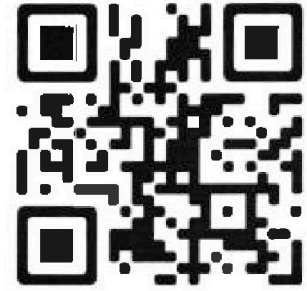




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle \overset{CAN}{CEM}) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{t}x + 9t^2 - 9 = 0$$

т.к. есть два различных действительных корня, то $D > 0$. То

$$(4\sqrt{t})^2 - 4 \cdot 9 \cdot (t^2 - 1) > 0$$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

$$36 - 4t^2 > 0$$

$$36 > 4t^2$$

$$9 > t^2. \text{ Тогда } |t| < 3.$$

Корни различные, их произведение положительное, тогда по теореме Виета:

$$x_1 x_2 = 9t^2 - 9 > 0, \text{ то } x_1 x_2 = 9(t^2 - 1) > 0$$

$$9(t^2 - 1) > 0 \text{ тогда и } t^2 - 1 > 0. \text{ Тогда } |t| > 1.$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} |t| < 3 \\ |t| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 1 < t < 3 \\ -1 > t > -3 \end{cases}$$



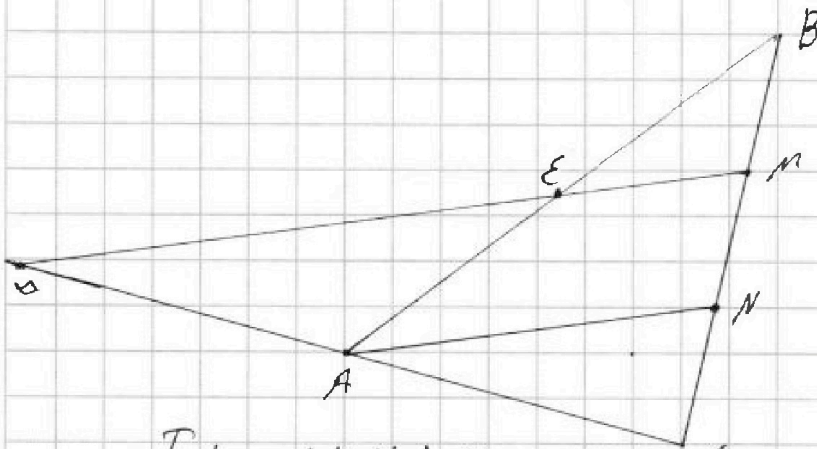
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Пусть точки отмечены так, что $BM = MN = NC = \frac{BC}{2}$.
(иначе не возмозжно)
 $BC = 6$, то $BM = MN = NC = 2$.



Т.к $AN \parallel DM$, $A, D \in BC$; $M, N \in BC$, то по теореме Фалеса $\frac{MN}{NC} = \frac{AD}{AC}$. Т.к $MN = NC$, то и $AD = AC$. Пусть $MD \cap AB = E$. Известно, что $CD = AB$. Пусть $AD = AC = x$, то $CD = AB = 2x$. Пусть $BE = y$. Тогда для $\triangle ABC$ и прямой MD по теореме Менелая: $\frac{ML}{BM} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{DA}{DC} = 1$. Подставив, получим:
 $\frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2x-y} \cdot \frac{1}{2} = 1$. То $\frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2x-y} = 2$, тогда $y = 2x - y$, $y = x$. Тогда $AE = BE = 2x$. Тогда для $\triangle ABC$ $\frac{AB}{AC} = 2$. Но и $\frac{AN}{NC} = 2$. Пусть высота, проведенная из A к BC AK . Тогда $S_{ANL} = \frac{1}{2} AN \cdot NL$; $S_{ABN} = \frac{1}{2} AN \cdot BN$. Тогда $S_{ABN} = 2 S_{ANL}$. Но $S_{ANL} = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle NAL \cdot AN \cdot AC$, $S_{ABN} = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle BAN \cdot AB \cdot AN$. Но $\angle BAC < 180^\circ$, тогда $\angle BAN = \angle NAL$, AN — биссектриса. То в $\triangle ABC$ по теореме Косинусов:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \cos \angle BAC \cdot AB \cdot AC$$

$$36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot \cos 2\angle CAN \cdot x \cdot 2x$$

$$36 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$36 = 5x^2 + 3x^2$$

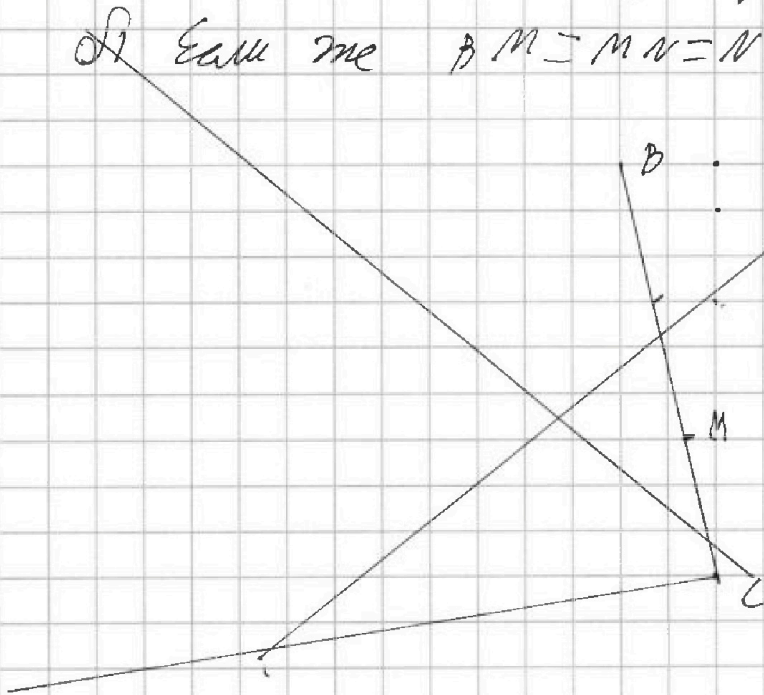
$$36 = 8x^2$$

$$9 = 2x^2$$

$$x^2 = 4,5$$

$$x > 0, \text{ то } x = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ то } AB = 2x = 3\sqrt{2}$$

Если же $BM = MN = NC = \frac{BC}{2}$, то $BM = MN = NC = 4$.



Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

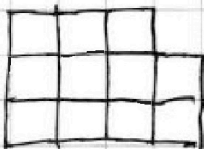
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. всего в массе 12 пар, а учеников 11, то одна из пар будет пустой.

Необходимо рассмотреть случаи, когда пустует 1, 2 или 3 пара. При этом у всех учеников x самое низкое значение высоты h 1 дм.

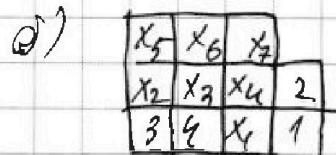
Если пустует на одном из n рядов 3 пара:



В этом случае ученик 1 всегда будет сидеть на 1 паре. Если же 1 сидит 2 и они сидят на ряду из 2 пар, то всего два варианта:



$$\begin{aligned} x_4 &> 4 \\ x_6 &> x_3 > x_1 \\ x_5 &> x_4 > x_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_5 &> x_2 > 3 \\ x_6 &> x_3 > 4 \\ x_7 &> x_4 > x_1 \end{aligned}$$

Если ~~$x_7=5$~~ , то для остальных рядов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

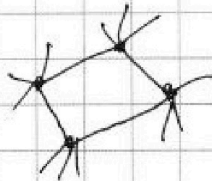
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть из x деревьев всего на острове, тогда из $(x-4)$ выкосят по одной вершине. Т.к все деревья связаны, то мы получаем граф с x вершинами и $(x-4) + 5 + 6 + 7 + 9$ ребрами.

Т.к каждая вершина имеет 4 ребра, то получаем:

2 Пусть из каждой вершины в каждую сторону выкосят, что исключает лишние конструкции:



Рассмотрим, как могут быть расположены 4 дерева:

a)

- из 2 деревьев, каждое имеет степень равную 2 деревьям; из 2 - 2.

В этом случае 4 дерева связаны 38 ребрами, т.к из оставшихся деревьев идет только по одной вершине, следовательно $4n$ с n из 4 деревьев, то $4n = 38 + 2n$, т.е $2n = 38$, $n = 19$, т.е $x = 19 + 4 = 23$ деревьев.



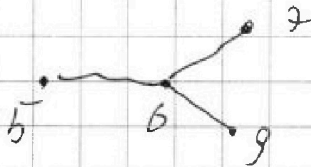
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

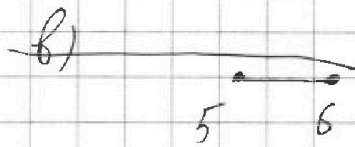
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б)



Из 1 дерева в стержень
Самые 1 цвет 3 дерева в группе. Тогда



всего в оставшиеся деревья

цвет $5 + 6 + 7 + 9 - 3 = x - 4$

дерева $x = 28$.

Тогда $x = 28$ — один вариант.

Ответ: 28 деревьев.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

Используемая при решении задачи координатная плоскость. Для того, чтобы целые числа давали положительное значение, т.е.

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x-y-1| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-x^2-1+1-2y-y^2+1-1 \geq 0 & (1) \\ 1 \geq |x-y-1| & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1):

$$2x-x^2-1+1-2y-y^2+1-1 \geq 0$$

$$1+1 \geq x^2-2x+1+y^2+2y+1$$

$$2 \geq (x-1)^2 + (y+1)^2 - \text{уравнение окружности}$$

Тогда точка центра принадлежит кругу с центром в $O(1; -1)$ и радиусом $k = \sqrt{2}$.

Рассмотрим (2). Если $1 = |x-y-1|$, то

$$\begin{cases} 1 = x-y-1, \text{ если } x-y-1 \geq 0 \\ 1 = 1+y-x, \text{ если } x-y-1 < 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

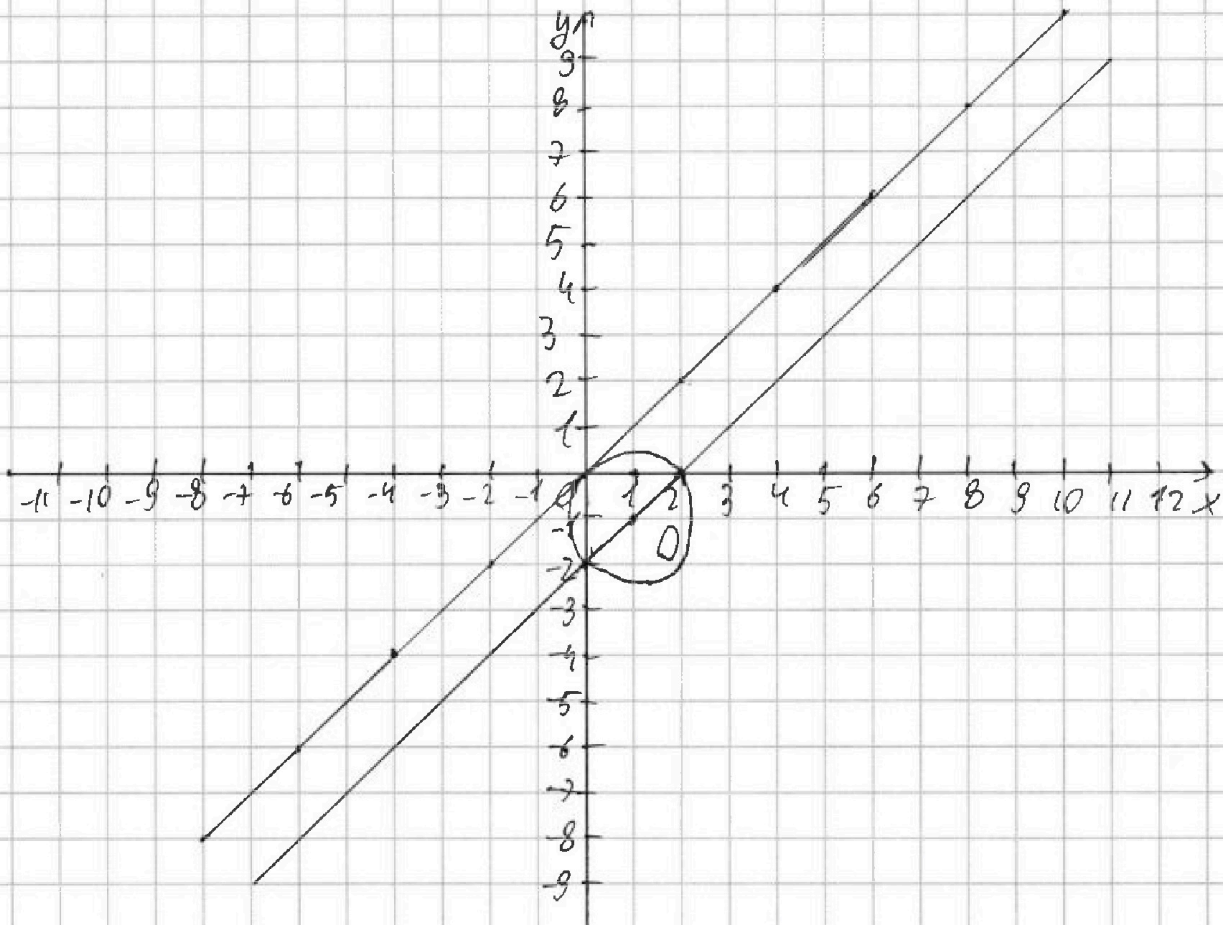
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

76

~~$y = x$, если $y \leq x - 1$~~

$y = x - 2$, при $y \leq x - 1$ — это выполняется всегда
 $y = x$, при $x - 1 < y$ — Но тогда $x - 1 < x$ — тоже выполняется всегда.

Тогда $1 - |x - y| > 0$ — это "полоса", ограниченная $y = x - 2$ и $y = x$.



Одновременно прикажетая полоса и кругу



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 точек с целыми координатами!

~~$(0,0), (1,0), (2,0), (-1,0), (-2,0),$~~

$(0,0), (1,0), (2,0), (0,-1), (-2,0), (1,-1).$

4 из этих точек таковы, что лежат и на ограничивающей прямой, и на окружности одновременно. Это значит, что оба квадратичных выражения равны 0, тогда и сумма равна 0, что и верно. Тогда осталось проверить две точки: $(0,-1)$ и $(1,0)$.
Для первой точки:

$$\sqrt{0+2-0-1} + \sqrt{1-1+1-1} = \sqrt{1} - \sqrt{1-0} = 2\sqrt{1} = 2$$

эта точка подходит. Для второй пары x, y :

$$\sqrt{2-0-1-0} + \sqrt{1-1+0-1} = \sqrt{1} + \sqrt{1-0} =$$

$2\sqrt{1} = 2$. Также подходит. Тогда

Ответ: $(0,-1)$ и $(1,0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a - b = 12$, при этом $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда это числа одной четности, ведь сумма и разность чисел одной четности всегда четна.

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4, \text{ тогда представим:}$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4. \text{ Т.к. } ab \text{ будет}$$

всегда четна, то и $(a+b)^2$ и $3(a+b)$,

а значит $(a+b)^2 + 3(a+b) -$ четно. $19p^4$

будет четно, только если $p=2$, т.к. p - простое

число, наименьшее простое число это 2.

Тогда, подставив в выражение из условия:

$$a = b + 12$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19 \cdot 2^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$4b^2 + 30b + 240 + 12 \cdot 15 = 19 \cdot 16$$

$$4b^2 + 30b + 180 - 304 = 0$$

$$4b^2 + 30b - 124 = 0$$

$$2b^2 + 15b - 62 = 0$$

$$2b^2 + 31b - 62 = 0$$

$$2(2b+31) - 2(2b+31) = 0$$

$$(b-2)(2b+31) = 0$$

Т.к. $b \in \mathbb{N}$, $b > 0$, то $b=2$, $a = b + 12 = 14$.

Ответ: $a = 14$, $b = 2$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 15 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 19 \\ 16 \\ \hline 114 \\ 19 \\ \hline 304 \end{array}$$

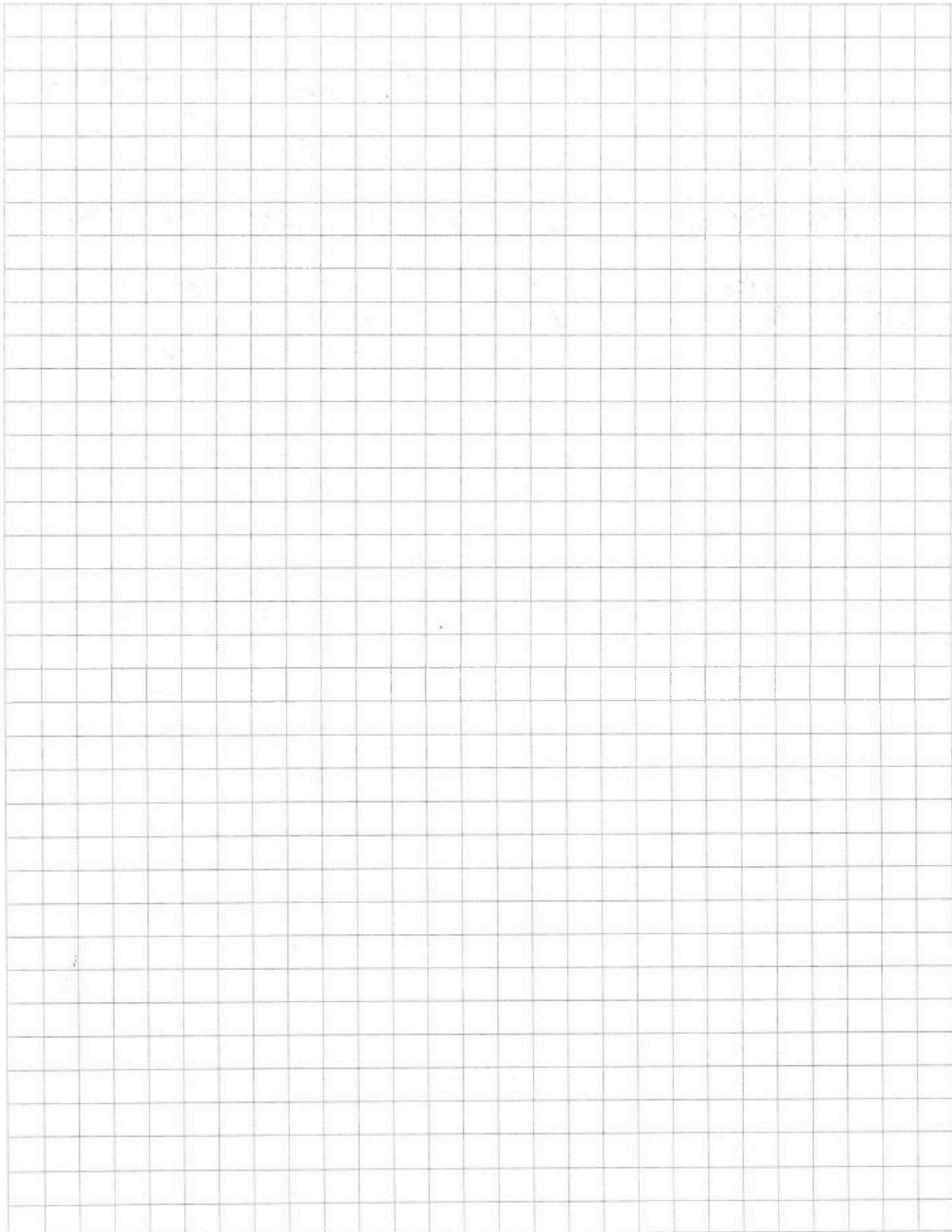


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1 - 2xy - |x-y-1|^2 + 1 - x - y - 1}{\sqrt{1 - 2xy - |x-y-1|^2 + 1 - x - y - 1}}$$

$$2x^2 - 2y - x^2 - y^2 > 0$$

$$2x^2 - x^2 - 1 + 1 - 2y - y^2 - 1 + 1 > 0$$

$$x^2 > (x-1)^2 + (y+1)^2$$

$$r = 12 \cdot \cos \alpha - r \cdot \sin \alpha$$

$$r(1 + \sin \alpha) = 12 - \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$12(1 + \sin \alpha) \cdot \frac{12 - \cos \alpha}{12 \cdot \cos \alpha}$$

$$x = R$$

$$R - x^2 = R$$

$$r = \frac{2}{1} \cdot \frac{R - x^2}{R} \cdot x$$

$$r = \frac{2}{1} \cdot \frac{R - x^2}{R} \cdot \frac{2}{h}$$

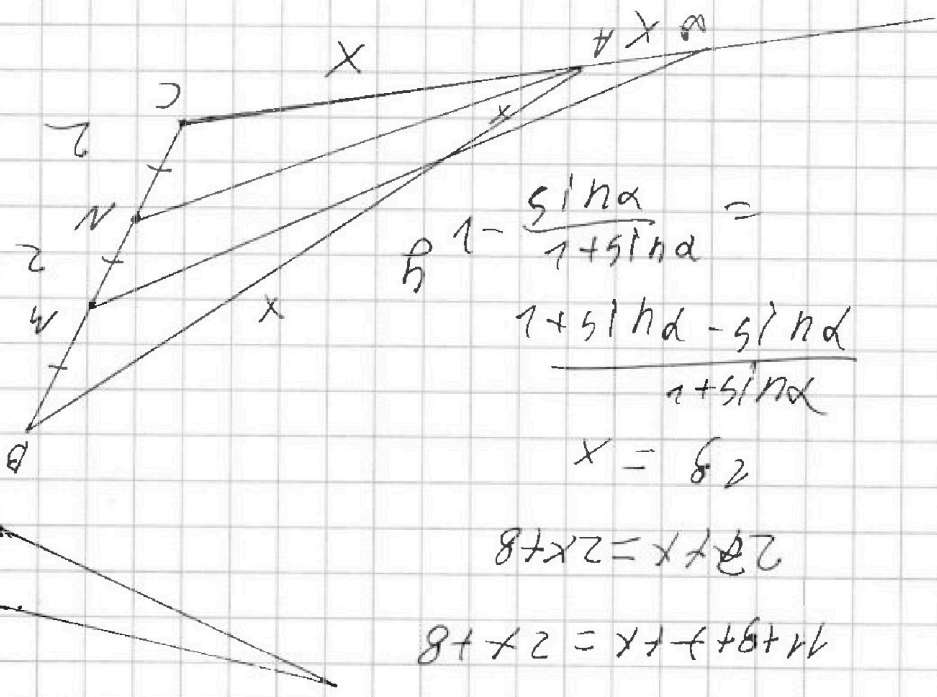
$$12(1 + \sin \alpha) \left(1 - \frac{r}{12 \cos \alpha} \right)$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 0$$

$$2x - x^2 + 1 - 1 - 2y - y^2 - 1 + 1 = 0$$

10	9	8
8	5	9
8	6	0

10	11	8
8	6	0



$$R \left(1 - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right) = \frac{1 + \sin \alpha - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$x = 8$$

$$8 + x = 2x + 8$$

$$8 + x + 8 = x + 8 + 8$$

$$5 + 6 + 7 + 8 + x = 2(x + 4)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (t^2 - 1) =$$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2$$

$$36 > 4t^2$$

$$9 > t^2$$

$$3 > |t|$$

$$1 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1}) -$$

$$1 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1}) -$$

$$= 2 + 2 - 2\sqrt{1} - \sqrt{1} =$$

$$2\sqrt{3} + 1b - 4b - 62 =$$

$$K(2b+31) - 2(2b+31)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + (3a+3b) = 19p^4$$

\sqrt{ab}

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$a = b + 12$$

Однотипные. Тогда

$$(a+b) - \text{четно}$$

$$19p^4 = 19 \cdot 16$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19 \cdot 16$$

$$(b+12+b)(b+12+b+3) = 19 \cdot 16$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$x_1, x_2 = 9(t^2 - 9) > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$2\sqrt{3} - 4 - 1\sqrt{3} - 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$1 > |x - y - 1|$
 $2x - 2y - x^2 - y^2 > 0$
 $2x - x^2 > y^2 + 2y$
 $x(2 - x) > y(y + 2)$
 $2x - x^2 - 1 + 1 - 2y - y^2 - 1 + 1 \geq 0$
 $1 = 1 + y - x$
 $-(x - 1)^2 + 1 - (y + 1)^2 + 1 \geq 0$
 $y = x$
 $2 \geq (x - 1)^2 + (y + 1)^2$
 $(x - y - 1)^2 =$
 $x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$
 $(x - y - 1)(x - y - 1) =$
 $x^2 - x - xy - xy - x^2 - y^2 - 1$
 $ax + by = c$
 $2x - 2y - x^2 - y^2 = 0$
 $1 - |x - y - 1|$
 $1 + \sqrt{2} - 2 + 2 - 2 = \sqrt{2}$
 $1 - \sqrt{2}$
 $1 - |2 - 1|$
 $2x - 2y - x^2 - y^2$

$1 > |x - y - 1| \geq 0$
 $1 - |x - y - 1| \geq 0$
 $1 \geq |x - y - 1|$
 $1 = x - y - 1$
 $2 = x - y$
 $1 + \sqrt{2} - 2 + 2 - 2 = \sqrt{2}$
 $1 - \sqrt{2}$
 $1 - |2 - 1|$
 $2x - 2y - x^2 - y^2$

