



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$x = \sqrt{3} - 1: \quad a_3 = 3x + 3 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1) + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (\sqrt{3} - 1))^2 = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 8 - 6\sqrt{3} \quad \text{и} \quad a_5 - a_3 = 4 - 3\sqrt{3} \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d,$$

$$a_5 - a_3 = 2d \quad \text{или} \quad d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{так } 4d = 8 - 3\sqrt{3} \cdot 4 = 8 - 6\sqrt{3} = a_9 - a_5)$$

$$2d = (2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cdot 2 = 4 - 3\sqrt{3} = a_5 - a_3 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1 \quad \text{подходит}$$

под условие (по Зам. 1)

$$x = -(\sqrt{3} + 1): \quad a_3 = (-\sqrt{3} - 1) \cdot 3 + 3 = -3\sqrt{3} \quad \text{или} \quad a_3 = 3x + 3, \quad x = -\sqrt{3} - 1$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((-\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (-\sqrt{3} - 1))^2 = (4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(-\sqrt{3} - 1)^2 = 3 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 + 6\sqrt{3} - 4 = 8 + 6\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a_9 - a_5 = 4d, \quad a_5 - a_3 = 2d \quad \text{или}$$

$$a_5 - a_3 = 4 - (-3\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$d = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{так } 4d = 4 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 8 + 6\sqrt{3}; \quad 2d = 2 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 4 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3} - 1 \quad \text{подходит под условие (по Зам. 1)}$$

Итак, мы получили, что под условие могут подходить лишь $x = -1$, $x = -\sqrt{3} - 1$ и $x = \sqrt{3} - 1$, и все эти числа подходят

Ответ: $-\sqrt{3} - 1$; -1 ; $\sqrt{3} - 1$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия из условия с шагом d . Тогда числа a_3, a_5 и a_9 являются $b \in \{a_n\}$
 $\Leftrightarrow a_5 - a_3 = 2d, a_9 - a_5 = 4d$ при некотором шаге d . (Знаб.!)

по усл.:
$$\begin{cases} a_3 = 3x+3 \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 &= 2d \\ a_9 - a_5 &= 4d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_5 - a_3 = (x^2+2x)^2 - (3x+3) \\ a_9 - a_5 = 3x^2 - (x^2+2x)^2 \\ a_5 - a_3 = 2d \\ a_9 - a_5 = 4d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2 \cdot ((x^2+2x)^2 - (3x+3))$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2 \cdot (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)^2(x^2+2x-2)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \cdot (x^2+2x-2) = 0$$

~~$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$~~

$$\text{мк. } x^2+2x-2 = (x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1))$$

$$(x+1)^2(x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1)) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt{3}-1 \\ x = -\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

$$x = -1: a_3 = 3x+3 = 0$$

$$a_5 = (x^2+2x)^2 = (-1-2)^2 = 1$$

$$a_9 = 3 \cdot x^2 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

$$a_9 - a_5 = 2, a_5 - a_3 = 1 \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d \text{ и } a_5 - a_3 = 2d \text{ при } d = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -1$ удовлетворяет условию (по Знаб.!)

$$\begin{aligned} *! (x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1)) &= \\ &= (x^2 - (\sqrt{3}-1+(-\sqrt{3}-1))x + \\ &+ (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1)) = (x^2+2x- \\ &- (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)) = x^2+2x-1 = \\ &= x^2+2x-2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 Запись $C \geq A \geq B$ означает, что $\begin{cases} C \geq A \\ A \geq B. \end{cases}$

Запись $C \leq A \leq B$ означает, что $\begin{cases} C \leq A \\ A \leq B \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x-3y \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

(слоним кер-ва) $\Rightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4+2x+2y \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \text{ (слоним кер-ва)} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 8x+4y \leq 8 \cdot \frac{3}{4} +$$

$$+ 4 \cdot 1\frac{1}{4} = 6 + 5 = 11. \Rightarrow 8x+4y \leq 11$$

Заметим, что $8x+4y=11$ при $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$, и это

$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$ подходит под условие:

$$|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - 3 \cdot 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = \left| -\frac{12}{4} \right| = 3$$

$$|3x-y| = \left| 3 \cdot \frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } x = \frac{3}{4} \text{ и } y = 1\frac{1}{4}, \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

также x и y удовлетворяют условию задачи.

Итак, мы показали, что $8x+4y \leq 11$ и приведем

пример $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$, при котором x и y подходят под

условие и $8x+4y=11 \Rightarrow$ наибольшее возможное значение $8x+4y$ равно 11.

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{cases}, \text{ но } \overset{\text{если}}{m+n=39}, \text{ то } (m+n-9)=30 \neq 3. \Rightarrow$$

\Rightarrow противоречие \Rightarrow система $\begin{cases} m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{cases}$ не имеет решений \Rightarrow совокупность (1) не имеет решений \Rightarrow
 \Rightarrow при $p \neq 3$ нет решений

Если $p \neq 3$: тогда $(m+n)/3, \text{ н.к. } (m+n)(m+n-9)=13p^2, 13p^2/3.$

Значит, $(m+n; m+n-9)=1$ (н.р. $\text{НОД}(m+n; m+n-9)=1$)

$$(m+n)(m+n-9)=13p^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13p^2 \end{cases}$$

Если $\begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13p^2 \end{cases}$, то $\begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=-8 \end{cases}$ очевидно

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases}$$

максимальная система не имеет решений

$$\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$$

Если $\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases}$, то $m+n=13, m+n-9=4$

$$\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$$

$m+n-9=p^2$, что, очевидно, верно лишь

при $\begin{cases} p=2 \\ m+n=13 \end{cases}$ (p -простое, н.к. 2-простое)

Если $\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$, то $m+n=10$ и $m+n=13p^2$, что, очевидно,

невозможно. Если же $\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$, то $m+n=22$ и $m+n=p^2$, что, очевидно, невозможно.

\Downarrow
В случае $A=13p^2$ и $B=75q^2$ решения есть лишь при $m+n=13$ и $p=2$.

$$B = mn(m+n-3)$$

$$\Rightarrow mn \cdot (13-3) = 75q^2 \Rightarrow 10mn = 75q^2 \Rightarrow 2mn = 15q^2. \text{ Заметим,}$$

что $(2mn) : 2$, а $15q^2 : 2$ лишь при $q=2 \Rightarrow$ н.к. $2mn = 15q^2$, тогда $q=2$ и $2mn = 15 \cdot 4 \Rightarrow mn = 30$

Итак, мы знаем, что $\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases}$.

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ (13-n)n=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ n^2-13n+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ n=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \\ m=3 \\ n=10 \end{cases}$ Очевидно, пары $(10, 3)$ и $(3, 10)$ подходят,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$ Под записью (a, b) — целые числа, что $\text{НОД}(a, b) = c$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Если $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$:

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases}$$

Таким образом $(m+n)(m+n-9) = 13p^2$.

Если $p=3$: $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$.

Тогда ~~$(m+n) \cdot 9$~~ Тогда, если $(m+n) : 9$ или $(m+n-9) : 9$

$(m+n-9) : 9$, то и $(m+n) : 9$, и $(m+n-9) : 9$, т.е. $(m+n)$.

$(m+n-9) : 81$, но $(m+n)(m+n-9) = 117$, $117 \neq 81$. Кроме-

вопроса $\Rightarrow (m+n) \not\equiv 9$ и $(m+n-9) \not\equiv 9$.

Таким образом $\left[\begin{matrix} (m+n) : 3 \\ (m+n-9) : 3 \end{matrix} \right]$, т.к. $(m+n)(m+n-9) = 117$, $(117 : 9 = 13)$

$\Rightarrow (m+n) : 3$ и $(m+n-9) : 3$, при этом $(m+n) \not\equiv 9$ и $(m+n-9) \not\equiv 9$

$\Leftrightarrow (m+n) : 3$, но $(m+n) \not\equiv 9$.

т.к. m и n — натуральные $\Rightarrow (m+n) \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$(m+n)(m+n-9) = 117$$

\Rightarrow ~~$\begin{cases} m+n=3 \\ m+n-9=39 \end{cases}$~~ $\left[\begin{cases} m+n=3 \\ m+n-9=39 \\ m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{cases} \right]$ — т.к. $(m+n) : 3$ и $(m+n) \not\equiv 9$, и т.к. $117 : (m+n)$

Сумма $\begin{cases} m+n=3 \\ m+n-9=39 \end{cases}$ не имеет решений т.к. m и n — натуральные

(т.к. если $m+n=3$, то $m+n-9 = -6 \neq 39$)

Везде в решении целые числа, что p и q — простые и их натуральность имеет значение, но они простые числа, не обязаны.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. тогда $A = (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4 = 13p^2$, где $p=2$ и

$B = mn \cdot (m+n-3) = 10 \cdot 3 \cdot (10+3-3) = 30 \cdot 10 = 300 = 75 \cdot 4 = 75q^2$,
где $q=2$ ($p=2$ и $q=2$ - простые, м.к. 2-простое число)

Тогда $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$, подберем пары $(3;10)$ и $(10;3)$

~~(3;10)~~ ~~(10;3)~~

Если $\begin{cases} A = 75q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$

Заменим, что $75:3 \Rightarrow$ м.к. $(m+n)(m+n-9) = 75q^2$, но

м.к. q -простое (м.к. и натуральное), то $(m+n):3$ или $(m+n-9):3 \Rightarrow$ и $(m+n):3$ и $(m+n-9):3$ (м.к. $9:3 \Rightarrow 75q^2:9$
м.к. $(m+n)(m+n-9) = 75q^2$. Очевидно, $(75q^2):9$ или при $q=3$
 \Rightarrow при $A=45p^2, B=13p^2, q=3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 9 = 630 + 45 = 675$.

*: м.к. q -простое

Если $(m+n):9$, то и $(m+n-9):9$ (м.к. $9:9$) и если $(m+n-9):9$, то и $(m+n):9 \Rightarrow$ если $(m+n):9$, то $(m+n)(m+n-9):81 \Rightarrow 75q^2:9; 75q^2 = 675$, но $675:81 \Rightarrow (m+n) \neq 9$, но при этом $(m+n):3$ из предыдущей абзаца. Но тогда $(m+n):3, (m+n) \neq 9, (m+n-9):3, (m+n-9):9$ (м.к. или $(m+n):3$, но и $(m+n-9):3$; и м.к. если $(m+n) \neq 9$, то $(m+n-9) \neq 9$ - м.к. $9:3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9):9 \cdot 4$ $(m+n)(m+n-9) \neq 27$. Но $(m+n)(m+n-9) = 675$, а $675:27$ (м.к. $675 = 75 \cdot 9 = 27 \cdot 25$), противоречие \Rightarrow при $A = 75q^2$ и $B = 13p^2$ решений нет

Мы разобрали оба случая ($A = 13p^2$ и $B = 75q^2$; или же $A = 75q^2$ и $B = 13p^2$), и получили, что под условием подберем только пары $(3;10)$ и $(10;3)$ (м.к. в случае $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$ подберем только $(3;10)$ и $(10;3)$, а при $A = 75q^2$ и $B = 13p^2$ нет таких пар $(m;n)$, удовлетворяющих под условие) \Rightarrow
~~Ответ: (3;10) и (10;3).~~ Ответ: $(3;10)$ и $(10;3)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме косинусов в $\triangle AZY$: $YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cdot AZ \cdot AY \cdot \cos \angle YAZ$

$YZ = 8, AZ = 6, AY = AZ$ (т.к. $\angle AZY = \angle AZE$, т.е. $\triangle AZE$ - равнобедренный)
(с основанием YZ)

$$\Rightarrow 8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ \Rightarrow \cos \angle YAZ = \frac{8^2 - 2 \cdot 6^2}{6 \cdot 6 \cdot 2}$$

$$\cos(\angle YAZ) = \frac{64 - 2 \cdot 36}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{64 - 72}{72} = -\frac{1}{9}$$

$\angle YAZ$ и $\angle CAB$ - смежные $\Rightarrow \cos \angle CAB = -\cos \angle YAZ$ (т.к. $\angle CAB + \angle YAZ = 180^\circ$) $\Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{1}{9}$ (Зам. 4)

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB$$

$$AB = 30 - \text{по (Зам. 3)}$$

$$AC = 18 - \text{по условию}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{1}{9} - \text{по (Зам. 4)}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \cos \angle CAB$$

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} = 1104$$

$$BC = \sqrt{1104} = 4\sqrt{69}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{69}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

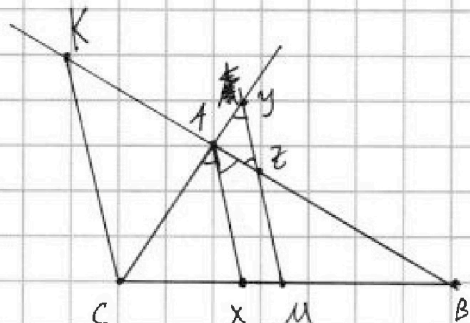
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

прям. - прямая; \triangle - равнобедренный

Продлим BA за точку A .



Пусть точка $K \in$ прм. AB , $ZB = ZK$, $K \neq B$.

Тогда $KZ \parallel MZ \parallel KC$ - т.к. MZ - средняя линия в $\triangle BKC$ (т.к. M - середина BC , Z - середина BK , т.к. $ZB = ZK$ и $K \neq B$) - (Заб.1)

Т.к. $MZ \parallel AX$, то $\angle CAX = \angle CYM$ - по св-ву, и $\angle XAB = \angle AZY$ - по св-ву (т.к. Z лежит между M и Y ,

т.к. $MZ \parallel AX$ и Z лежит на отрезке AB , а Y - на

продолжении отрезка AC) ~~и $\angle CMZ < 180^\circ$, т.к. он смежен углу ZMB , который больше 0° , т.к. $Z \notin$ прм. BC (т.к. $MZ \parallel AC$, $AC \notin BC$, $M \in$ прм. BC)~~

и $\angle CMZ < 180^\circ$, т.к. он смежен углу ZMB , который больше 0° , т.к. $Z \notin$ прм. BC (т.к. $MZ \parallel AC$, $AC \notin BC$, $M \in$ прм. BC)

Итак, $\angle CAX = \angle CYM$ и $\angle XAB = \angle AZY$. Т.к. AX - биссектриса $\triangle ABC$ $\angle CAB$ в $\triangle ABC$, то $\angle XAB = \angle CAX \Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY$. (т.к. $\angle CYM = \angle AYZ$).

По (Заб.1), $KC \parallel MZ \Rightarrow \angle KCA = \angle AYZ$, $\angle KCA = \angle CKA =$

$= \angle AZY \Rightarrow$ т.к. $\angle AZY = \angle AYZ$, то $\angle KCA = \angle CKA \Rightarrow \triangle KCA$ - \triangle равнобедренный

с основаниями $KC \Rightarrow AC = KC \Rightarrow AC + AZ = AK + AZ$ - (Заб.2)

Z - А лежит между K и Z , т.к. $ZB > AZ$ и $ZB = KZ$, а $ZB > AZ$,

т.к. $AZ/ZB = XM/MB$ - по теореме Фалеса для $\angle CBA$ и $MZ \parallel AX$, а $XA/AB = XM/MB < 1$ (т.к. $XM < MB$, т.к. $X \in$ отрезок CM или $X \in$ отрезок MB) т.к. $X \in$

X лежит на отрезке $BC \Rightarrow$ А лежит между K и Z на прямой $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow KZ = AK + AZ$. По (Заб.2), $AK + KZ = AC + AZ \Rightarrow BZ = AC + AZ \Rightarrow$

$\Rightarrow BA = BZ + AZ = AC + 2 \cdot AZ$. $AC = 10$ и $AZ = 6$ - по условию $\Rightarrow BA = B + 2 \cdot 6 =$

$= 30$. - (Заб.3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 1,5 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(6-x) = 2,25 \\ (x+1)(6-x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x + 6 = 2,25 \\ -x^2 + 5x + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 24 = 9 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 15 = 0 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

(4) из (3): ~~$x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$~~
 $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 > 0$

Мы знаем, что $x \geq 0$ - из (1) $\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{1} = 1$

$$\sqrt{6-x} \leq \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 1 - \sqrt{6} + 5 = 6 - \sqrt{6} > 0$$

т.к. $6 - \sqrt{6} = \sqrt{6}(\sqrt{6} - 1)$, $\sqrt{6} > 1$ (т.к. $6 > 1$) $\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 > 0$
 или $6 > x \geq 0$.

из (3) и (4):

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} > \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$
 $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} > \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$

$6 > x \geq 0$

$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < 6$, т.к. $2\sqrt{10} < 7$, т.к. $40 < 49$.
 $\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} < 0$, т.к. $5 < 2\sqrt{10}$, т.к. $25 < 40$.
 $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} > 0$ т.к. $5 > \sqrt{13}$
 $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6$, т.к. $\sqrt{13} < 7$ (т.к. $13 < 49$)
 (справе $\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$)

Проверяем, подходит ли значение $x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$ (крае $(5 - 2\sqrt{10})/2$)
 $0 \leq x < 6 \Rightarrow$ все эти значения \Rightarrow т.к. $y = x$.

Ответ: ~~$(\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2})$~~ , $(\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2})$, $(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2})$,
 $(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) : x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2, \quad x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \text{ (м.к. емб } \sqrt{x} \text{ и } \sqrt{y})$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{т.к. } (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 > 0, \text{ м.к. } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \text{ (м.к. } \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0, x+y \geq 0, x^2+y^2 \geq 0) \text{ и } 1 > 0.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{y} \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

$$(1) \text{ и } (2) : x=y$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5$$

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \right)^2 = \left(2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 \right)^2$$

$$\begin{aligned} x+1+6-x &= 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25 \\ \Rightarrow \sqrt{(x+1)(6-x)} &= 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25 \end{aligned}$$

$$(3) : 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25$$

$$t = \sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$-2t + 75t^2 = 20t + 25$$

$$4t^2 - 48t + 18 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 - 48t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 9^2 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 72 = 9$$
~~$$D = 81 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 121 - 72 = 49$$~~

$$\begin{cases} t = \frac{\sqrt{81+9}}{4} \\ t = \frac{-\sqrt{81+9}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(6-x)} = 4,5 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \end{cases}$$~~

~~$$6 + 5x - x^2 = 3$$~~

~~$$6 + 5x - x^2 = 2,25$$~~

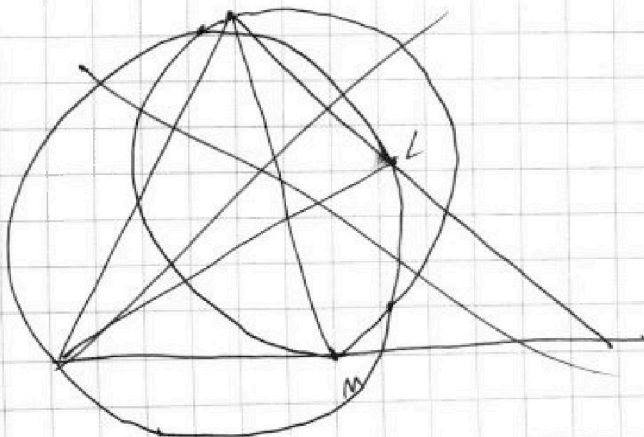
~~$$\begin{cases} 24 + 20x - 4x^2 = 81 \\ -x^2 + 5x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - 5 = 0 \\ 4x^2 - 20x + 57 = 0 \\ x^2 - 5x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0, \text{ МК.} \end{cases}$$~~

$4x^2 - 20x + 57 = 0$ не имеет корней (МК $D = 20^2 - 57 \cdot 4 = 400 - 57 \cdot 8 = -58 < 0$, т.е. $D < 0$ и корней нет)

$$x^2 - 5x - 5 = 0 \quad D = 25 + 5 \cdot 4 = 45$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{45+5}}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{45+5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}+5}{2} \\ x = \frac{5-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 очевидно, имеет смысл рассматривать только повороты на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° (по часовой стрелке).
Заметим, что всего у нас 81 точка. Рассматривая пары точек, чтобы их сделать белыми, без учета поворотов (далее мы будем называть это ситуацией А; а с учетом поворотов — ситуацией В).

Рассматривая пары точек, когда в ситуации А существует еще одна пара белых точек, получаемая из пары С (помощью поворота), а в ситуации В эти пары различны (Зуб. 1).
Рассматривая пары точек, когда в ситуации А существует еще одна пара белых точек, получаемая из пары С (помощью поворота), а в ситуации В эти пары различны (Зуб. 1).

В ситуации А ровно $80/2$ пар центрально симметричных точек (симметрична отн. центру доски), т.к. можно ровно 80 способов выбрать одну из точек, а другая определена однозначно, причем каждая пара получена дважды (80 способов выбрать одну из точек, т.к. одна из 81 точек совп. с центром доски, и если выбрано ее белыми, то центрально симм. ей точка — это она сама, т.е. в паре белых точек эти точки совпадают, что не удовлетворяет условию).

(1) Такая пар ровно 40 (пар центрально симм. точек), а в ситуации В, такая пар 20 — то (Зуб. 1) (т.е. каждая пара из ситуации В в ситуации А подсчитана дважды).
Каждая пара из ситуации А соответствует ровно одной паре из ситуации В (это очевидно).

Каждая пара не центрально симм. точек из ситуации В очевидно ровно 4 раза подсчитана в ситуации А, а каждая пара из ситуации А соответствует (т.е. «научитесь») ровно одной паре из ситуации В. В-Зуб. 2

В ситуации А ровно $\frac{C_{81}^2}{2} - 40$ пар (т.к. не центрально симметричными клетками (т.е. все способы выбрать пару C_{81}^2 , а из них 40 — пары центрально симм. точек). Значит в ситуации В ровно $(\frac{C_{81}^2}{2} - 40) / 4$ пар не центрально симм. точек, т.е. их $(81 \cdot 80 / 2 - 40) / 4 = 80 \cdot 40 / 4 = 800$ — это (2).

Из (1) и (2) следует, что в ситуации В ровно $800 + 20 = 820$ различная пар точек \Rightarrow в ситуации В ровно 820 способов выбрать две белые точки.

Ответ: 820

различная / 0. центр. симм. — центрально симметричные

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ 1 \geq y-x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Черновики}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 2 \geq 2x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 1 \geq x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-3y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases}$$

√2 Замечу $C \subseteq A \subseteq B$ означает, что $\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq A \end{cases}$. Замечу $C \subseteq A \subseteq B$ значит, что $\begin{cases} C \subseteq A \\ A \subseteq B \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1 \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ т.е. } 3x+4y \leq$$

Заметим, что

$$\sqrt{3}. A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n, B = m^2n + mn^2 - 3mn.$$

$$\text{Если } A = 13p^2: (m+n)^2 - 9(m+n) = 13p^2$$

$$\begin{cases} B = 75q^2: (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 45q^2 \end{cases}$$

Если $p=3$, то $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$. \varnothing , т.к. если одна скобка $= 9$, то другая тоже $\Rightarrow p \neq 3 \Rightarrow (m+n, m+n-9) \neq 1$.

Если $k=1$: то $m+n-9=13$, $m+n=22$. то 22 — не нач. кв. \varnothing .

Если $k=13$: $m+n-9=1$, $m+n=10$ \varnothing . не кратна 13.

$$\text{Если } \begin{cases} A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases}: \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 45q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 45:3 \Rightarrow mn:3 \text{ и } m+n-9:3 \Rightarrow \\ \Rightarrow mn:3 \Rightarrow 9, \text{ т.к. } \\ 45q^2:9 \text{ имеет вид } 5q^2. \end{matrix}$$

$$\frac{1+3+13}{2} = 10.$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0. \quad 169 - 120 = 49.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \leq \pm\sqrt{3} - 2 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$x = -1: a_2; a_5; a_3 \quad \text{area } d = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3} - 1: 3\sqrt{3} - 3 + 3 = 3\sqrt{3} \quad a_3$$

$$\begin{aligned} ((\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3})^2 &= (3+1-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2 = 4^2 = 16 \\ 3 \cdot (\sqrt{3}-1)^2 &= 3 \cdot (4-2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3} \\ &4 - 3\sqrt{3} \\ &8 - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3^2 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{15}{4} = \\ &= -\frac{12}{4} = -3. \\ &\frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 2 \\ (x - (\sqrt{3}-1))(x - (\sqrt{3}+1)) &= x^2 - ((\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)x) \\ (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1) &= -2. \\ &2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \quad & 4y + 8x \\ & \begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} -2 \leq 4x - 2y \leq 2 \\ -4 \leq 4x - 4y \leq 4 \end{cases} \\ & 4y - 4x \geq -4 \\ & 6 \geq 2y \geq -6 \\ & 3 \geq y \geq -3 \\ & 9 \geq 3y \geq -9 \\ & 3 \geq x - 3y \geq -3 \\ & 12 \geq x \geq -12 \\ & 36 \geq 3x \geq -36 \\ & 12 \geq y \geq -12 \\ & 12 \geq x \geq -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x \geq 3y + 3 \\ & 4 \geq 3y - x \geq -3 \\ & 4 \geq 2x + 2y \geq -4 \\ & 8 \geq 4x + 4y \geq -8 \\ & 4 \geq x \geq -4 \Rightarrow 8x + 4y \leq 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 + 12 = 20 \\ & \leq -8x + 4y \leq \\ & 8 \geq 8x + 4y \geq -108 \\ & 8 + 4 \cdot 12 = 8 + 48 = 56 \\ & x \geq 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y + 2x \\ & 8 + 4y \\ & 8 + 4 = 12 \\ & 108 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$ $\{a_n\}$ - арифм. прогрессия из условия; d - шаг этой арифм. прогрессии

$$a_3 = 3x+3; \quad a_5 = (x^2+2x)^2; \quad a_9 = 3x^2$$

$$\begin{cases} a_5 - a_3 = 2d \\ a_9 - a_5 = 4d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2+2x)^2 - (3x+3) = 2d \\ 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 4d \end{cases}$$

$$3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2 \cdot ((x^2+2x)^2 - (3x+3))$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^2 - 4x^3 = 2 \cdot (x^4 + 4x^2 + 4x^3 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 - 6x - 6 + 8x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x=2: \quad \begin{array}{cccccc} 16 & + & 4 \cdot 8 & + & 3 \cdot 4 & - & 2 \cdot 2 & - & 2 & = & 0 \\ -1 & & 1 & - & 4 & + & 3 & + & 2 & - & 2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(x+1) \quad a_3 \\ -x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{x^4 + x^3} \\ 3x^3 + 3x^2 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ 0 \quad -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 2x^2 + 4x - 2 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$(x^3 + 3x^2 - 2)(x+1) = x^4 + x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0 \Rightarrow 4+4 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 12 \quad x = \frac{\pm 2\sqrt{5}-2}{2} = \pm\sqrt{5}-1$$



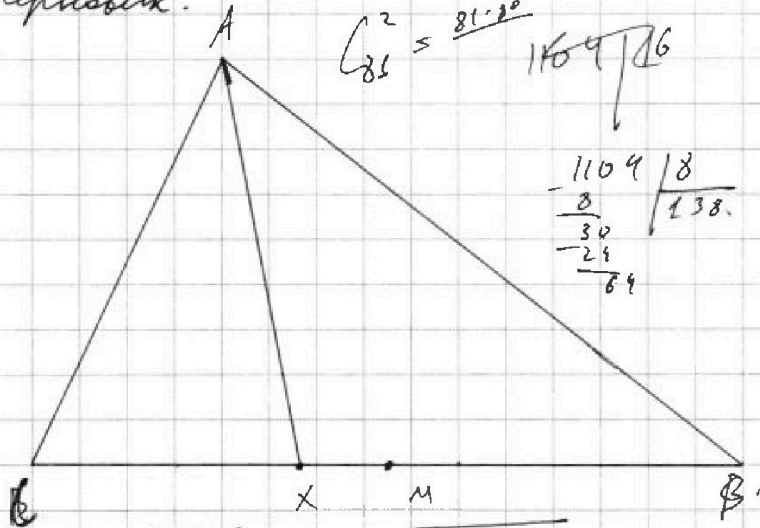
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

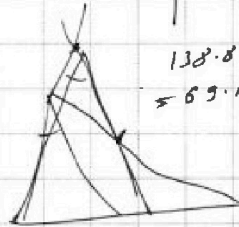
Черновик.



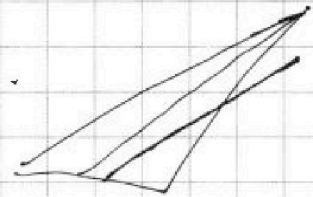
$$S_{\triangle}^2 = \frac{81 \cdot 20}{16} = 104 \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1104 \overline{) 8} \\ \underline{8} \\ 30 \\ \underline{24} \\ 64 \end{array}$$

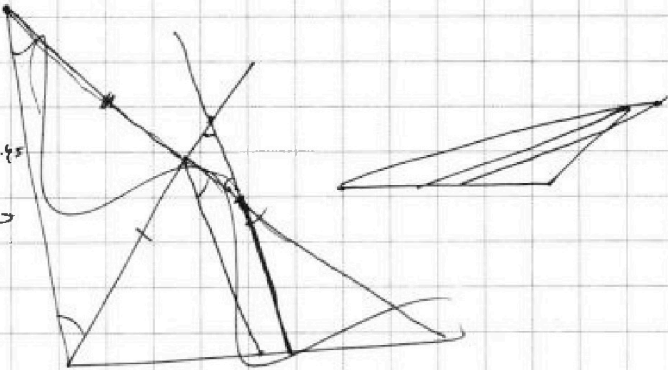
$$\frac{1104}{16} = 69 \frac{1}{2} = 3 \cdot 23$$



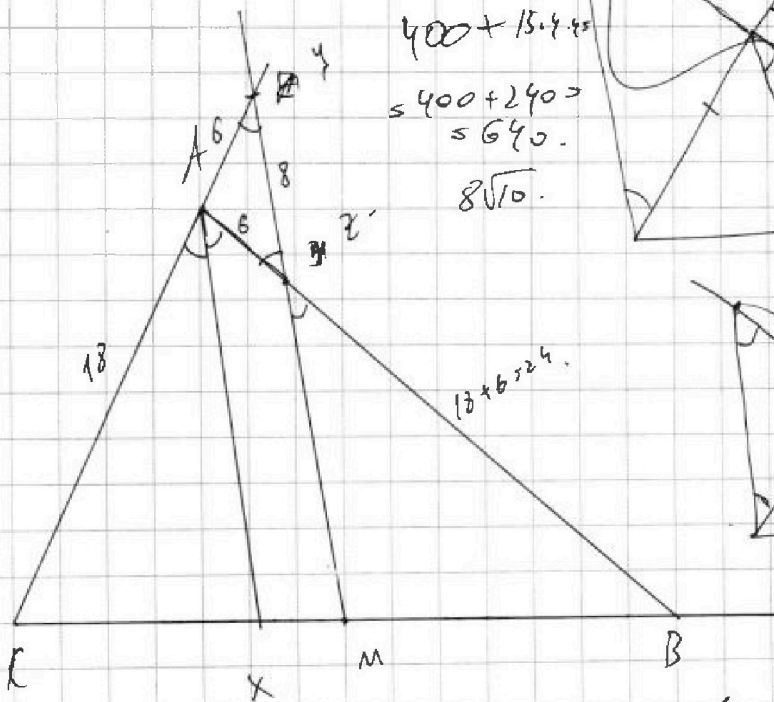
$$138 \cdot 85 = 69 \cdot 16$$



$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^2 + 5x^2 = \sqrt{y^2} + y^2 - \sqrt{x+5y^2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 400 + 13 \cdot 4 \cdot 5 \\ = 400 + 240 \\ = 640 \\ 8\sqrt{10} \end{aligned}$$



$$1104 / 2$$

$$25 - 3 \cdot 4 = 25 - 12 = 13$$

$$\begin{aligned} 900 + 324 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3} &= 1224 - 60 \cdot 2 = 1224 - 60 \cdot 2 \\ &= 1104 \end{aligned}$$

$$400 - 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot (100 - 50 \cdot 4)$$

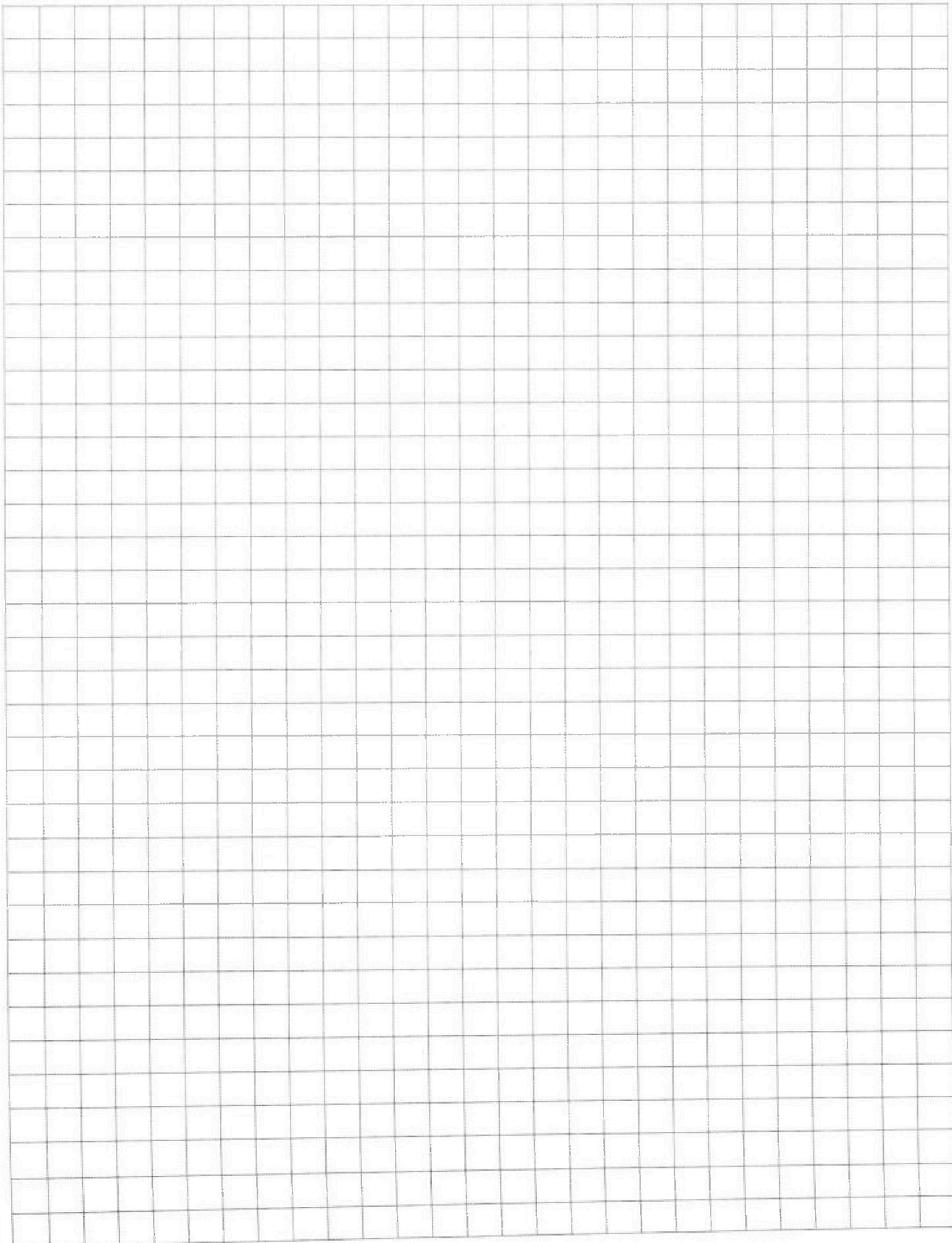


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





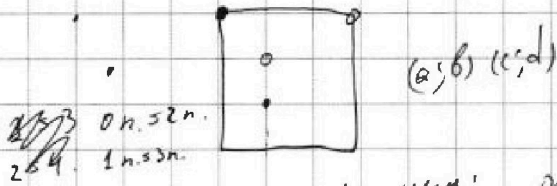
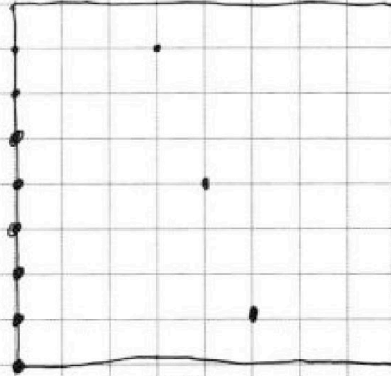
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

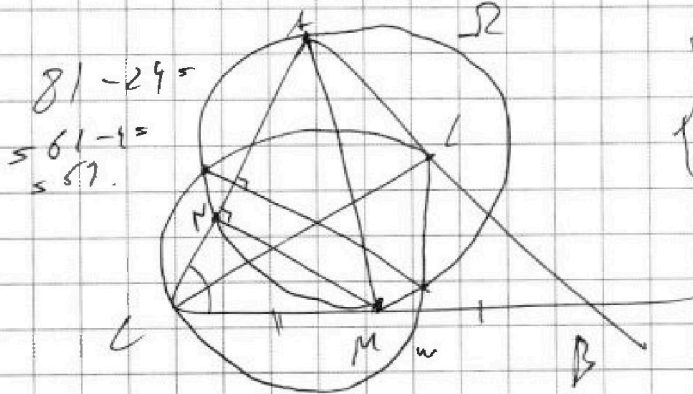


у. умк: ~~81~~ ~~80~~ 80 способов, раз. по 2 раза.
40 см. - каждый месяц
раз. по 2 раза с учетом порядка

не у. умк: $81^2 - 80$ - кол-во вариантов
выбора пары точек,
 $\frac{C_{81}^2 - 40}{4} = 40$ - кол-во вариантов где
парни макс, это они не у. умк.

$$\frac{C_{81}^2 - 40}{4} = \frac{81 \cdot 80}{2} - 40 \quad \frac{81 \cdot 40 - 40}{4} = \frac{40 \cdot 80}{4}$$

$$800 + 20 \cdot \frac{40}{2} = 820$$



$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad x = y$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$