



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{6+5x-y^2} - 1 = 2\sqrt{5x+y^2} + \sqrt{4x} - \sqrt{65} = 0, \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

$(6+5x-y^2)^2$
 $x \geq 0$
 $6 \geq y^2 \geq 0$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$
 $x^4 - 5x^2 + \sqrt{x} = 0$
 $(x^2 + 5/2) - (\sqrt{x} + 5/2) = 0$
 $(x^2 + 5/2) - (\sqrt{x} + 5/2) = 0$
 $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = 5x^2 + 5\sqrt{x} + \sqrt{x}$
 $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5x + 5y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$
 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2 + 5x + 5y) = 1$
 $p(p^2 - 2t)(p^2 + t)^2 - 2t^2 + 5p^2 - 10t = 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N1) Пусть d - первый член арифм. прогрессии,
 d - ее разность. Тогда по условию:

$$\begin{cases} d+2d=3x+3 & (1) \\ d+4d=(x^2+2x)^2 & (2) \\ d+8d=3x^2 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3)-(1): 6d=3x^2-3x-3 \\ (2)-(1): 2d=x^4+4x^2+4x^3-3x-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \frac{x^2-x-1}{2} & (*) \\ d = \frac{x^4+4x^3+4x^2-3x-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-1 = x^4+4x^3+4x^2-3x-3 \\ \Rightarrow x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^3+3x^2-2) = 0.$$

ТАКЖЕ (3)-(2): $4d=3x^2-x^4-4x^3-4x^2=-x^4-4x^3-x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = \frac{-x^4-4x^3-x^2}{4} \Rightarrow \frac{-x^2(x^2+4x+1)}{4}$$

Теперь пусть b - второй член.

$$\begin{cases} b-3d=3x+3 \\ b+3d=3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5d=3x^2-3x-3 \\ 2b=3x^2+3x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{3x^2-3x-3}{5} \\ b = \frac{3x^2+3x+3}{2} \end{cases}$$

Тогда всякий член $(x+1)(x+1)(x^2+2x-2)=0$ $D=4+8=12$

$$(x+1)^2(x-(1+\sqrt{3}))(x-(-1+\sqrt{3}))=0$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a $a+d$ $a+2d$ $a+3d$ $a+4d$ $a+8d$
 // // // // // //
 $3(x+3)$ $x^2(x+1)^2$ $3x^2$
 $5x+3$

$6d = 3x^2 - 3x - 9$
 $d = \frac{x^2 - x - 3}{2}$
 $d = -\frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9}{2}$
 $d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9$

$4d = 3x^2 - (x^4 + 4x^3 + 4x^2) = -x^4 - 4x^3 - x^2$
 $2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9$

$x^2(x-3) = (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 9)$

$0 = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

$x = 2$

$0 = (x-1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 6)$

$x = -2$

0	1	2	3
3	5	7	9

$26 = 16 + 8$

$16 - 32 + 12 + 4 - 6$

$x^2 + 3x^2 \geq 2$

$5 \cdot 9 + 6 = 27 + 17 = 51$

$1 + 3 + 2 - 6$

$0 = (x-1)(x+3)(x^2 + 2x + 2)$

12

$x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x$
 $(x-\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$
 $d = \frac{2}{2}$
 $d = \frac{0}{2}$
 $3 = \frac{0}{2}$

$3 \cdot 4 - 8 - 2$

$81 - 4 \cdot 27 + 9 = \frac{-18}{9}$
 $81 - 77 + 4 + 4 \cdot 9 + 9$

$\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$

$6 \quad 9$

$3 = \frac{0}{2}$

$81 - 77 + 4 + 4 \cdot 9 + 9$
 $81 - 77 + 4 + 36 + 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

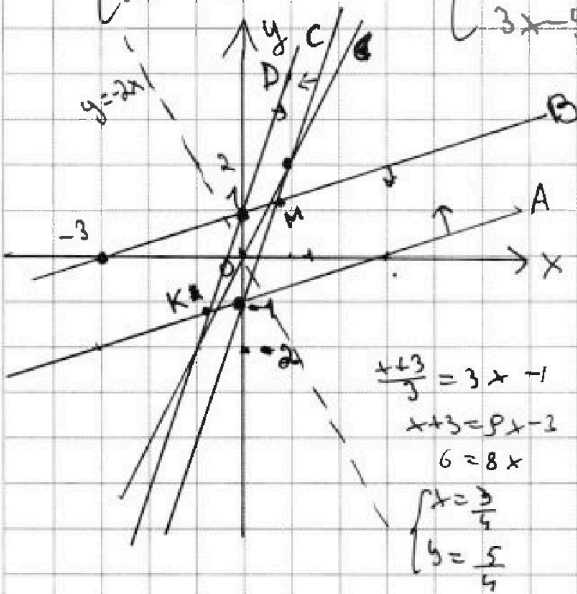
(N2) Будем решать графически.

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-5y| \leq 1$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-5y \leq 1 \\ 3x-5y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} \leq y & A \\ \frac{x+3}{3} \geq y & B \\ 3x-1 \leq y & C \\ 3x+1 \geq y & D \end{cases}$$



Точки $(x; y)$ удовлетворяющие системе находятся внутри параллелограмма

(т.к. $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ и $3 = 3$) с координатами

вершин: $(0; 1)$, $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$, $(0; -1)$, $(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$.

Нам нужно найти

максимум $4y + 8x$.

(т.к. точка $(0; 0)$ принадлежит

параллелограмму, то уже существуют подходящие точки $(x; y)$, то $4y + 8x \geq 0$) \Rightarrow нам нужно максимизировать $y + 2x$.

$y + 2x = d \Rightarrow y = -2x + d$. Найти максимальное d такое что, прямая $y = -2x + d$ имеет в пересечении с параллелограммом ≥ 1 точку. Заметим, что при d прямая $y = -2x + d$ поднимается вертикально вверх.

Наибольший d' такой, что $y = d'$ пересекает параллелограмм - это $\frac{5}{4}$. (по графику).

Тогда $y = -2x + d \Rightarrow d = y + 2x = \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow 4y + 8x = 11$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3) $A = m^2 + 2mh + h^2 - 9m - 9h$
 $B = m^2h + mh^2 - 3mh$

$$\begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 75q^2 \\ A = 75d^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \text{ p, q - простые}$$

$$A = (m+h)(m+h-9)$$

$$B = mh(m+h-3)$$

Т.к. p, q - простые и 13 и 75 - нечетные, то $(m+h)$ и $(m+h-9)$ - разной четности $(p-h)$ \Rightarrow \Rightarrow относительных : 2 $\Rightarrow A : 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+h)(m+h-9) = 52 \text{ (I)} \\ mh(m+h-3) = 75q^2 \\ (m+h)(m+h-9) = 300 \text{ (II)} \\ mh(m+h-3) = 13p^2 \end{cases}$$

Положить

$$t = m+h$$

$$\text{(I)} \quad t^2 - 9t - 52 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm 17}{2} \Rightarrow t = 13$$

(т.к. $t > 0$, т.к. $m, h \in \mathbb{N}$)

$$\text{(II)} \quad t^2 - 9t - 300 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1200}}{2}$$

$\Rightarrow \sqrt{3 \cdot 761}$ - не целое число, не натуральное, т.к. t - натуральное

$$mh \cdot (13-3) = 75q^2$$

$$10mh = 75q^2$$

$$2mh = 15q^2 \Rightarrow \text{т.к. q - простое} \Rightarrow q = 2$$

$$mh = 30$$

$$m+h = 13$$

$$\begin{cases} m = \frac{30}{h} \\ \frac{30}{h} + h - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{h} \\ h^2 - 13h + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 10 \\ m = 3 \\ h = 3 \\ m = 10 \end{cases}$$

~~II вариант~~ Т.к. Выразим m и h , тогда не условия задачи.

~~пусть $m : 2 \Rightarrow B : 2 \Rightarrow$~~

~~$$mh(m+h-3) = 13 \cdot 4$$~~

~~$$mh(m+h-3) = 75 \cdot 4$$~~

~~Тогда выразим, что $(m+h)$ и $(m+h-9)$ разной четности, т.к. $p-h \Rightarrow A : 2 \Rightarrow$~~

~~$$\Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 13 \cdot 2^2 \\ A = 75 \cdot 2^2 \end{cases}$$~~

Ответ: $(3, 10)$ и $(10, 3)$



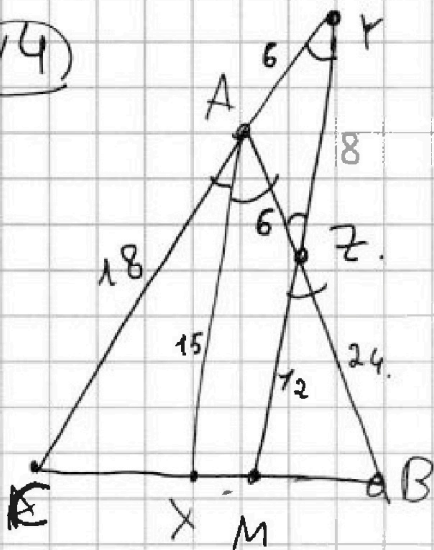
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N4)



1) $\angle CAZ = \angle CAB = \alpha = \angle MZB =$
 как верт.
 $= \angle AZY = \angle CAB - \angle AYZ = 2\alpha - \angle AYZ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AYZ = \alpha \Rightarrow \triangle ZAY - \text{р/б} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AZ = AY = 6$

2) По Т. Менелая для $\triangle CPM$ и секущей AB :

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MP}{PC} = 1.$$

$$\frac{18}{6} \cdot \frac{8}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow ZM = 12.$$

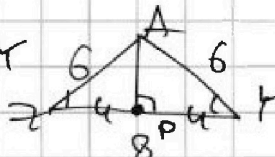
3) $\triangle CAX \sim \triangle CPM$ по 2 углам ($\angle ACX = \angle CPM$ и $\angle CAX = \alpha = \angle CPM$) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{CA}{CX} = \frac{AX}{CM} \Rightarrow AX = \frac{18 \cdot 20}{24} = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15.$$

4) $\triangle ZBM \sim \triangle ABX$ по 2 углам ($\angle ZBM = \angle ABX$ и $\angle MZB = \angle XAB$) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{ZB}{BA} = \frac{ZM}{AX} \Rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{12}{15} \Rightarrow x = ZB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x = 12x + 72 \Rightarrow 3x = 72 \Rightarrow x = 24 = ZB$$

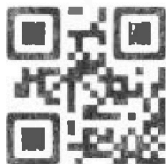
5) Р-м $\triangle ZAY$  Пусть AP - медиана (то и высота) \Rightarrow
 $\Rightarrow PY = 4$
 $\angle APY = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

6) Р-м $\triangle MZB$. По Т. Косинусов: $MB^2 = 12^2 + 24^2 - 2 \cdot 12 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} =$
 $= 144 + 576 - 576 \cdot \frac{2}{3} = 720 - 192 \cdot 2 = 720 - 384 = 336 \Rightarrow$

$$\Rightarrow MB = 4\sqrt{21} \Rightarrow BC = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad (*)$$

(N5)

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{5} = y^4 - \sqrt{x+5y^2} \quad (2)$$

условия
 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$(2): x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} \text{ на промежутке } [0; +\infty)$$

$$f(x) \uparrow, \text{ т.к. } d > 0$$

правила сравнения 3 ↑ функции на $[0; +\infty)$ $\left. \begin{matrix} f(x) < f(x+d) \\ f(y) < f(y+d) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) + f(y) < f(x+d) + f(y+d)$$

$$\text{Тогда } f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Подставим в (*):

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad (**)$$

$$a \cdot b = \sqrt{-x^2 + 6 + 5x}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$5 - b = a(2b - 1) \Rightarrow \dots$$

Решение в классе (*):

$$x+1 \pm \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{6+5x-x^2} - 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ 2ab = a - b + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ (a-b)^2 = 2 + b - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ t = a - b \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ t = a - b \\ (t+2)(t-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a - b = 1 \\ a - b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ 2b^2 + 2b = 6 \\ a = b - 2 \\ 2b^2 - 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ a = b - 2 \\ b = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \\ a = \frac{\sqrt{10}}{2} - 1 \\ b = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{13}+1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \end{cases}$$

$$x+1 = a^2 = \frac{4+2\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

Средним проверим.
 Проверим: $0 \leq x \leq 6$

Ответ: $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$



1 2 3 4 5 6 7

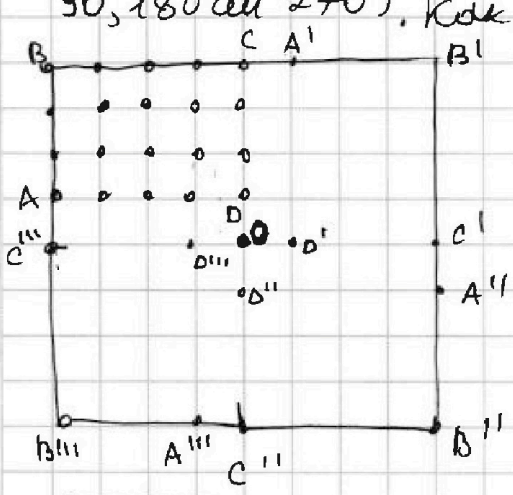
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N6) 1 случай (Б) (все углы считаем по часовой) Один из ~~любых~~ узлов - центральный.

Всего узлов $8 \cdot 8 = 64$. Видим, 80 способов выбрать второй Б.

Заметим, что все они разбиваются на 20 групп по 4 способа, получаются группы из групп поворотов (любым при повороте остался квадрат со сторонами вдоль границ клеток нужно поворачивать на: 90 углов, то есть 90, 180 или 270). Как считать?



Разобьем все узлы, кроме центрального на 4 прямоугольника 3×4 . (A, B, C, D). Они поворачиваются групп из групп поворотов. Тогда для любой раскраски 6 узлов находится в одной из них, повернем этот прямоугольник 3 раза, получим суммарно 4 раскраски. Итого, в 1 случае $\frac{80}{4} = 20$ способов

2 случай центральный узел Ч. Пускай X и Y - белые узлы.

2.1 ~~не подходит~~ Тогда повернем точки X и Y относительно O если $\angle XOY \neq 180^\circ$ на $90, 180, 270^\circ$ и получим еще 3 раскраски.

Докажем, что эти 4 раскраски различны. Пусть нет. Есть ~~затем~~ вершины B_1 и B_2 - одинаковые. Тогда вершина X стоит там же где Y в B_2 и Y там же X в B_1 . (Иначе вершина X повернется на ± 360 градусов)

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle XOY \neq 180^\circ \\ \text{углы поворота} \end{cases} \angle XOY = \text{углы} \angle XOY' \Rightarrow \begin{cases} \angle XOY + \angle XOY' = 360^\circ \\ \angle XOY = \angle XOY' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \equiv Y' \\ Y \equiv X' \end{cases}$$

\Rightarrow углы поворота $\angle XOY = \angle XOY' = 180^\circ$, противоречие с предположением.

Тогда если $\angle XOY = 180^\circ$, то повернув этот квадрат мы получим равно одну новую раскраску (2 симметрично) ← (5B)

X - X' и Y - Y' симметричны относительно O.

Продолжим на след. листе.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

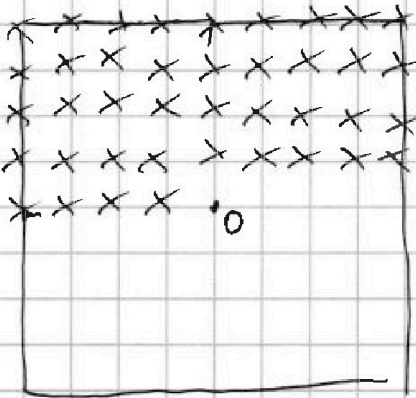
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 Продолжение

Кол-во способов выбрать 2 5 узла (без 0) равно $C_{80}^2 =$
 $= \frac{80 \cdot 79}{2} = 40 \cdot 79$. Кол-во способов выбрать узлы X, Y

так, чтобы $\angle XOY = 180^\circ$
 $Ox = Oy$



Разобьем 80 узлов на 40 пар, в которых узлы симметричны относительно O.

Тогда есть 40 способов выбрать 2 одинаковых узла.

$\frac{40}{2} = 20$ пар (или) на противоположной стр.

$40 \cdot 79 - 40 = 40 \cdot 78$ - способов выбрать 2 5 не симметричных относ. O узла.

$\frac{40 \cdot 78}{4} = 10 \cdot 78 = 780$ - различных раскрасок

если 0-симметри
 Итого, $20 + 20 + 780 = 820$.

Ответ: 820



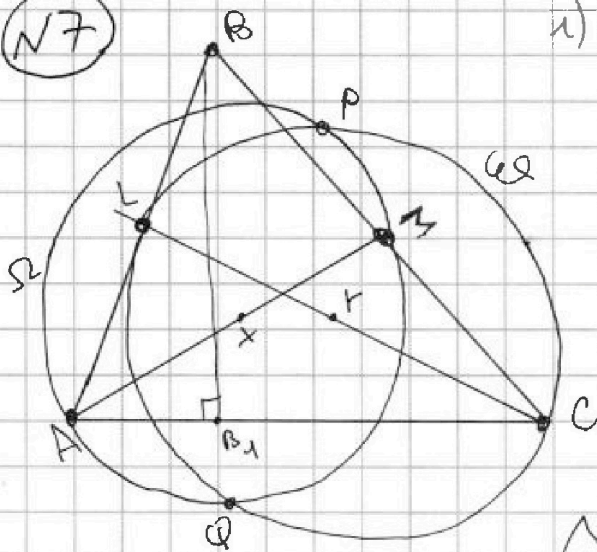
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

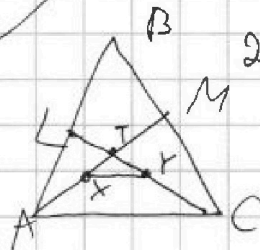
(N7)



$$1) \begin{cases} PQ \perp AB \\ BB_1 \perp AC \end{cases} \Rightarrow PQ \perp AC$$

$PQ \perp$ линии центров Ω и Ω_1
 $\Rightarrow PQ \perp XY$, где XY —
 —середина AM и CL

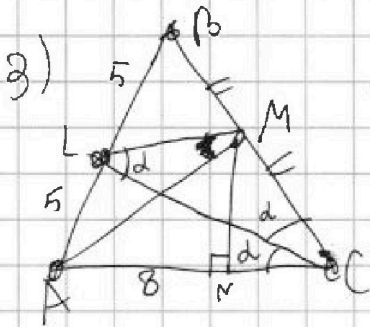
$$2) \begin{cases} PQ \perp XY \\ PQ \perp AC \end{cases} \Rightarrow XY \parallel AC$$



$$2) LC \cap AM = T$$

$$\begin{aligned} XY \parallel AC &\Rightarrow \frac{TX}{TY} = \frac{TA}{TC} \\ &\text{по свойству параллельных отрезков} \\ &= \frac{TX + XA}{TY + YC} = \frac{XA}{YC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{по СРРО}}{=} \frac{XM}{YL} = \frac{XT + TM}{TY + YL} = \frac{TM}{YL} \Rightarrow XY \parallel LM \Rightarrow LM \parallel AC \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AC \parallel LM &\Rightarrow \angle CLM = \angle LCA = \alpha = \angle LCB \Rightarrow \\ &\Rightarrow \triangle LMC - \text{p/5} \Rightarrow LM = MC = MB \Rightarrow \\ &\Rightarrow \triangle LCB - \text{прямоугольный} \Rightarrow CL - \\ &\text{—биссектриса и высота} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \triangle BCL - \text{p/5} \Rightarrow BL = CL = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

$$\angle MAC = \alpha \Rightarrow \angle CMA = 90^\circ$$

Продолжение
 на следующей
 странице \rightarrow



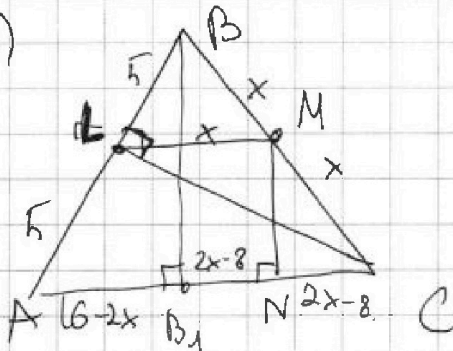
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N7) Продолжение.

4)



$$AN=8 \quad \text{Пусть } BM=MC=x=LM.$$

$$\angle M \text{ — средняя линия} \Rightarrow AC=2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NC=2x-8$$

Опустим высоту BB_1 из т. B .

MM — средняя линия $\triangle BCB_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_1M=2x-8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB_1=8-2x+8=16-2x$$

По т. Пифагора для $\triangle AB_1B$: $100 - (6-2x)^2 = BB_1^2 =$
 $= (2MN)^2 = 4MN^2 = 4(x^2 - (2x-8)^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 100 - 256 - 4x^2 + 64x = 4x^2 - 4(4x^2 - 32x + 64)$$

$$-4x^2 + 64x - 156 = -12x^2 + 128x - 256$$

$$8x^2 - 64x + 100 = 0$$

$$2x^2 - 16x + 25 = 0$$

$$D = 256 - 200 = 56$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{56}}{4}$$

$$x = 4 \pm \frac{\sqrt{14}}{2} \quad \text{Значит, по первому}$$

$$\triangle BCL: BC > BL$$

$$2x > 5$$

Если $x = 4 - \frac{\sqrt{14}}{2}$, то $2x = 8 - \sqrt{14} \approx 5$

$$3\sqrt{14}$$

$$9 < 14 \Rightarrow 2x < 5, \text{ противоречие.}$$

Значит, $x = 4 + \frac{\sqrt{14}}{2}$. Тогда $AC=BC=8+\sqrt{14}$

Ответ: $8+\sqrt{14}=AC=BC$.

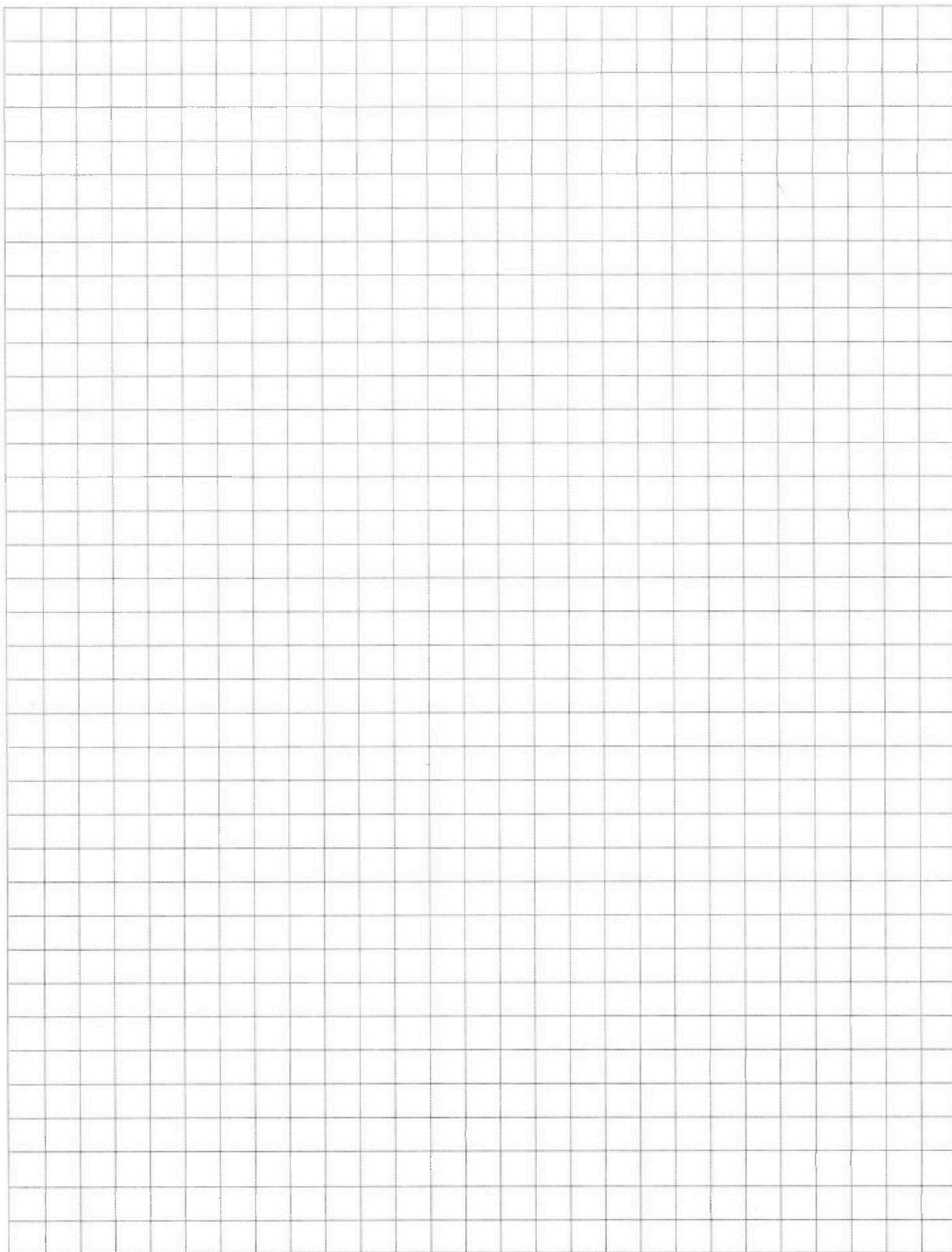


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a =

$$x^4 + 3x^2 - 2x = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + x^2 - 2 = 0$$

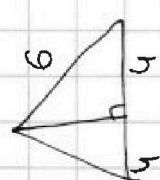
$$d = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^2(x^2 + 4x + 4)$$

$$d = -\frac{x^4 + 4x^3 + x^2}{4} = -\frac{x^2(x^2 + 4x + 4)}{4}$$

$$-x^4 + 4x^3 + x^2 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\cos \delta = \frac{2}{3}$$



$$\frac{2}{6} = \frac{18}{24} = \frac{18 \cdot 8}{6} = 24$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 28 = 3 \cdot 112 = 336$$

$$2M = \frac{18 \cdot 8}{6} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$2M = \frac{18 \cdot 8}{6} = 24$$

$$\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

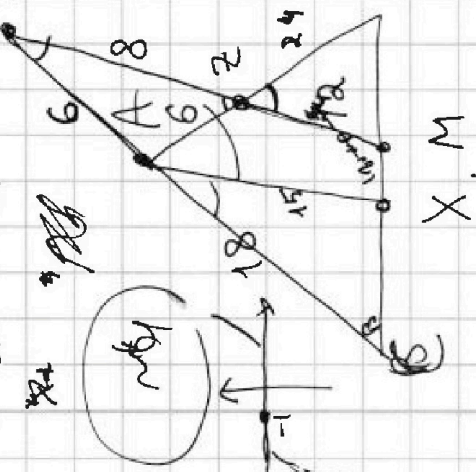
$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^2(x+3) = 2$$

$$x > 3$$

$$x^3 + 2x^2 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$



$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{18}{24} = \frac{AX}{20} \Rightarrow AX = 15$$

$$\frac{12}{15} = \frac{AX}{24}$$

$$12x + 22 = 15x$$

$$2x = 7$$

$$x = 3.5$$

$$\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - x - 2$
 $0 < x < 10$
 20

$$A = m^2 + 2mh + h^2 - 3m - 3h$$

$$13p^2$$

$$B = m^2h + mh^2 - 3mh$$

$$25q^3$$

$$5^2 \cdot 3q^2$$

$x^2 - 13x + 30 = 0$
 $x_1 = 3, x_2 = 10$

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$A = (m+h)(m+h-3)$$

$$B = mn(m+h-3)$$

$$m = xd$$

$$h = yd$$

если $abd = 4, m = 4$

$212, m = 11$

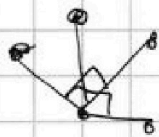
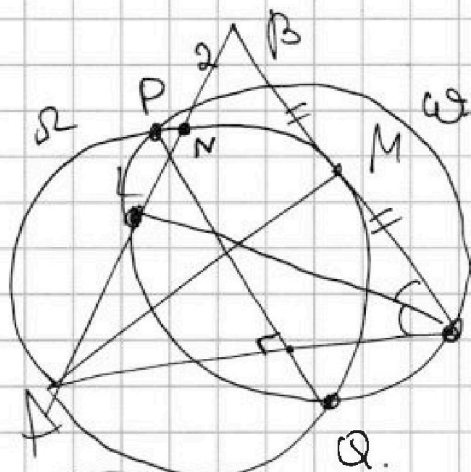
$$A = d(x+y)(d(x+y)-3)$$

~~если~~

если $A = 5^2 \cdot 3q^2, m = 5$

$$B = d^2xy(d(x+y)-3)$$

$AB = 40,$
 $AM = 20$



$$754 = 300$$

$$81 + 208 = 289$$

17

$$t^2 - 9t - 52 = 0$$

~~t = 13~~

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 21 \\ \hline 12 \\ 6 \\ \hline 1281 \end{array}$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

1280

21

61

2 года
в день

$$169 - 120 = 49$$

$$1281 =$$

$$= 3 \cdot 427$$

3 года
в день

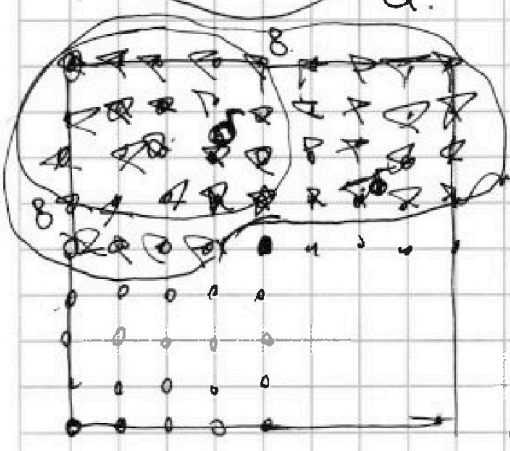
$$20$$

$$20$$

$$81 + 1200 =$$

$$= 1281$$

2h





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

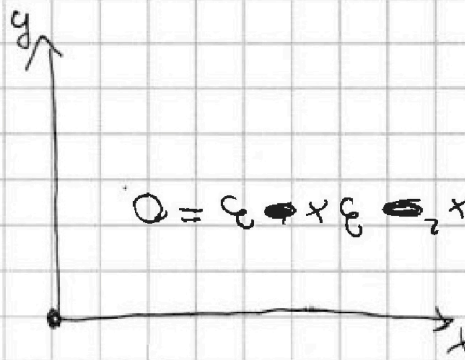
$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y+8x \\ \sqrt{5}-\frac{1}{2} \sqrt{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} \leq y \\ x + \frac{2y}{3} \geq y \\ 3x-1 \leq y \\ 3x+1 \geq y \end{cases}$$

$$Q = \epsilon_1 x \epsilon_2 x \epsilon_3 x \epsilon_4 x \epsilon_5 x$$



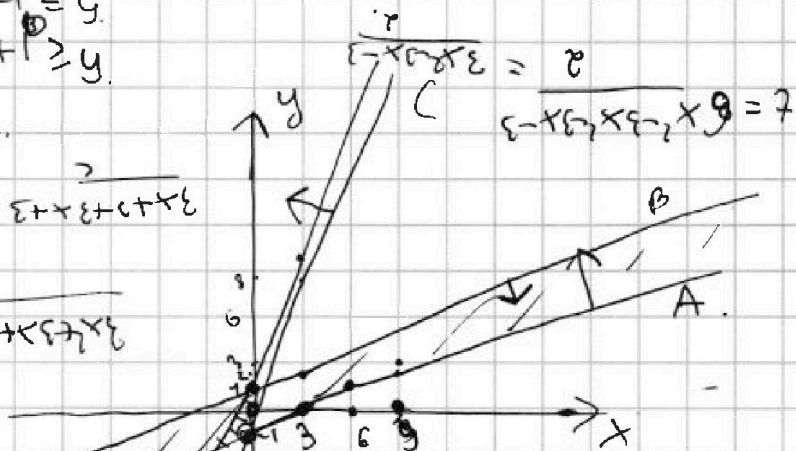
$$2x+2+2x=$$

$$3x+3+3+3$$

$$= \frac{2}{5+5+5} = \frac{2}{15}$$

$$3x+3x+1-x+1+x+1$$

$$4y+8x \text{ мин.} = \alpha$$



$$7 = 6x + 3x + 3 = 9x + 3$$

$$\begin{cases} x+3 = 7+3 \\ 3+3 = 7+3 \end{cases}$$

$$0 < 1-x-2 < 0$$

$$8+x < 2x < 8$$

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 3 = 28 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$b = \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$0 < x < 0$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ (a+b)^2 = 7 + 2ab = 12 + 2ab \\ (a-b)^2 = 7 - 2ab = 2 + 2ab \end{cases}$$

$$a-b+5=2ab \quad \sqrt{a} \geq b \geq 0$$

$$\sqrt{7} \geq a \geq 1$$

$$Q = \frac{x}{2} \frac{y}{2} \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2} \right) x + \frac{2}{2} x$$

$$P = 1 \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 - 5x + 6$$

$$Q = \frac{x}{2} - x \epsilon_1 + \frac{x}{2}$$

$$x: Q = 2 - 2x + 3y$$

$$(x-3)(x+2)$$

$$(5-x)(x+2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x+2)$$

$$1 \cdot \sqrt{\frac{13}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x = 0$$

$$(x+1)^3 + 3x^2 - 2x = 0$$

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2)$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{14+2\sqrt{3}}{4} = \frac{7+\sqrt{3}}{2} = x+1$$

$$a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{14-2\sqrt{3}}{4} = \frac{7-\sqrt{3}}{2} = 6 - \frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

$$a-b+5 = \frac{1+1}{2} = 1 + 5$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \sqrt{6}$$

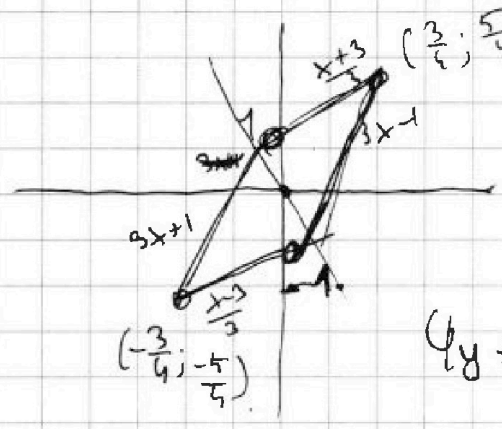
$$\sqrt{3} \sqrt{2}$$

$$4y + 8x$$

$$4y + 8x = d$$

$$y \leq \frac{d-8x}{4}$$

$$y \leq \frac{d}{4} - 2x$$



$$\frac{x+3}{3} = 3x-1$$

$$x+3 = 9x-3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x-3 = 9x+3$$

$$8x = 6$$

$$1 - \frac{3}{4}$$

$$x = -1$$

$$4y + 8x = \text{max}$$

$$= d$$

$$y + 2x = \text{max}$$

$$y = -2x + d$$

$$3x+3$$

$$(x^2 + 2x)^2$$

$$3x^2$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$NO \perp AC$
 $NO \perp OB$

$x = \frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+x}$
 $\frac{x \cdot b}{b} = \frac{a+x}{b+x}$
 $\frac{b \cdot x}{b} = \frac{a+x}{b+x}$

$100 - (16 - 2x)^2 = 2 \cdot (x^2 - 6x + 9)$
 $100 - 250 + 4x^2 + 64x = 2x^2 - 12x + 18$
 $2x^2 = 12x + 18$
 $2x^2 - 12x - 18 = 0$
 $x^2 - 6x - 9 = 0$
 $x = 8 - \sqrt{119}$

$2x^2 = 12x + 18$
 $2x^2 - 12x - 18 = 0$
 $x^2 - 6x - 9 = 0$
 $x = 8 - \sqrt{119}$