\circ - 4\angle 1 + x = 180^\circ$   
 $180^\circ - 4\angle 1 = -x$   
 $x = 4\angle 1 - 180^\circ$   
 $\frac{1}{2}x = 2\angle 1 - 90^\circ$

$2x + 2y - x^2 - y^2$

$a = \frac{2a^2}{c}$   
 $a = \frac{c}{\sqrt{5}}$

Handwritten diagrams include:
 

- Geometric figures with points A, B, C, D, H, M, N.
- A circle with a vertical diameter and a horizontal diameter.
- Various triangles and quadrilaterals with angle markings and side labels.
- Coordinate systems and vector diagrams.
- Grid-based sketches of geometric shapes.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{5}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

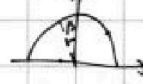
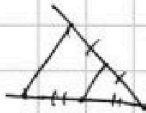
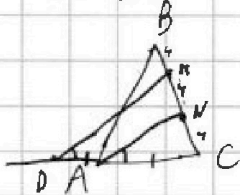
$$D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

$$4t^2 < 16$$

$$t^2 < 4$$

$$t \in (-2; 2)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5 = 544$$



$$a+b=40$$

$$a=40-b$$

$$b=40-a$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(40-2b)^2 + 15(40-2b) = 17p^5$$

$$2200 - 190b + 4b^2 = 17p^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 17p^5$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 4b^2 - 190b + 2200$$

$$4(a-b)(a+b)$$

$$16a(a-b) - 130a + 190b - 1200 = 0$$

$$320a - 640 - 130a + 190b - 1200 = 0$$

$$a = 15 \cdot 4$$

$$b = 34 \cdot 95 \cdot 36$$

$$a-b=1$$

$$a=b+1$$

$$2b+1=40$$

$$a-b+15=1$$

$$a-b+15=-1$$

$$a+b=40$$

$$2a=40$$

$$17 \cdot 32 = 544$$

$$2a=6$$

$$3x^2 + 2x + 4 = 0$$

D

$$x^2 + 5x + 34 = 0$$

$$D = 25 - 136 = -111$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{-111}}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{-111}}{2} = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4 = c$$

$$x_1 + x_2 = -5 = -b$$

$$a+b=c^2$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{4}c$$

$$b = \frac{1}{16}$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{-5 + 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -2.5 = -\frac{b}{a}$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17p^5$$

$$(40-2b)(55-2b) = 17p^5$$

$$2a-40=10$$

$$2a-40=10$$

$$t(t+15) = 17p^5$$

$$a-b+15=17$$

$$a=17$$

$$2b+2=40$$

$$b+1=20$$

$$b=19$$

$$a=17$$

$$9 \cdot 81$$

$$27$$

$$243$$

$$243$$

$$17$$

$$1701$$

$$\frac{243}{4 \cdot 17}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

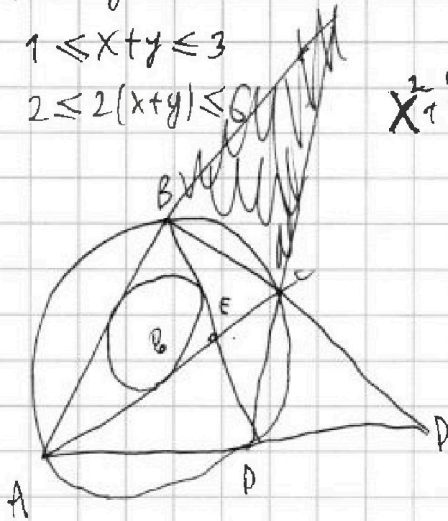
$$1-|x+y-2| \geq 0$$

$$|x+y-2| \leq 1$$

$$-1 \leq x+y-2 \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$2 \leq 2(x+y) \leq 6$$



$$2(x+y) \geq x^2+y^2$$

$$x^2+y^2 \leq 2(x+y)$$

$$x^2+2x+y^2+2y$$

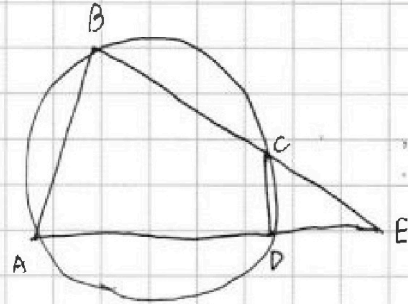
$$x(x+2)+y(y+2) \geq 2(x^2+y^2)$$



$$x^2+y^2 \leq 6$$

$$2+1$$

$$x^2+y^2 \leq 6$$



$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{matrix} x^2+y^2 \\ 0+1 & 1+2 \\ 0+2 \end{matrix}$$

