



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1  2  3  4  5  6  7

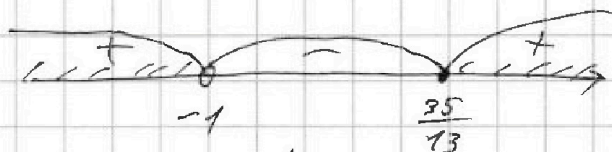
СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ ,  $a_{13} = 5-x$ ,

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0, \quad (13x-35)(x+1) \geq 0$$



Отраженные:  $x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$ .

a)  $x = \frac{35}{13}$ . Тогда  $a_7 = 0$ ,  $a_{15} = 0$ .

$a_1 q^6$   $a_1 q^{15}$ , где  $q$  — шаг прогрессии.

Тогда  $a_1 = 0$  или  $q = 0$ .

$0 = a_1 q^{12} = a_{13} = 5 - \frac{35}{13} \neq 0$

противоречие, значит  $x \neq \frac{35}{13}$ .

b)  $x \neq \frac{35}{13}$ . Тогда  $\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{a_1 q^{14}}{a_1 q^6} = q^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$ ,  $\Rightarrow q^4 = |x+1| \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$ .

$$a_{15} = \sqrt{|13x-35| \cdot |x+1|} = a_{13} \cdot q^2 = (5-x) \sqrt{|x+1|}$$

$$\sqrt{|13x-35| \cdot |x+1|} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$|x+1| = 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{|13x-35|} = 5-x \quad (2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \boxed{x_5 = -1}$$

$$(2) \sqrt{|13x-35|} = 5-x$$



$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |13x-35| = x^2 - 10x + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |13x-35| = x^2 - 10x + 25 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) |13x-35| = x^2 - 10x + 25$$

$$1) x \geq \frac{35}{13} :$$

$$13x-35 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x_1 = 20 \quad \text{или} \quad x_2 = 3 \quad (\text{ком. Валера})$$

$$\frac{35}{13} \leq x_1 \leq 5?$$

$$\frac{35}{13} \leq x_2 \leq 5?$$

нет  $\Rightarrow$  координаты  
хорды

$$\text{да} \quad \boxed{x=3}$$

$$2) x < \frac{35}{13} :$$

$$35 - 13x = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = -5 \quad \text{или} \quad x_4 = 2$$

~~или~~

$$x < \frac{35}{73} ?$$

$$x < \frac{35}{73} ?$$

$$\text{да, } x_2 = -5$$

$$\text{да, } x_4 = 2$$

Итак, мы получили следующие значения:

$-5; -1; 2; 3$ . Но по графикам подходит

только  $-5; 3$ . Проверим:

$$1) x = -5: \quad a_7 = \sqrt{\frac{-65-35}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{-100}{-64}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$a_{13} = 5+5=10, \quad a_{15} = \sqrt{(-65-35)(-4)} = 20. \quad \text{При}$$

$q = \sqrt{2}$  все подходит.

$$2) x = 3: \quad a_7 = \sqrt{\frac{39-35}{(4)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4}$$

$$a_{13} = 5-3=2, \quad a_{15} = \sqrt{(39-35) \cdot 4} = 4. \quad \text{При}$$

$q = \sqrt{2}$  все подходит.

Ответ:  $-5; 3$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{4+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13.$$

Докажем, что  $|y+1| + 3|y-12| \geq 13$ .

$$1) \quad y < -1: \quad -y-1-3y+36 = 35-4y > 35+4 = 39. \quad \textcircled{1}$$

$$2) \quad -1 \leq y < 12:$$

$$y+1-3y+36 = 37-2y > 13 \quad \textcircled{1}$$

$$3) \quad y \geq 12: \quad \text{равенство при } y=12$$

$$y+1+3y-36 = 4y-35 \geq 13 \quad \textcircled{1}.$$

$$\text{Значит } |y+1| + 3|y-12| \geq 13 \geq \sqrt{169-z^2} = 7$$

$$\Rightarrow |y+1| + 3|y-12| = 13 \quad \text{и} \quad \sqrt{169-z^2} = 13$$

$$\Downarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y=12}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z=0}$$

$$(1) \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$\text{Замена } a = \sqrt{x+3}, \quad b = \sqrt{4-x}, \quad a, b \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a - b + 5 = 2ab \end{cases}$$

~~(4)  $a - 2ab = b - 5$   
 $a(1 - 2b) = b - 5$   
 $a + 5 = b(2a + 1)$~~

~~$a \geq 0 \Rightarrow 2a + 1 > 0 \Rightarrow$~~

~~$b = \frac{a + 5}{2a + 1}$~~

~~(3)  $a^2 + \frac{(a + 5)^2}{(2a + 1)^2} = 7$~~

~~$a^2 + \frac{a^2 + 10a + 25}{4a^2 + 4a + 1} = 7$  н.к.  $4a^2 + 4a + 1 > 0$   
 $a \geq 0 \Rightarrow$~~

~~$4a^4 + 4a^3 + a^2 + a^2 + 10a + 25 = 28a^2 + 28a + 7$~~

~~$4a^4 + 4a^3 - 26a^2 - 18a + 18 = 0 \quad | : 2$~~

~~$2a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 9a + 9 = 0$~~

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab = a - b + 5 & (4) \end{cases}$$

$(3) - (4): (a - b)^2 = 2 - (a - b)$

Заметьте  $t = a - b$ :

$t^2 = 2 - t$

$t^2 + t - 2 = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По м. Виета  $t = 1$  или  $t = -2$

$$a - b = 1$$

$$a - b = -2$$

$$a = b + 1$$

$$a = b - 2$$

$$(1) b^2 + 2b + 1 + b^2 = 7$$

$$(1) b^2 - 4b + 4 + b^2 = 7$$

$$2b^2 + 2b - 6 = 0$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0$$

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$D = 16 + 24 = 40$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$b_3 = \frac{4 + \sqrt{40}}{4} = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} = 7$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$b_4 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} = 7$$

$$b_2 = \frac{-\sqrt{13} - 1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{-\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$$

не подходит т.к.  $b \geq 0$

не подходит т.к.  
 $a \geq 0$ .

Итого

$$Итого a_1 = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}, a_3 = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$x^2 - 3$ :

$$x + 3 = \frac{14 + 2\sqrt{13}}{4}$$

$x^2 - 3$ :

$$x + 3 = \frac{14 - 2\sqrt{10}}{4}$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{4} = \frac{1 - \sqrt{10}}{2}$$

*Александр Копцев*



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
4 из 4

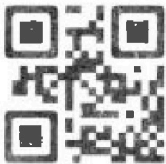
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

\* Оба корня подходят, так как для них выполнены

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

Ответ:  $\left(\frac{\sqrt{13}+1}{2}; 12; 0\right),$   
 $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right).$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p + 3$$

Заменим  $t = \cos x$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

$$\text{Получим } 4t^3 + 6t^2 + 3t = p + 3.$$

$$\text{Пустим } f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

Найдем экстремумы:

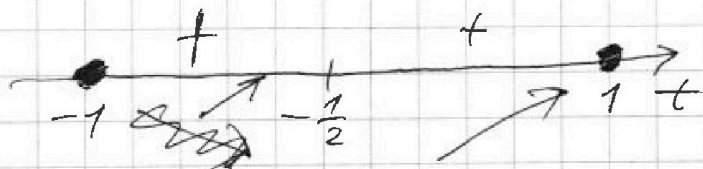
Найдем минимумы и максимумы на проме-

жутке  $[-1; 1]$ :

$$12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$3(4t^2 + 4t + 1) = 0$$

$$3(2t + 1)^2 = 0$$



$$\text{Максимум в м. } t_0 = \frac{1}{2}, f(t_0) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$f(t) = 4t^2 + 6t - 3$~~

Значит функция максимална

тогда минимум при  $t = -1$ :  $f(-1) = -4 + 6 - 3 = -1$ ,

максимум при  $t = 1$ :  $4 + 6 + 3 = 13$ .

Значит  $-1 \leq p + 3 \leq 13$   $(-3)$

$$-4 \leq p \leq 10.$$

$p \in [-4; 10]$  — есть решения.

(при  $t = 1$  и  $t = -1$ )

~~$2 \cos^2 x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$~~

~~$2 \cos^2 x \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$~~

~~$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 3 (\cos 2x + \cos x) = p$~~

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - p - 3 = 0$$

Корень единственный, поэтому можно  
просто подобрать.

⋮

Ответ:  $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

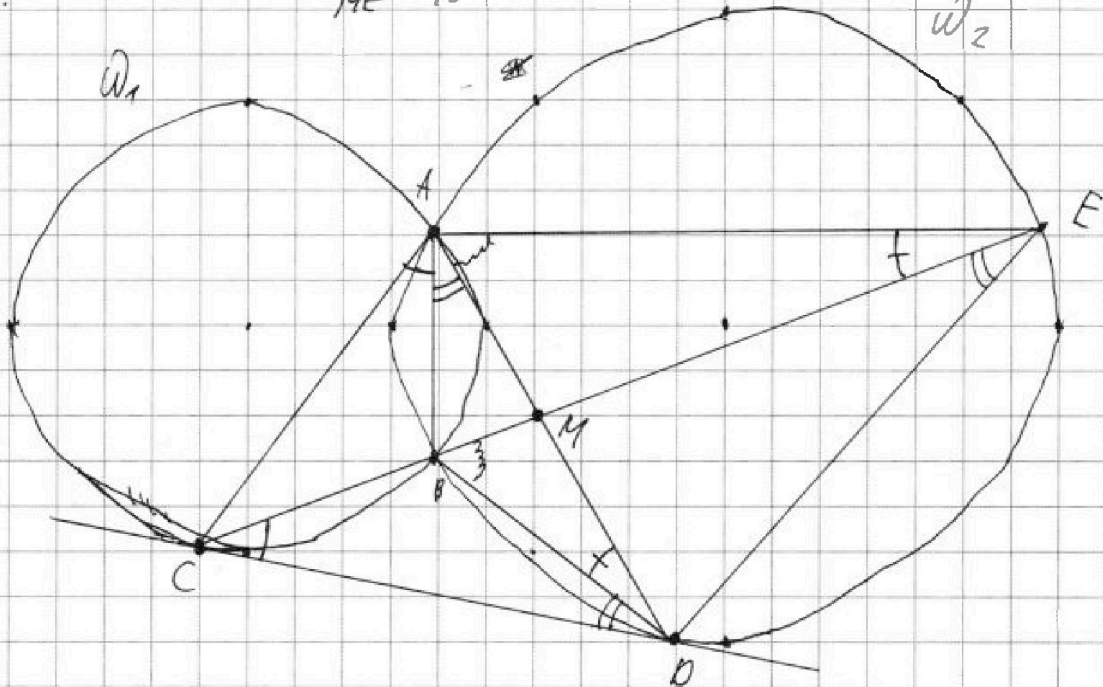
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$\frac{CM}{ME} = \frac{3}{10}$$



$$CM = 3x, ME = 10x.$$

$\angle BCD = \angle CAB$  как угол между касательной и хордой и вписанный угол, опирающийся на эту дугу. Аналогично  $\angle CDB = \angle BAD = \angle CED$ .

$CB \cdot CE = CD^2$  как секущая и касательная из точки C к дуге  $\omega_1$ .

$BM \cdot ME = CM \cdot MD$  по с-бу пересекающихся хорд.

$$CB \cdot CE = (CM - BM) \cdot CE = (3x - BM) \cdot 10x \quad (\text{как вписанный})$$

Заметим, что  $\angle EBD = \angle BCD + \angle BDC = \angle CAD$ .

Также  $\angle EBD = \angle EAD$  как вписанные в  $\omega_2$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $\angle CAM = \angle MAE \Rightarrow AM$  - биссектриса в  $\triangle CAE$ . Тогда по св-ву биссектрисы

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CM}{ME} = \frac{3}{10}.$$

Заметим также, что  $\angle ADB = \angle AEB$  <sup>как вписанные</sup>  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle ADC = \angle AED \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE$  по двум равным углам. Тогда

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{CD}{DE} \cdot \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{10}{3}}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Некоторые прямоугольники мы посчитали несколько раз

4) Каждый кат-во  $n$

4) Пусть некоторый прямоугольник симметричен относительно одной "средних линий". Заметим тогда, что он обязательно будет и симметричен

относительно центра. Действительно, для каждой ~~клетки~~ клетки закрашенной точки достаточно применить

по разу симметрии откос. А  $B$  и  $CP$ , чтобы получить (какая для коротких).

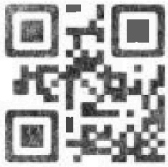
Симметрия симметрично закрашенной клетки.

Значит такие  $n$  прямоугольники мы посчитали  $2n$

раза. Они однократно задаются раскраской  $2 \times 2$  клеток  $n$  прямоугольника, поэтому их всего было  $\frac{2n^2}{2} = n^2$ .

Высесть нужно будет в  $2$  раза больше, т.к. их мы посчитали  $2$  раза.

5) Пусть некоторый прямоугольник центрально-симметричен и симметричен относительно только одной из средних линий. Рассмотрим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

клетку произвольную ~~тогда~~. Без окрашенных ~~объектов~~ ~~фрагментов~~ можно считать, что она закрашена. Пусть это клетка  $A_1$ , симметричная ей откос. ср. линии  $A_2$ , откос. центра —  $A_3$  (очевидно не совпадают, т.к. находятся в разн. маленьких прямоугольниках), а также обозначим симметричную  $A_1$  откос. второй ср. линии, не же закрашиваемую клетку  $A_4$ . Заметим, что  $A_4$  симметрична  $A_2$  откос. центра. Значит  $A_4$  должна быть закрашена. Противоречие. Значит все прямоугольники, которые мы посчитали несколько раз, были ~~ошибочны~~ (пункт 4).

Когда ответ:  $2 \cdot 2^{125 \cdot 200} + 2 \cdot 2^{100 \cdot 250} + 2 \cdot 2^{125 \cdot 200}$   
 $+ 2 \cdot 2^{125 \cdot 100} = 3 \cdot 2^{25000} - 2 \cdot 2^{12500} = 2 \cdot 2^{25000}$   
 $+ 2 \cdot 2^{12500} = 2 \cdot 2^{25000} + 2 \cdot 2^{12500} - 2 \cdot 2^{12500}$   
 Ответ:  $2 \cdot 2^{25000} + 2 \cdot 2^{12500}$

Когда ответ:  $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

Ответ:  $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.  $(a; b; c), a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

$$a > b \Rightarrow a - c > b - c$$

$$a - b \equiv 3 \Rightarrow (a - c) - (b - c) \equiv 3,$$

т.е. числа  $a - c$  и  $b - c$  дают разные остатки

при делении на 3. Тогда их произведение не

может давать остаток 1 при делении на 3,

т.е.  $(a - c)(b - c) - 1 \equiv 3$ .

и  $p \neq 2$  и  $p$  простое,  $p \neq 3$ .

Тогда  $p^2 - 1 \equiv 3$ ,  
 $\Downarrow$   
 $p = 3$ .

~~$(a - c)(b - c) = p$ . Тогда  $a - c = p$ ,  $b - c = 1$ , тогда  $a - b = p - 1$ ,  $a - b = p - 1$ ,  $a - b = p - 1$ .~~

~~и т.д.~~

~~$(a - c)(b - c) = 3^2$ .  $a > b$ , поэтому кон-~~

~~чаем  $a - c = 9$ ,  $b - c = 1$ ,  $a - b = 8$ ,  $a = b + 8$ .~~

Тогда ~~из условия~~  $b + 8 + b^2 = 560$ ,  $b^2 + b + 8 = 560$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2$$

$$b_1 = \frac{-1 + 47}{2} \text{ или } b_2 = \frac{-1 - 47}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = 23$$

$$a_1 = \cancel{b_1} + a = 31$$

$$(31 - c) \cdot (23 - c) = 9 \quad (1)$$

$$c^2 - 23c - 31c + 31 \cdot 23 - 9 = 0$$

еще квадратное уравнение,

≤ 2 корней.

Из (1) легко подбирается

$$c_1 = 22 \text{ и } c_2 = 32.$$

$$b_2 = -24$$

$$a_2 = b_2 + a = -16$$

$$(-16 - c) \cdot (-24 - c) = 9$$

$$(c + 16) \cdot (c + 24) = 9$$

Квадратное уравнение,

$$c_3 = -15 \text{ и } c_4 = -25 \text{ корней}$$

Хотя и 7 других решений

нет.

$$\text{Ответ: } (31; 23; 22),$$

$$(31; 23; 32),$$

$$(-16; -24; -25),$$

$$(-16; -24; -15).$$



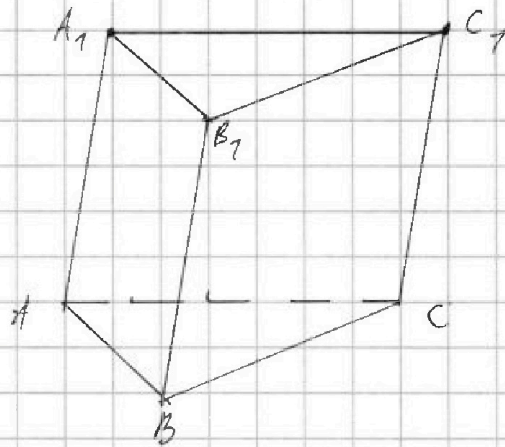
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



$$AB = x$$
$$S_{ABB_1A_1} = S_{BB_1C_1C} = 4.$$
$$S_{AA_1C_1C} = 3.$$

$$S_{ABB_1A_1} = S_{BB_1C_1C} \Rightarrow AB \cdot BB_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle ABB_1 = BC \cdot BB_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle B_1BC$$
$$\Rightarrow \sin \angle ABB_1 = \sin \angle B_1BC.$$

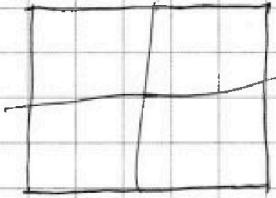


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$-2$   
6.  $a, b, c$   
 $a > b, c$

$$\begin{array}{r} \times 552 \\ 4 \\ \hline 220A \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline + 329 \\ \hline 188 \\ \hline 220A9 \end{array}$$

$$1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2$$

$$a - b \div 3$$

$$1 \neq \frac{1}{3} \quad (a-c)(b-c) = p$$

$b-c=1$  или  $a-c$

$3 \parallel 1$   
самое

$$(a-c) - (b-c) \div 3.$$

$$552 \neq 2 \cdot \dots \quad 552 = 2^A \cdot 3 \cdot 23$$

$$276 \quad 2$$

$$26 \quad 23$$

$$138 \quad 2$$

$$3 \quad 22$$

$$69 \quad 3$$

$$23 \quad 23$$

1

~~$$32 \cdot 3 = 96 \quad 23 \cdot 8 =$$~~

7  
2

23

~~$$64 \cdot 3 = 192 \quad 23 \cdot 4 = 92X$$~~

3

$$12A \vee 13^8$$

2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 9a + 9 = 0 \quad | : a^2$$

$$2a^2 + 2a - 13 - \frac{9}{a} + \frac{9}{a^2} = 0$$

$$t = 2a - \frac{9}{a}$$

$$2a^2 + \frac{9}{a^2} = t^2$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ 2ab = a - b + 5 \end{cases}$$

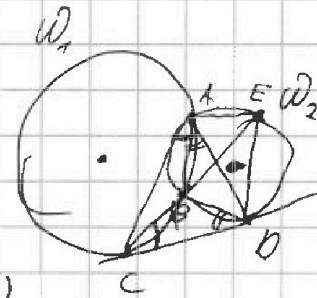
$$(a-b)^2 = 2 - (a-b)$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$2\cos 2x \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

$$2ab + 3a + 5 = p$$

$$2ab + 2b + 3(a+b) = p$$



$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1 \quad a \uparrow^2$$

$$x+3 = 4-x + 2\sqrt{4-x} + 1$$

$$2x - 2 = 2\sqrt{4-x}$$

$$x - 1 = \sqrt{4-x}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4 - x$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

CB - B0 биссектриса

AM - биссектриса

$\triangle ACO \sim \triangle ADE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{c|ccc|c|c|c}
 2x & 2 & 2 & -13 & -9 & 9 \\
 \hline
 \frac{1}{2} & 2 & 3 & -\frac{7}{2} & -8 & -3,5 \\
 \frac{3}{2} & 2 & 5 & -\frac{29}{2} & -28 & \\
 \frac{9}{2} & 2 & 11 & -\frac{95}{2} & -88 & 
 \end{array}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} - \frac{9}{2} + 9 = \frac{3}{8} - \frac{26}{8} + \frac{9}{2} = \frac{95}{8}$$

$$5 - \frac{39}{2} = -\frac{29}{2}$$

$$11 - \frac{9 \cdot 13}{2} = 11 - \frac{117}{2} = \frac{22 - 117}{2} = -\frac{95}{2}$$

$$-95 - 81 = -176$$

$$\begin{array}{r}
 95 \\
 781 \\
 \hline
 176
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|c|c}
 3x & 2 & 2 & -13 & -9 & 9 \\
 \hline
 & 2 & 8 & -31 & & 
 \end{array}$$

$$2x + 2x - 13x = 0$$

$$2 - 11x = 0$$

$$x = \frac{2}{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~73~~ ~~КАБДА~~

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

~~7~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

