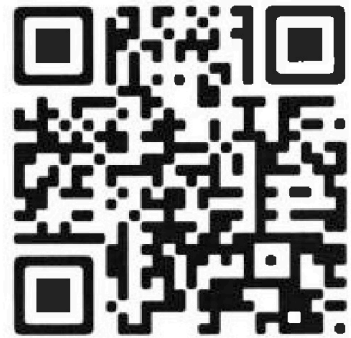




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть первый член прогрессии равен a , разность прогрессии — d . Тогда по условию:

$$\begin{cases} a + 2d = 3x + 3, & (1) \\ a + 4d = (x^2 + 2x)^2, & (2) \\ a + 8d = 3x^2 & (3) \end{cases}$$

тогда $(3) - (2) = 2((2) - (1)) = 4d$

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 2((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{разделим обе части равенства на 3:}$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{— корень } (-1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 - 1 = 0)$$

~~разделим обе части равенства~~ по т. Безу разделим данный многочлен на $x + 1$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3} & x^3 + 3x^2 - 2 \\ & \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ & 3x^3 + 3x^2 \\ & \underline{-2x - 2} \\ & -2x - 2 \\ & \underline{} \\ & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0, \quad x = -1 \quad \text{— корень } (-1 + 3 \cdot 1 - 2 = 0)$$

разделим на $x + 1$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \cancel{x^3 + 3x^2 + 0x - 2} \quad | \quad x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \quad | \quad \begin{array}{l} x+1 \\ x^2+2x-2 \end{array} \\ - \quad x^3 + x^2 \\ \hline 2x^2 + 0x \\ - \quad 2x^2 + 2x \\ \hline -2x - 2 \\ - \quad -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 12$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 1$$

$$x_2 = -\sqrt{3} - 1$$

и да ещё раньше мы получили, что $x = -1$ - корень. Проверим все эти корни:

$$x = -1, \text{ члены прогрессии: } 0, 1, 3, d = \frac{1}{2} - \text{ подходит } x = -1.$$

$$x = \sqrt{3} - 1, \text{ члены прогрессии: } 3\sqrt{3}, 4, 12 - 6\sqrt{3}, d = (2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}), \text{ значит, } x = \sqrt{3} - 1 \text{ подходит}$$

$$x = -\sqrt{3} - 1, \text{ члены прогрессии: } -3\sqrt{3}, 4, 12 + 6\sqrt{3}, d = (2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}), \text{ значит, } x = -\sqrt{3} - 1 \text{ подходит.}$$

$$\text{Ответ: } -1; -\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} - 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 & (1) \\ |3x - y| \leq 1 & (2) \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad (2), \quad \text{затем найдем}$$

из пересечения.
График (1) — ~~все точки~~
~~находящиеся~~
между ~~графиками~~
прямыми
 $x - 3y = -3$ и
 $x - 3y = 3$

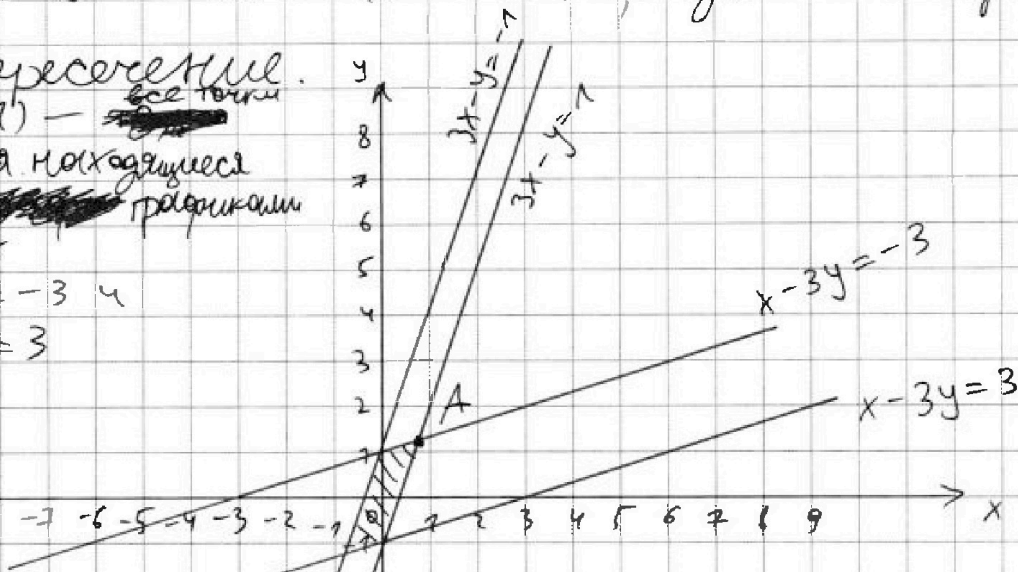


График (2) — все точки,
находящиеся между
графиками
~~и~~ $3x - y = -1$
и $3x - y = 1$

Решение системы —
зона трехугольной
области. Попробуем,
что $4y + 8x$ наибольшим
будет в точке, которую
я обозначил A!

точка — пересечение прямой $x - 3y = -3$ и
прямой $3x - y = 1$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & | \cdot 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x - 3y = 3 & * \\ x - 3y = -3 & ** \end{cases}$$

вычитаем из * **, получим: $8x = 6$,

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{x+3}{3} = \frac{\frac{3}{4}+3}{3} = \frac{\frac{15}{4}}{3} = \frac{5}{4}. \quad \text{Тогда:}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y + 8x = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n^3
 $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$
 $B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$
 Рассмотрим 2 случая: 1) $A = 13p^2$, $B = 75q^2$ и 2) $A = 75q^2$, $B = 13p^2$.

1) $A = 13p^2$, $B = 75q^2$

$A = (m+n-9)(m+n)$ разложим делители числа $13p^2$ по скобкам (т.к. число p — простое, то оно должно целиком быть в одной из чисел $m+n-9$ и $m+n$)

X1)	1	$13p^2$
X2)	p	$13p$
X3)	13	p^2
X4)	$13p$	p
X5)	p^2	13
X6)	$13p^2$	1

Сразу заметим, что т.к. m и n — натуральные, то $m+n-9 < m+n$, поэтому вариант 4) убираем сразу, т.к. $p \geq 2$, тогда $13p > p$, и аналогично вариант 6) убираем.

Вариант 3) не подходит, т.к. если $m+n-9 = 13$, то $m+n = 22 \neq p^2$ при простых p . Аналогично не подходит вариант 1), т.к. если $m+n-9 = 1$, то $m+n = 10$, но $m+n = 13p^2 \geq 5^2 \neq 10$. Рассмотрим вариант 2), когда $m+n-9 = p$ и $m+n = 13p$, тогда $13(m+n-9) = m+n$, $12(m+n) = 117$, $m+n = \frac{117}{12}$ — нецелое, что невозможно, т.к. m и n — натуральные. Остается только вариант $m+n = 13$, $m+n-9 = p^2 = 4$. Тогда $B = 75q^2 = mn(m+n-3) = 10mn = 75q^2$, откуда $2 \cdot mn = 15q^2$. Тогда $q \div 2$, но q — простое, тогда $q = 2$, $mn = 30$

$\begin{cases} mn = 30, & (1) \\ m+n = 13, & (2) \end{cases}$ подставим это в (1): $m^2 - 13m + 30 = 0$
 $D = 49$, $m = \frac{13 \pm 7}{2} = 10$, $n = \frac{13 - 7}{2} = 3$,

$m = 10$, $n = 3$; если $m = 3$, то $n = 13 - m = 10$. Есть уже пары решений: $(10; 3)$, $(3; 10)$.

Рассмотрим второй случай, когда $A = 75q^2$ и $B = 13p^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $A = 75q^2$, $B = 13p^2$. Разложим число B на множители:

$$B = mn(m+n-3) = 13p^2. \text{ Тогда:}$$

mn	$(m+n-3)$
1	$13p^2$
p	$13p$
p^2	13
13	p^2
$13p$	p
$13p^2$	1

случай 1) не подходит, т.к. m и n -

натуральные, то если $mn=1$, то

$m=1$, $n=1$, тогда $13p^2 = -1 < 0$,

что невозможно.

случай 6) невозможен, т.к.

$m+n-3=1$, значит $m+n=4$

m и n - натуральные, значит,

возможны случаи $1+3=4$, $2+2=4$, $3+1=4$, но в этих

случаях максимальное значение mn равно 4

при $m=n=2$, но $mn = 13p^2 \geq 13 \cdot 2^2 = 52 > 4$.

случай 3) невозможен, т.к. $m+n-3=13$, $m+n=16$.

Рассмотрим, чему может быть равно m и n , чтобы mn

было квадратом: $1+15=16$, $1 \cdot 15 \neq p^2$; $2+14=16$,

$2 \cdot 14 \neq p^2$; $3+13=16$, $3 \cdot 13 \neq p^2$; $4+12=16$, $4 \cdot 12 \neq p^2$;

$5+11=16$, $5 \cdot 11 \neq p^2$; $6+10=16$, $6 \cdot 10 \neq p^2$; $7+9=16$, $7 \cdot 9 \neq p^2$.

(если m и n поменять местами, будет аналогично)

и остается $m=n=8$, тогда $mn=64=p^2$.

рассмотрим $A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2$

$$7 \cdot 16 = 75q^2, \text{ тогда } q \div 2, \text{ но } q - \text{ простое,}$$

тогда $q=2$; но левая часть не делится на 5, а

правая делится, противоречие.

случай 4) невозможен, т.к. если $mn=13$, m, n - натур.

то $m=1$, $n=13$ либо $m=13$, $n=1$, но тогда $1+13-3=$

$$= 11 \neq p^2.$$

рассмотрим, когда $mn=p$ и $m+n-3=13p$.

$$\text{Тогда } 13mn = m+n-3; \quad A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2$$

$$\text{Левая часть} = 13mn + 3 \quad A = (13mn - 6)(13mn + 3) = 75q^2.$$

$$\text{Т.к. } -6 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ то } 13mn - 6 \equiv 13mn + 3 \pmod{3}.$$

Т.к. правая часть равенства делится на 3, то левая

тоже делится. Т.к. 3 - простое число, то значит, что

одна из ~~двух~~ ~~сторон~~ множителей $13mn-6$ и $13mn+3$ делится на 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

но как я сказал ранее, $13mn - 6 \equiv 13mn + 3 \pmod{3}$, тогда вторая скобка делится на 3 тоже. Тогда левая часть равенства делится на 9, тогда и правая делится на 9. Но т.к. $75 = 3 \cdot 5^2$, то $9^2 \mid 3$, но 9 - простое, тогда $9 = 3$.

$$(13mn - 6)(13mn + 3) = 75 \cdot 9 = 675$$

пусть $13mn = x$, тогда $x^2 - 3x - 675 = 0$
 $x^2 - 3x - 693 = 0$

$D = 9 + 693 \cdot 4 = 2781 = 9 \cdot 309 = 9 \cdot 3 \cdot 103$ - не квадрат, тогда \sqrt{D} - иррациональное число, тогда x - иррациональное, но m и n - натуральные, тогда $13mn$ - число. Противоречие.

Остается случай $mn = 13p$ и $m+n-3 = p$

$$A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2$$

$$13(m+n-3) = mn, \text{ откуда } m+n = \frac{mn}{13} + 3 = \frac{mn+39}{13}$$

$$\left(\frac{mn+39}{13} - 9\right) \left(\frac{mn+39}{13}\right) = 75q^2$$

$$(mn+78)(mn+39) = 169 \cdot 75q^2$$

$78 \equiv 3, 39 \equiv 3$. Тогда $mn+78 \equiv mn+39 \pmod{3}$. правая часть равенства делится на 3, тогда левая тоже. Тогда один из множителей $mn+78$ и $mn+39$ также делится на 3 т.к. 3 - простое, но тогда и вторая скобка второй множитель тоже делится тогда $(mn+78)(mn+39) \equiv 9$, тогда $75q^2 \equiv 9$, тогда $q^2 \equiv 3$, q - простое, тогда $q = 3$.

Пусть $mn+39 = x$, тогда $(x+39)x = 9 \cdot 75 \cdot 169$

$$x^2 + 39x - 53325 = 0. \quad D = 39^2 + 4 \cdot 53325 = 213821$$

$462^2 = 213444$, $463^2 = 215569$, значит, $462^2 < D < 463^2$ тогда \sqrt{D} - иррациональное число, тогда x - иррациональное число, но



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = mn + 39$, m, n — натуральные, тогда x — целый.
Противоречие. Тогда если $4mn = 13p$ и $m+n-3=p$,
то нет решений.

Ответ: пары решений $(m; n)$ это $(10; 3)$ и $(3; 10)$.

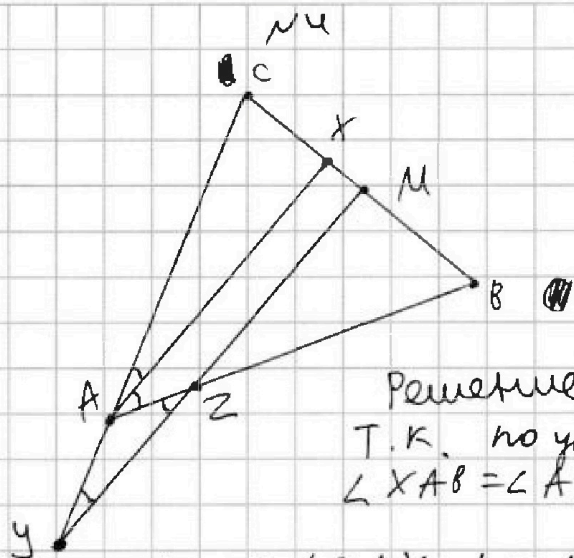


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$, AX - биссект.
 M - середина CB
 $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$
 $YM \parallel AX$
 $BC = ?$

Решение:

Т.к. по условию $ZM \parallel AX$, то $\angle XAB = \angle AZY$ как накрест лежащие

пусть $\angle CAK = \alpha = \angle XAB = \angle AZY$.

тогда $\angle CAB$ - внешний для $\triangle AZY$, тогда:
 $\angle + \angle = \alpha + \angle AYZ$ ($\angle CAB = \angle AYZ + \angle AZY$), откуда
 $\angle AYZ = \alpha$. тогда $\triangle AZY$ - равнобедренный, и
 $AZ = AY = 6$

Растишем т. Менелая для $\triangle CAB$ и секущей YM :

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{ZB}{AZ} \cdot \frac{AY}{CY} = 1. \quad \text{Т.к. } M \text{ - середина } BC, \text{ то}$$

$$CM = MB, \quad \frac{CM}{MB} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{ZB}{6} \cdot \frac{6}{18} = 1, \quad \text{откуда } ZB = 18; \quad AB = AZ + ZB = 24$$

Растишем т. косинусов для $\triangle AZY$ и выразим из неё $\cos \angle YAZ$:

$$36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ = 64$$

$$8 = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ, \quad \cos \angle YAZ = \frac{1}{9}.$$

Т.к. $\angle CAB + \angle YAB = 180^\circ$, то $\cos \angle CAB = -\cos \angle YAZ = -\frac{1}{9}$.
 растишем т. косинусов для $\triangle CAB$:

$$CB^2 = 18^2 + 24^2 + 2 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \frac{1}{9} = 996$$

$$CB = 2\sqrt{249}. \quad \text{Ответ: } CB = 2\sqrt{249}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

из (2) получаем, что:

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

т.к. y и x - подкоренные выражения, то $y \geq 0$ и $x \geq 0$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = (\sqrt{y} - \sqrt{x})$$

если $\sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0$, то можем разделить обе стороны равенства на $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$, получим:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = -1 \text{ что невозможно, т.к. } x \geq 0, y \geq 0 \text{ как я сказал ранее, но тогда левая часть равенства положительна, а правая отрицательна.}$$

Тогда $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, $x = y$. Подставим это в (1), получим:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

ОДЗ: $-1 \leq x \leq 6$, тогда все подкоренные неотрицательны

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} + \sqrt{6-x}$$

получается, т.к. левая часть равенства - возрастающая, а правая - убывающая, то есть всего 1 корень

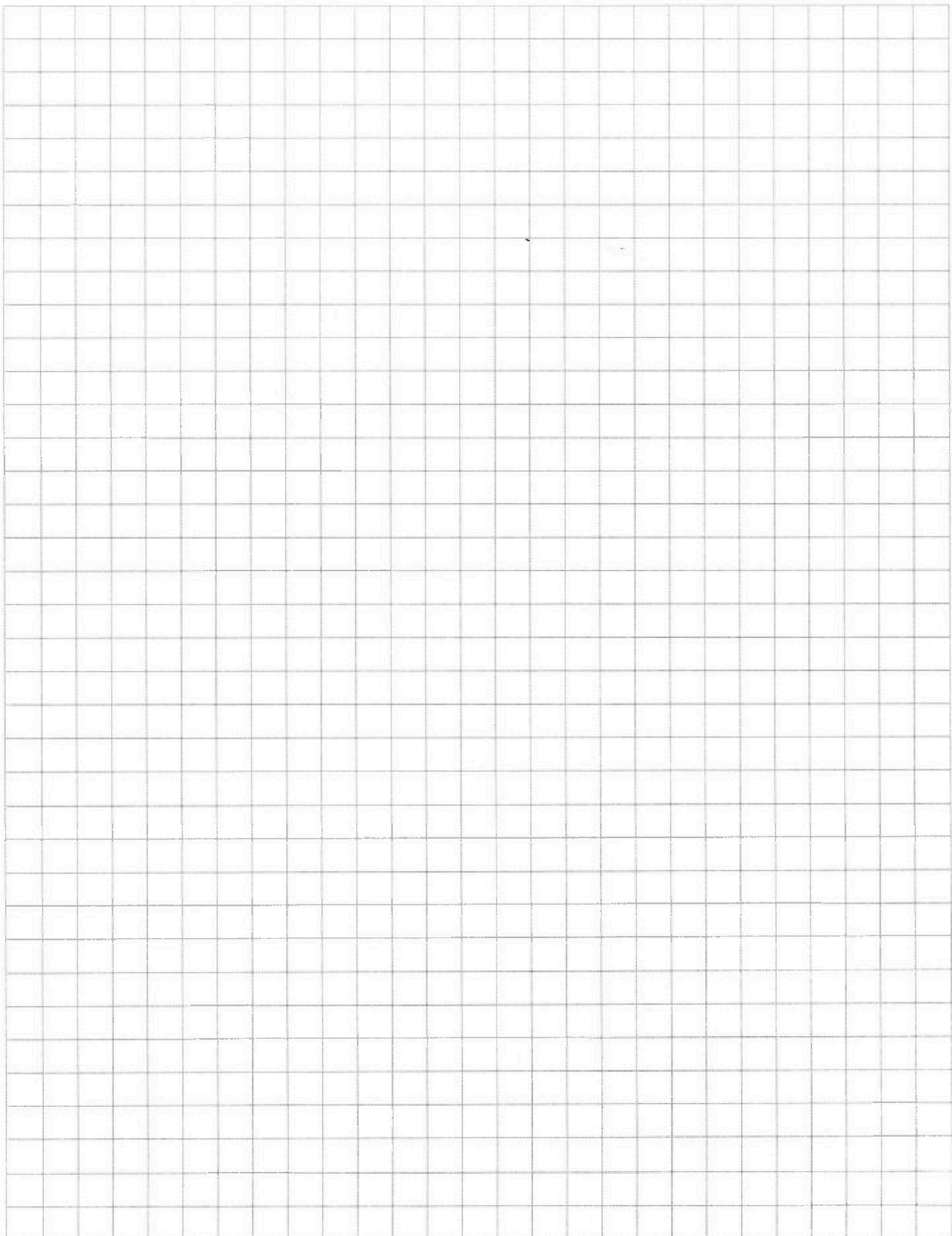


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

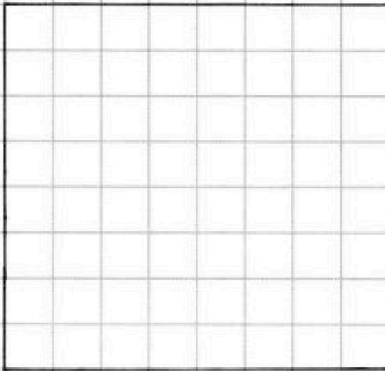
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Вопрос узлов



общее число узлов равно $9 \cdot 8 \cdot 2$
 (9 - кол-во узлов в 1 столбце,
 8 - кол-во столбцов, ~~умножить~~
 умножаем $9 \cdot 8$ на 2,
 т.к. есть еще и узлы в
 строках, и их столько же,
 сколько в столбцах).

Можем выбрать 2 узла $9 \cdot 8 \cdot 2 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 2 - 1)$
 способами, но т.к. ~~так~~ ~~также~~ порядок выбора
 нам не важен

Этих 2 узла, то число способов нужно разделить
 на 2, итого $9 \cdot 8 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 2 - 1)$ способов. Но
 каждой из способов мы посчитали 4 раза
 (т.к. ~~каждый~~ можно повернуть доску 3 раза и
 этот способ будет считаться одним и тем же,
 итого по 4 раза посчитали каждый способ),
 поэтому получившееся число нужно еще
 поделить на 4, что получаем $36 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 2 - 1) =$
 $= 36 \cdot 143 = 5148$ способов.

Ответ: 5148 способов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a - первая, d - разность
 $a + 8d = 3x^2$

$a + 2d = 3x + 3$, $a + 4d = (x^2 + 2x)^2$
 $x > 0$

$2d = (x^2 + 2x)^2 - (3x + 3)$ $6d = 3x^2 - 3x - 3$

~~$4d = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2$~~

$2d = x^2 - x - 3 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$

$x = -1 \checkmark$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline 5x^3 + 3x^2 \\ -5x^3 + 5x^2 \\ \hline -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

0 1 3

$4d = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^4 - 4x^3 - x^2$

$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3)$

$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$

$|x - 3y| \leq 3$

$|3x - y| \leq 1$

$3x + 3^y < 3x^2$

$x - 3y \in [-3; 3]$

$3x - y \in [-1; 1]$

~~$3x + 3^y < 3x^2$~~

$x^2 - x - 1 > 0$
 $D = 1 + 4 = 5$
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x \in \text{range}(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-3)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 + 3mn = mn(m+n+3)$$

$$\begin{array}{r} 462 \\ \times 462 \\ \hline 2924 \\ + 2772 \\ \hline 21558 \\ \times 1344 \\ \hline 2778 \\ 185 \\ \hline 215589 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 463 \\ \times 463 \\ \hline 2778 \\ + mn \cdot 2589 \\ \hline 185 \\ \hline 215589 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 675 \\ \hline 769 \\ \hline 6075 \\ 050 \\ \hline 675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13p \\ \times 13p \\ \hline 169 \\ \hline 13p^2 \\ \hline 169p^2 \end{array}$$

$$mn(m+n-3) = 13p^2$$

13p	p
13	p^2
p^2	13
p	13p
1	13p^2

$$\begin{aligned} \Delta &= 169 - 120 = 49 \\ n_1 &= \frac{20 + 7}{2} = 10, m = 3 \\ n_2 &= \frac{13 - 7}{2} = 3, m = 13 \end{aligned}$$

$$B(40-1)^2 = 1600 - 80 + 7 = 1527$$

$$\begin{array}{r} 1112 \\ \times 53325 \\ \hline 213300 \\ 218521 \\ \hline 2293821 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ + 22500 \\ \hline 22660 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ \times 84 \\ \hline 2208 \\ 22080 \end{array}$$

4	12
5	11
6	10
7	9
8	8

$$13(m+n-3) = mn$$

$$13m + 13n - 39 = mn$$

$$mn = \frac{mn + 39}{13}$$

$$900 + 3mn = m+n-3$$

$$= 810000$$

$$500 = 250000$$

$$400 = 160000$$

$$75q^2$$

$$675$$

$$693 = 4 = 2400 + 360 + 12 = 2772$$

$$q^2 = 3, q = \sqrt{3}$$

$$mn = 13 \quad mn \left(\frac{m+39}{13} - 9 \right) \left(\frac{m+39}{13} \right) = 75q^2$$

$$(mn-78)(m+39) = 165 \cdot 75q^2$$

$$53325$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \\ x^3 + x^2 \\ \hline 2x^2 - 2 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \quad ((\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 1$$

4

$$3x^2 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(3+1-2\sqrt{3}) =$$

$$= 12 - 6\sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3} + 6(4 - \frac{\sqrt{3}}{2})}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 12 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} (x^2 + 2x)^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 2$$

= 4

$$3x^2 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$2d = 4 - 3\sqrt{3}$$

$$6d = 12 - 9\sqrt{3}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad (x^2 + 2x)^2 = ((\sqrt{3}+1)^2 - 2\sqrt{3} - 2)^2 =$$

$$= 4 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 = 2 + \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad 2-\sqrt{3}+5 = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5 \quad \sqrt{5}-\sqrt{2}+5 = 2\sqrt{10}$$

$$\cancel{18\sqrt{6+5x-x^2}} - 2\sqrt{6+5x-x^2} = \cancel{18} + 24 + 20x - 4x^2 -$$

$$- 20\sqrt{6+5x-x^2} \quad \begin{matrix} \times 42 \\ \hline 84 \\ + 168 \\ \hline 2176 \end{matrix} \quad \sqrt{6+12,5-6,25} =$$

$$18\sqrt{6+5x-x^2} = -4x + 20x + 42 = \begin{matrix} \times 42 \\ \hline 168 \\ + 840 \\ \hline 1008 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 324 \\ \times 5 \\ \hline 1620 \\ + 100 \\ \hline 1720 \end{matrix}$$

$$x+7=6-x \quad x=0,5 \quad \begin{matrix} 324 \cdot 6 = 1900 + 120 \\ 7764 - 1944 = -180 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3240 \\ + 336 \\ \hline 3576 \\ - 1620 \\ \hline 1956 \end{matrix}$$

$$324 \cdot 6 + 324 \cdot 5x - 324x^2 = 16x^4 + 400x^2 + 42^2 -$$

$$- 160x^3 - 8 \cdot 42x^2 + 80 \cdot 42x$$

$$16x^4 - 160x^3 + 324x^2 - 8 \cdot 42x^2 + 80 \cdot 42x - 324 \cdot 5x +$$

$$+ 42^2 - 324 \cdot 6 = 0$$

$$16x^4 - 160x^3 - 12x^2 + 1740x - 180 = 0$$

$$a+2d = 3x+3 \quad a+4d = (x^2+2x)^2 \quad a+8d = 3x^2$$

$$2(x^2+2x)^2 - 3x - 3 = 3x^2 - (x^2+2x)^2$$

$$2(3x^4 + \frac{12}{2}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{6}{2}x - \frac{6}{2}) = \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{2x} - \cancel{2}$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad \begin{matrix} \times 10 \\ \hline 10x+10 \\ \hline 10x+10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \times 1 \\ \hline 10 \\ \hline 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \times 1 \\ \hline 10 \\ \hline 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \times 1 \\ \hline 10 \\ \hline 10 \end{matrix}$$

$$x^4 + x^3 \quad \begin{matrix} \times 3 \\ \hline 3x^3+3x^2 \\ + 3x^3+3x^2 \\ \hline -2x-2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \times 3 \\ \hline 3x^3+3x^2-2 \\ \hline x^2(x+3) \end{matrix}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^2(x+3)$$

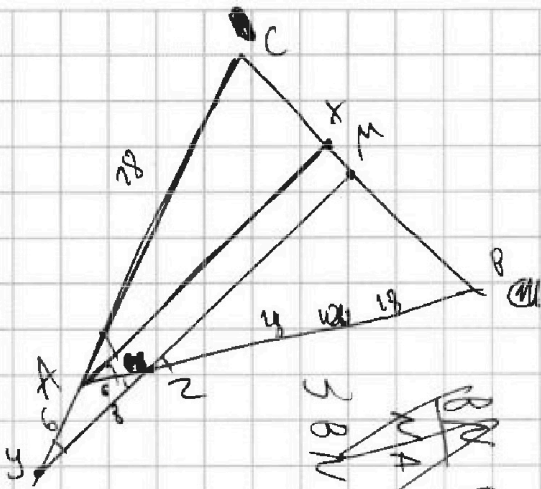


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 18, AZ = 6, YZ = 8$$

$$BC = ?$$

$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + XM}{24}$$

$$\begin{array}{r} 249 \overline{) 3} \\ 83 \end{array}$$

$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + XM}{24}$$

$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + XM}{24}$$

$$\frac{MP}{MP + XM} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{CX}{18} = \frac{CX + 2XM}{8} \quad (20-2)^2 = 400 - 80 + 4$$

$$36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 36$$

$$\cos 2\alpha =$$

$$48 \cos \alpha = 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$18^2 + 24^2 + 4 \cdot 24$$

$$= 324 + 576 + 96 =$$

$$= 900 \quad 996$$

$$1000 = 25 \cdot 40 \quad 250 \cdot 4$$

$$249 \cdot 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 - y^4 = \sqrt{y} - \sqrt{x} + 5y^2 - 5x^2$$

$$(\sqrt{x})^4 - (\sqrt{y})^4 = \sqrt{y} - \sqrt{x} + 5((\sqrt{y})^4 - (\sqrt{x})^4)$$

$$((\sqrt{x})^4 - (\sqrt{y})^4) \cdot ((\sqrt{x})^4 + (\sqrt{y})^4) = (\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 5 \frac{((\sqrt{y})^4 - (\sqrt{x})^4)}{((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2)}$$

$$((\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2) \cdot ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2) \cdot ((\sqrt{x})^4 + (\sqrt{y})^4) = (\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 5 \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \cdot ((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2)}{((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2)}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2) \cdot ((\sqrt{x})^4 + (\sqrt{y})^4) = (\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (1 + 5(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \cdot ((\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x})^2))$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \quad \sqrt{x} = \sqrt{y}, \quad x = y \quad x \geq -1, \quad x \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\begin{matrix} a & b \\ \hline a - b + 5 = 2ab \end{matrix}$$

$$a + 5 = 2ab + b$$

$$a + 5 = b(2a + 1)$$

$$b = \frac{a+5}{2a+1}$$

$$\sqrt{6-x} = \frac{\sqrt{x+1} + 5}{2\sqrt{x+1} + 1}$$

$$x+1 + 6 - 2x + 25 +$$

$$+ 10\sqrt{x+1} - 10\sqrt{6-x} -$$

$$- 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 24 + 20x - 4x^2$$

~~$$2\sqrt{(6-x)(x+1)} + \sqrt{6-x} = \sqrt{x+1} + 5$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

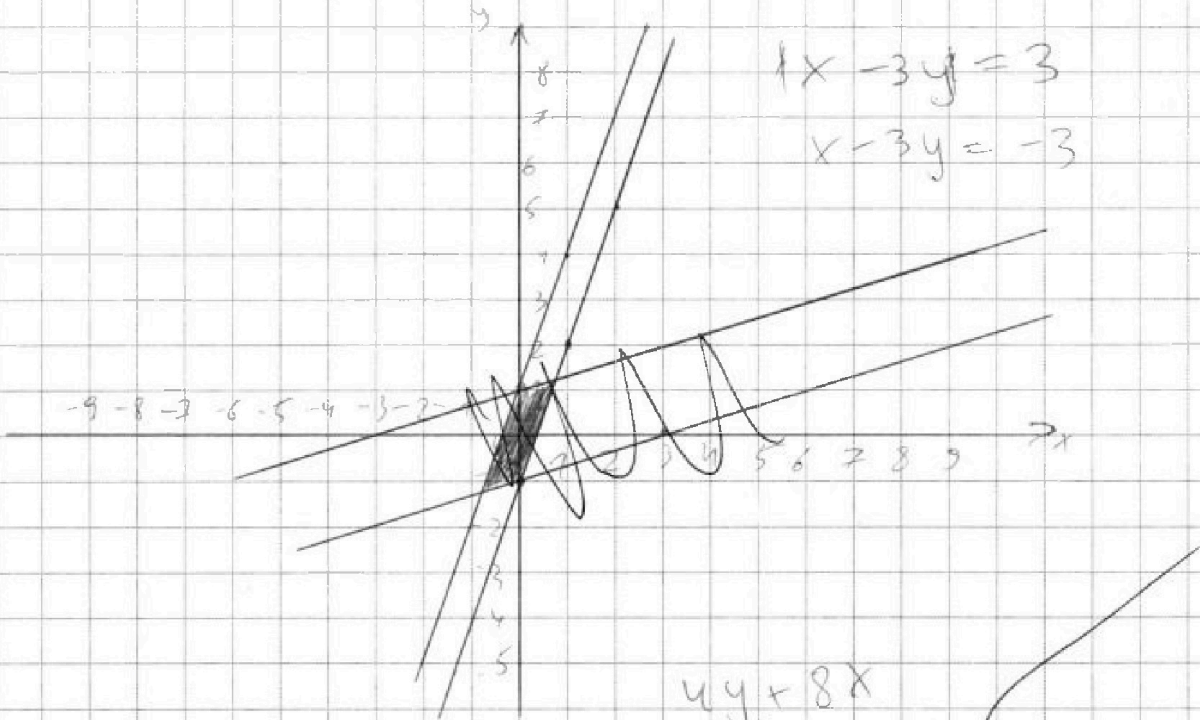
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$|x-3y| \leq 3$$



$$x - 3y = 3$$

$$x - 3y = -3$$

$$4y + 8x$$

$$3x - y$$

$$3x - y = 1$$

$$3x - y = -1$$

~~$$45 + 6 = 420 + 500$$~~

~~$$500$$~~

~~$$300 + 300 = 90 = 500$$~~

~~$$m \cdot n \cdot (m + n - 3) = 30 \cdot 10 = 300 = 75 \cdot 4$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} x &\neq 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

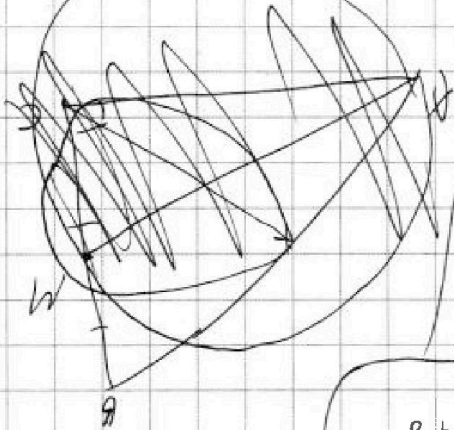
$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) =$$

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

~~$$(x^2 + y^2 + 5)(x + y)(x - y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$~~



$$4 \leq 2x - 2y$$

$$8 \leq 2x - 2y$$

$$4 \leq 2y + 6xy - 2x$$

$$8 \leq 2y + 6xy - 2x$$

$$\begin{cases} |3x - y| \leq 1 \\ |x - 3y| \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 2 \cdot 8 \\ \hline 4 \cdot 2 \cdot 9 \\ + 8 \cdot 5 \cdot 8 \\ \hline 3 \cdot 6 \\ 8 \cdot 7 \cdot 3 \\ \hline 2 \cdot 4 \end{array}$$

$$9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot (9 \cdot 9 \cdot 2 - 1)$$

~~$$9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2$$~~

$$2 \cdot 9 = 4 + 3 \cdot 2 \cdot 3 \quad 6 \cdot 9 = 12 + 9 \cdot 2$$