



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть d - разность прогрессии, тогда

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2 \quad | :2 \\ (x^2 + 2x)^2 + 4d = 3x^2 \end{cases}$$

$$6x + 6 - (x^2 + 2x)^2 = 2(x^2 + 2x)^2 - 3x^2$$

$$2x + 2 = (x^2 + 2x)^2 - x^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$ - корень

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1$$

$$2(1 - 2x^2) \cdot (x+1) = (x+1)(x-1)x^2$$

$$(x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \pm \sqrt{3} - 1$$

Ответ: $-1; \pm\sqrt{3} - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

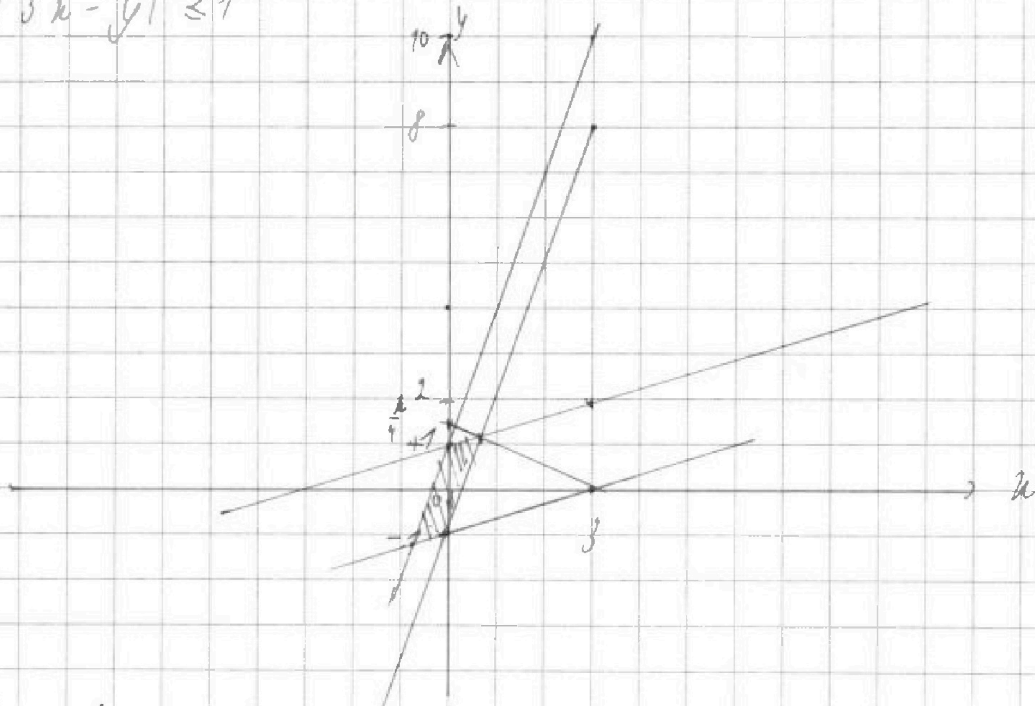
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $4y - 8x = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{4}$

Найдем множество точек на координатной плоскости

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 7 \end{cases}$$



Для прямой $y = -2x$ параллельно находим
ту прямую при которой она еще пересекает множество
и пересекает ось Oy в наибольшей точке $(0; \frac{k}{4})$

прямая $y = -2x + \frac{k}{4}$ проходит через n пересечения

$y = 3x - 7$ и $y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 1 \Rightarrow$ точка

пересечения $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$; $\frac{5}{4} = -2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{k}{4} \Rightarrow$

$k = 8 \quad k = 11$

Ответ: $8 \leq k < 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - \varphi m - \varphi n = (m+n-\varphi)(m+n) = 13p^2$$

φ - простое число

$$m+n-\varphi < m+n \quad \text{при} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

2) несколько случаев

неподходит: $(m+n=10); A=10 \rightarrow$

неподходит: $m+n=22 \neq p^2 \rightarrow$

неподходит: $m+n = 13(m+n-\varphi)$

$$\varphi = \frac{12(m+n)}{13} \geq 2$$

$m+n-\varphi$	$m+n$
1	$13p^2$
13	p^2
p	$13p$
p^2	13

подходит $m+n=13$

$$p^2=4; p=2$$

$$A=52$$

5. 2

$$B = m^2n + mn^2 - \sqrt{mn} = (m+n-\sqrt{3})mn = 10mn = 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} g^2$$

2) $\varphi = 2$ число простое $75g^2 \nmid 70$, не

одно решение на 10 м.к. равно 10 м.к.

$$mk = 5 \cdot 2 \cdot 3; mn = 13 \Rightarrow m = 10 \quad \text{или} \quad \frac{A=3}{n=10}$$

$$n = 3$$

Ответ: $(10; 3); (3; 10)$

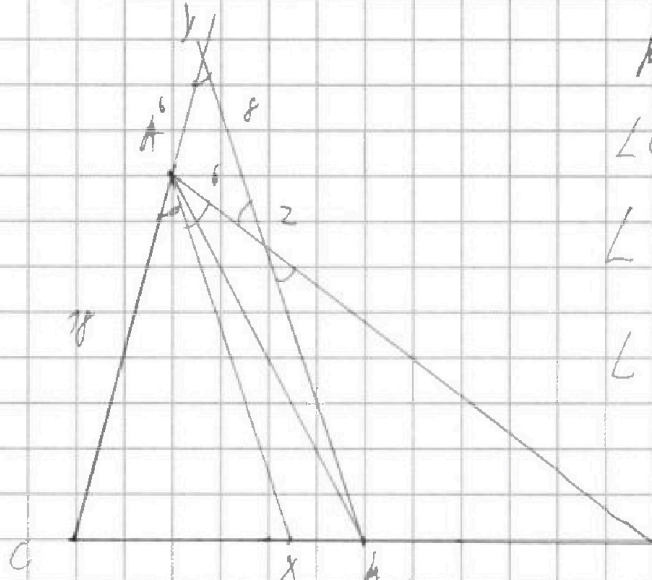


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т. к. AX биссектриса
 $\angle CAX = \angle BAX = \alpha$
 $\angle CAX = \angle CYZ$ как
 соответственные
 $\angle BAX = \angle AZY$ как
 накрест лежащие 2)
 MN параллельна

$\triangle AYZ$ - равнобедренный $AY = AZ = 6$

По т. косинусов:

$$BC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}; \quad \cos \angle CAB = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{3}$$

По т. Менелая ($\triangle ABC$; YMN -прямая)

$$\frac{b}{2A} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1 \Rightarrow b \cdot 2 = \frac{6(1+6)}{6} \Rightarrow 24 \Rightarrow AB = 12$$

По т. косинусов ($\triangle ABC$)

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC} = \sqrt{18^2 + 36^2 + \frac{2}{3} \cdot 18 \cdot 36} = \sqrt{324 + 900 + 222} = \sqrt{1446}$$

Ответ: $\sqrt{1446}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

из второго уравнения $x, y \geq 0$, а также $x \neq y$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y}$$

пусть $\sqrt{x+1} = a$; $\sqrt{6-y} = b$, тогда

$$b^2 + a^2 = 57; \quad ab = \sqrt{6+5x-y-x^2}$$

$$\cancel{a+b} + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} = \cancel{x} ab$$

$$a-b + 5 = 2ab$$

$$a+b + (a-b)^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b = -2 \\ a-b = 1 \end{cases}; \quad a-b$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = -2$$

$$x+1 = 1 - 2\sqrt{6-y} + 6-y$$

$$x+1 = 4 - 4\sqrt{6-y} + 6-y$$

$$2x - 5 = -2\sqrt{6-y}$$

$$2x-9 = -4\sqrt{6-y}$$

$$y - 6 + x^2 = 6 - y$$

$$4x^2 - 36x + 81 = 16 - 9y$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$4x^2 - 36x + 81 = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = 73$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

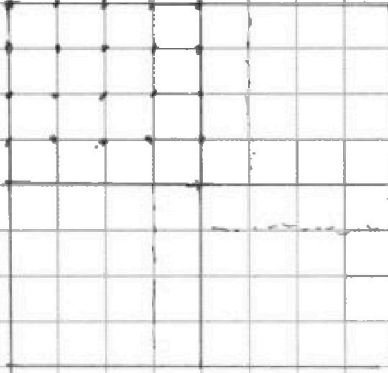


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Если одна из крайних точек
точка в центре, то вторая
может быть на любой
линии в одной из центр
секторов (на рисунке

представлен один из секторов; при повороте
на 90° , 180° , 270° сектора выстраиваются, т.к.

квадрат симметричен повороту на 90° , поэтому
считая как-то можно в одной из секторов!

4.5 (20)

2) для каждой из точек можно рассмотреть в один
секторе $20 \cdot 19 = 380$

3) точки в вершилах смежных секторов

$$20 \cdot 20 = 400$$

↑
одно
на одно

4) в диагональных секторах

$$\frac{20 \cdot 20}{2} = 200$$

$$200 + 400 + 400 = 1000$$

Ответ: 1000



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 2x^2(2x + 2)$$

$$(1 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (x + 1) = \frac{2x^4}{x+1} \cdot x^2$$

$$2 - 4x^2 = \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 5x^2 + 4x}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^3 - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x^2 + 2x - 2)$$

x

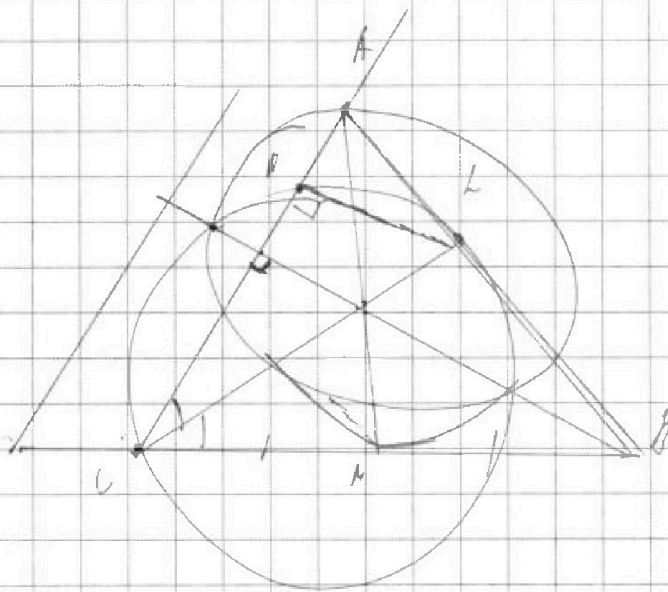


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



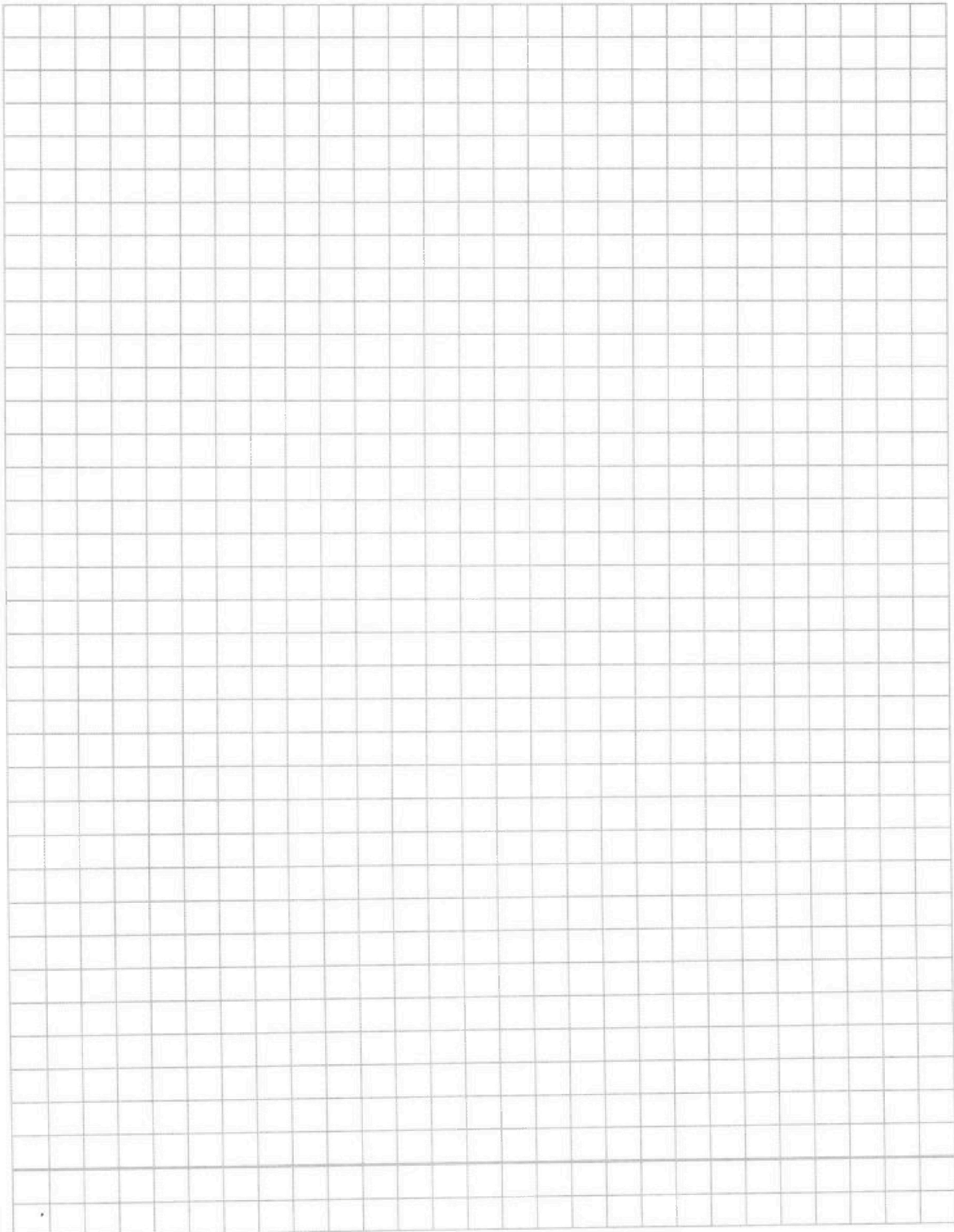


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{h}{a} = \frac{h}{a}$
 $\frac{h}{b} = \frac{h}{b}$
 $\frac{h}{c} = \frac{h}{c}$
 $\frac{h}{a} = \frac{h}{b}$
 $\frac{h}{b} = \frac{h}{c}$
 $\frac{h}{c} = \frac{h}{a}$
 $\frac{h}{a} = \frac{h}{b}$
 $\frac{h}{b} = \frac{h}{c}$
 $\frac{h}{c} = \frac{h}{a}$

$\frac{BM}{MC} = \frac{OM}{MI}$
 $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ}{ZB}$

$\frac{d}{c} = \frac{c}{d} = \frac{h + d}{a} = \frac{b + d}{a}$
 $\frac{b + d}{c} = \frac{a}{b} = \frac{2c - d}{c}$
 $l - \frac{a}{b + d} = \frac{a}{b}$
 $l = a \left(\frac{1}{b + d} + \frac{1}{b} \right)$
 $l = a \frac{2b + d}{b}$

$\frac{b^2}{b} + \frac{(b + d)^2}{b} = \frac{b^2 + b(b + d) + (b + d)^2}{b} = \frac{b^2 + b^2 + bd + b^2 + 2bd + d^2}{b} = \frac{3b^2 + 3bd + d^2}{b}$
 $2b^2 + 2bd = a^2 + 2ba$

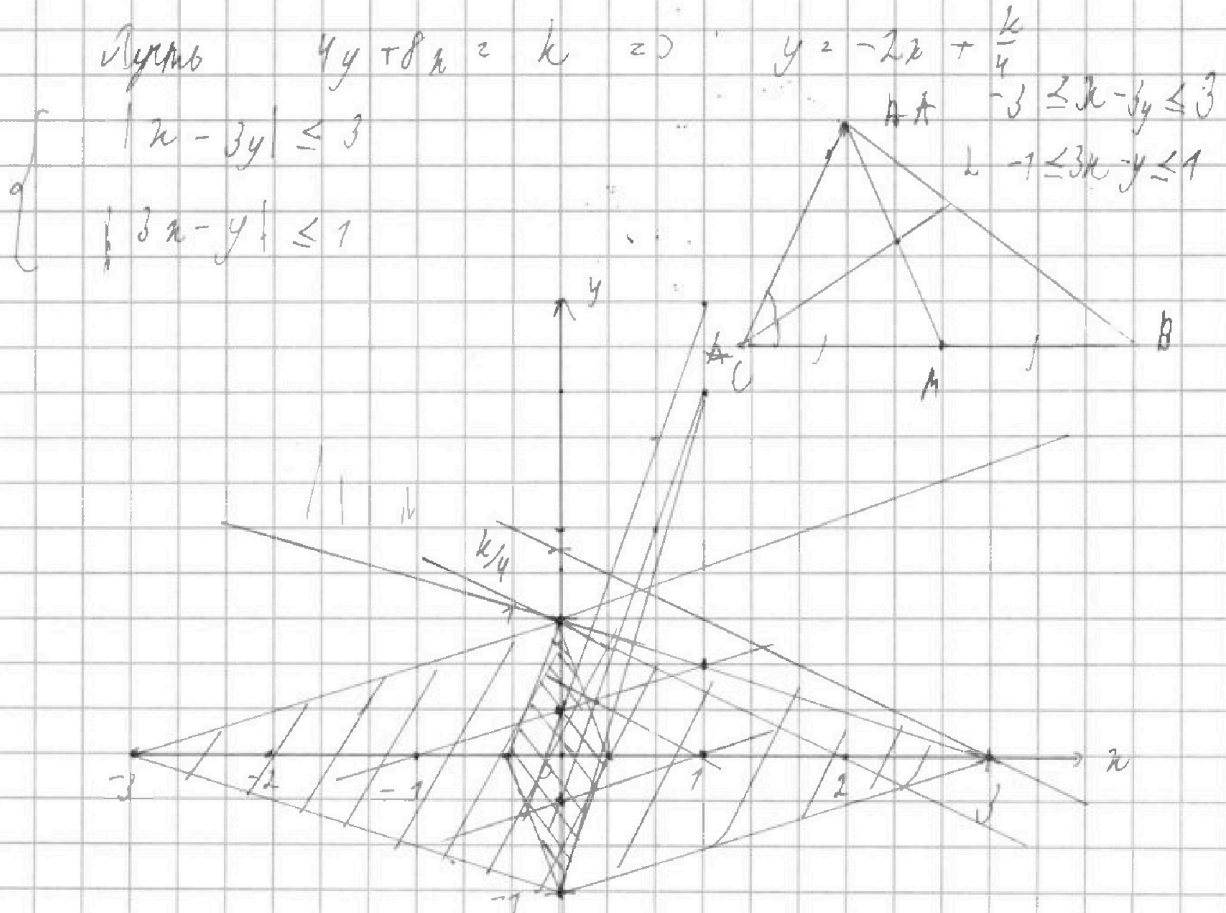


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На координатной плоскости нарисованы множество
 уравняющие первую и вторую уравнению
 системы где их пересечение — множество второго
 уравнения $8x = 8$ $k = \frac{3}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

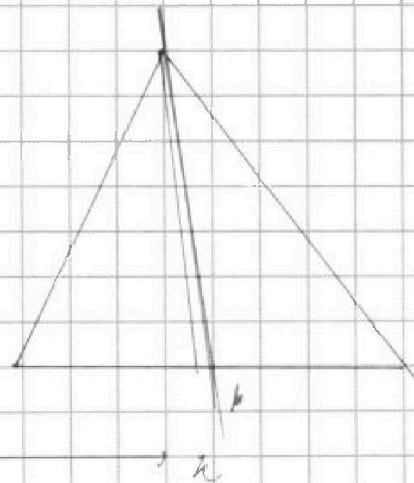
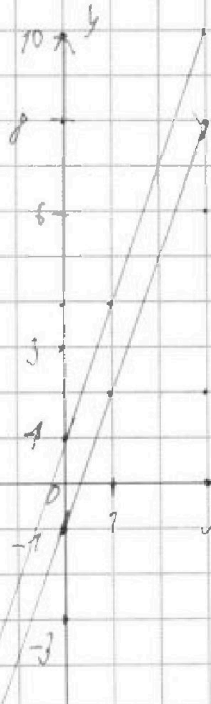
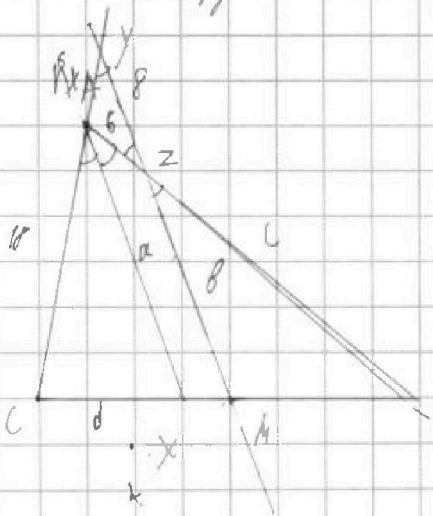
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $4y + 3x = k \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{k}{4}$
 Нарисуем множество $\begin{cases} |x - by| \leq 3 \\ |bx - y| \leq 1 \end{cases}$ на

координатах ~~эти~~ плоскости



78
 $78+11$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n) = 78 \cdot 2$$

$$B = m \cdot n \cdot (m+n-9) = \quad m+n = (m+n-9)/-1$$

$$k^2 - k - 11 = 0$$

$$k^2 + k - 11 = 0$$

