



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$a_4 = \frac{\sqrt{15k+6}}{(k-3)^3}$$

$$a_{10} = k+4$$

$$a_{12} = \sqrt{(15k+6)(k-3)}$$

$$a_1 \cdot q^3$$

$$a_1 \cdot q^9$$

$$a_1 \cdot q^{11}$$

$$a_1^2 \cdot q^{14} = \frac{15k+6}{k-3}$$

$$a_{10} = k+4$$

$$a_1 \cdot q^9 = k+4$$

т.к. a_1 и q — положительные числа, то $\frac{15k+6}{k-3} \geq 0$, откуда $k \geq 3$.
 Пусть $a_1 \cdot q^9 = k+4$, тогда $a_1 \cdot q^4 = \frac{k+4}{q^5}$.
 Тогда $a_1 \cdot q^4 = \frac{\sqrt{15k+6}}{(k-3)^3} = \frac{k+4}{q^5} \geq 0$, откуда $k \geq 3$.

$$\frac{a_3}{a_4} = q^4 = k-3$$

$$q^2 = \sqrt{k-3}$$

Все $k \geq 3$, откуда $a_{10} > 0$, $a_{12} \geq 0$

$(k+4) \cdot \sqrt{k-3} = \sqrt{(15k+6)(k-3)}$, т.е. либо $k-3=0$,
 либо возводим в квадрат, где $k-3$ сокращается в знаменателе
 тогда получаем $k+4 = \sqrt{15k+6}$

$$k^2 + 16k = k^2 + 8k + 16 = 15k + 6$$

$$k^2 - 7k + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9$$

$$k = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2$$

Заметим, что $k=2$ не подходит, ведь $q^4 = k-3 = -1$
 невозможна.

Ответ: $k=5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$|y-20| + 2|x-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$x+4+5-x-3z - 2\sqrt{(x+4)(5-x-3z)} = 4y - 8x - 4x^2 + 4z + 36 - 12\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$12 - 3z - 2\sqrt{x-} \quad 5x - x^2 - 3xz + 35 - 4x - 21z = 4y - 8x - 4x^2 + 4z + 36 - 12\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$y \leq 20$$

$$y - 20 + 2y$$

$$20 - y + 40 - 2y = \sqrt{225 - z^2}$$

$$60 - 3y = \sqrt{225 - z^2}$$

$$20$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$\cos 3\pi + 6 \cos \pi = 3 \cos 2\pi + p$$

$$\begin{aligned} \cos 3\pi &= \cos 2\pi \cdot \cos \pi - 2 \sin^2 \pi \cdot \cos \pi = \cos 2\pi \cdot \cos \pi - \\ &- 2 \cdot (1 - \cos^2 \pi) \cdot \cos \pi = (2 \cos^2 \pi - 1) \cdot \cos \pi - 2(1 - \cos^2 \pi) \cdot \cos \pi = \\ &= 4 \cos^3 \pi - 3 \cos \pi \end{aligned}$$

$$4 \cos^3 \pi - 3 \cos \pi + 6 \cos \pi = 3(\cos^2 \pi - 1) + p$$

$$4 \cos^3 \pi + 3 \cos \pi - 6 \cos^2 \pi = p - 3$$

$$f' = 12 \cos^2 \pi \cdot \sin \pi - 6 \cos \pi \cdot \sin \pi + 3 \cdot \sin \pi$$

$$4 \cos^3 \pi - 4 \cos^2 \pi + \cos \pi - 2 \cos^2 \pi + 2 \cos \pi$$

$$1 \cos \pi - (4 \cdot 2 \cos \pi - 1)^2 - 2 \cos^2 \pi + 2 \cos \pi = p - 3$$

$$\begin{aligned} \cos \pi = 0 & \quad p = 3 & \quad \pi = \pm \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n & \quad \pi = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n \\ (2 \cos \pi - 1)^2 &= 2 \cos \pi + 2 = K \end{aligned}$$

$$2 \cos \pi - 4 \cos^2 \pi + \cos \pi + 3 = K \quad K = 3 + m \cdot \cos \pi$$

$$4 \cos \pi - 6 = m \quad m = \cos \pi$$

3 + 4 =

$$4 \cos^3 \pi + 3 \cos \pi - 6 \cos^2 \pi = p - 3$$

Возьмем производную

$$12 \cos^2 \pi \cdot \sin \pi - 6 \cos \pi \cdot \sin \pi + 3 \sin \pi$$

$$6 \cos \pi \cdot \sin 2\pi - 6 \sin 2\pi + 3 \sin \pi$$

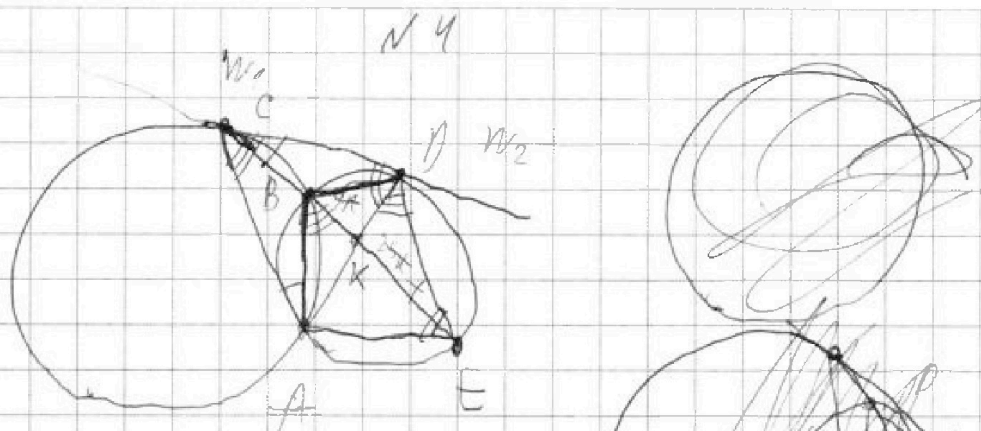


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCB = \angle CAB$$

$$\angle CDA = \angle CDE$$

$$\angle CDK = \angle EDA$$

$$\frac{CE \cdot DK}{SE \cdot DK} = \frac{SE \cdot DK}{S \cdot CDK} = \frac{DE \cdot \sin \angle EDK \cdot DK/2}{BCD \cdot \sin \angle CDK \cdot DK/2} = \frac{DE \cdot \sin \angle EDK}{CD \cdot \sin \angle CDK}$$

$$= \frac{25}{9} \quad \frac{DE}{CD} = \frac{25}{9} \cdot \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$$

$$\angle KDE = \angle ADE = \angle ABE = 180 - \angle CBA$$

$$\sin \angle CBA = \frac{CA}{2R}$$

~~$$\angle CDA = 180 - \angle CBA$$~~

$$\text{из треугольника } CDA: \frac{AC}{\sin \angle CDA} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$$

$$\text{из треугольника } ADE: \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{DA}{\sin \angle DEA}$$

$$AC = DA \cdot \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle CAD}$$

$$AE = DA \cdot \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle DEA}$$

$$AC \cdot AE = DA^2$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin^2 \angle CDA}{\sin^2 \angle DEA}$$

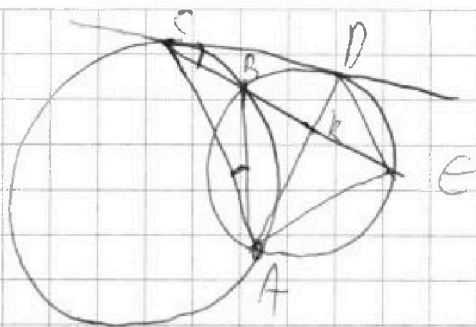


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin^2 \angle CDA}{\sin^2 \angle DEA}$$

~~$$AC \cdot \sin \angle ACD \cdot CD = AC \cdot 9 \cdot \sin \angle CDK \cdot \sin \angle ACD$$~~

~~$$DE \cdot \sin \angle AED \cdot AE = AE \cdot 25 \cdot \sin \angle EDK \cdot \sin \angle AED$$~~

~~$$= \frac{9}{25} - \text{отрабатываем подобием треугольников } \triangle ACD \text{ и } \triangle AED,$$~~

~~отрабатываем подобием, тогда $CK \parallel CE$~~

$$\angle CAD = \angle ADE = 180 - \angle ACD - \angle CDA = 180 - \angle AED - \angle ADE$$

AK - биссектриса угла CAE

Диаметр AC делит хорду CD на две равные части, поэтому треугольники ACD и AED подобны.

$$\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle DEA} = \frac{3}{5} = \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b, \quad a - b \leq 3, \quad (a - c)(b - c) = p^2, \quad a + b^2 = 820$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$p^2 = p \cdot p = 1 \cdot p^2 = -1 \cdot (-p^2) = -p \cdot (-p)$$

$$a - c = b - c = p \quad a - c = b - c = -p$$

невозможны, ведь $a > b$

$$a - c = 1, \quad b - c = p^2; \quad a - c = -p^2, \quad b - c = -1$$

невозможны, ведь $a > b$

получаем, что возможны только случаи

$$a - c = p^2, \quad b - c = 1; \quad a - c = -1, \quad b - c = -p^2$$

1 случай

$$a - b = p^2 + (-1 + 1) = p^2 - 1 \text{ отсюда же можно вывести что}$$

$p = 3$, ведь в остальных случаях $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, что было бы невозможно для уравнения.

$$2 \quad a - c = 9, \quad b - c = 1$$

$$a = c + 9, \quad b = c + 1$$

$$c + 9 + c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$c^2 + 3c + 10 - 820 = 0$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 810 \cdot 4 = 9 \cdot (1 + 40 \cdot 4) = 9 \cdot 361 = 9 \cdot 19^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 3 \cdot 19}{2} = -30; \quad 27$$

получаем решения $(-29, -29, -30), (36, 28, 27)$

2 случай

$$a - b = (c - 1) - (c - p^2) = p^2 - 1 \text{ аналогично получаем } p = 3, \text{ так}$$

$$a - c = -1, \quad b - c = -9 \quad a = c - 1, \quad b = c - 9$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 190 \\ \hline 361 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = c - 1, b = c - 9$$

$$c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c + 80 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0$$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 740 = 42$$

$$4 + 1 + 2 \cdot 4 = 4 + 8 = 12$$

$$17^2 = 4 \pmod{9}$$

$$37^2 = 1 \pmod{9}$$

$$20 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$4 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$D = 4 + 2 \cdot 4 = 12 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$17^2 = 1 \pmod{3}$$

$$37^2 = 1 \pmod{3}$$

$$20 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$D = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

~~анализировать, что квадратичная - не полная квадрат, если бы делится на 3, но не делится на 9, значит решение в целых числах не существует, а по условию c - целое~~

$$\text{Ответ: } \{-21, -29, -30\}, \{36, 28, 27\}$$

$$17^2 + 37 \cdot 80 = 17 \cdot 17 + 17 \cdot 80 + 20 \cdot 80 = 17 \cdot 97 + 20 \cdot 80 =$$

$$= 100 \cdot 17 + 100 \cdot 16 - 17 \cdot 3 = 100 \cdot 33 - 51 =$$

$$= 3300 - 51 = 3249 = 57^2$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 399 \\ 2850 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20, 37$$

$$a = -21$$

получаем решения $(-21, -29, -20), (36, 28, 37)$

$$\text{Ответ: } (-21, -29, -20), (36, 28, 27), (-21, -29, -20), (36, 28, 37)$$

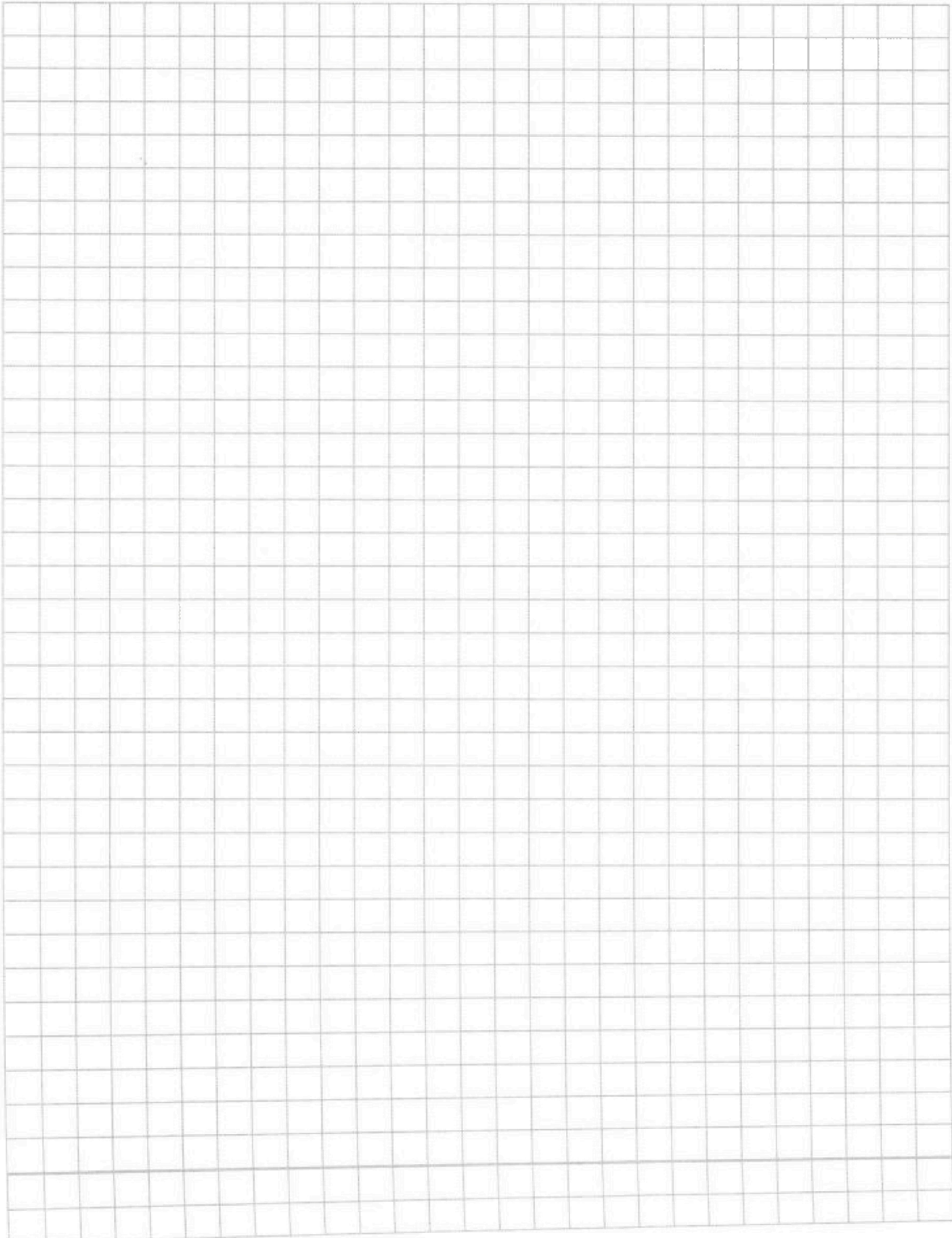


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



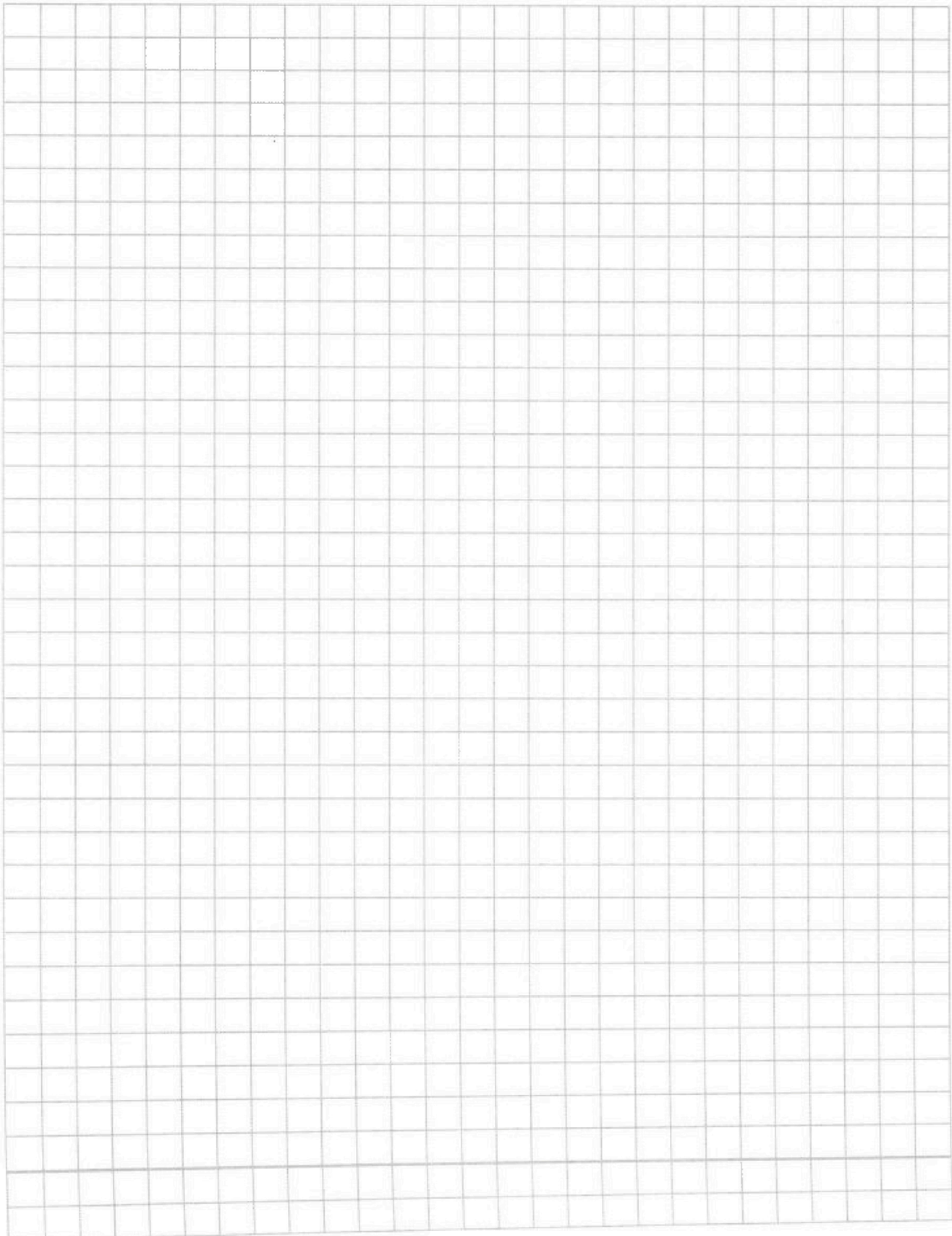


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



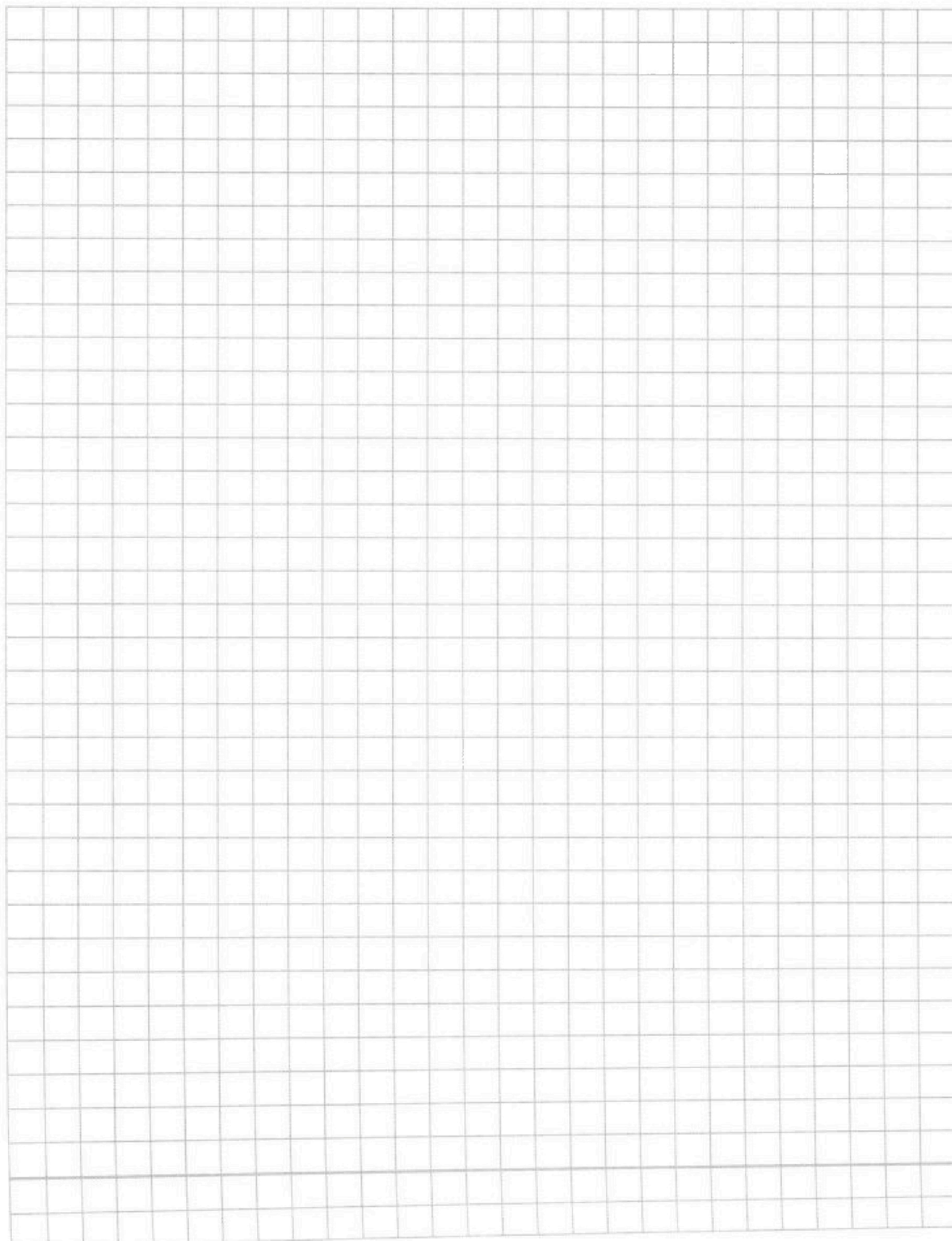


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



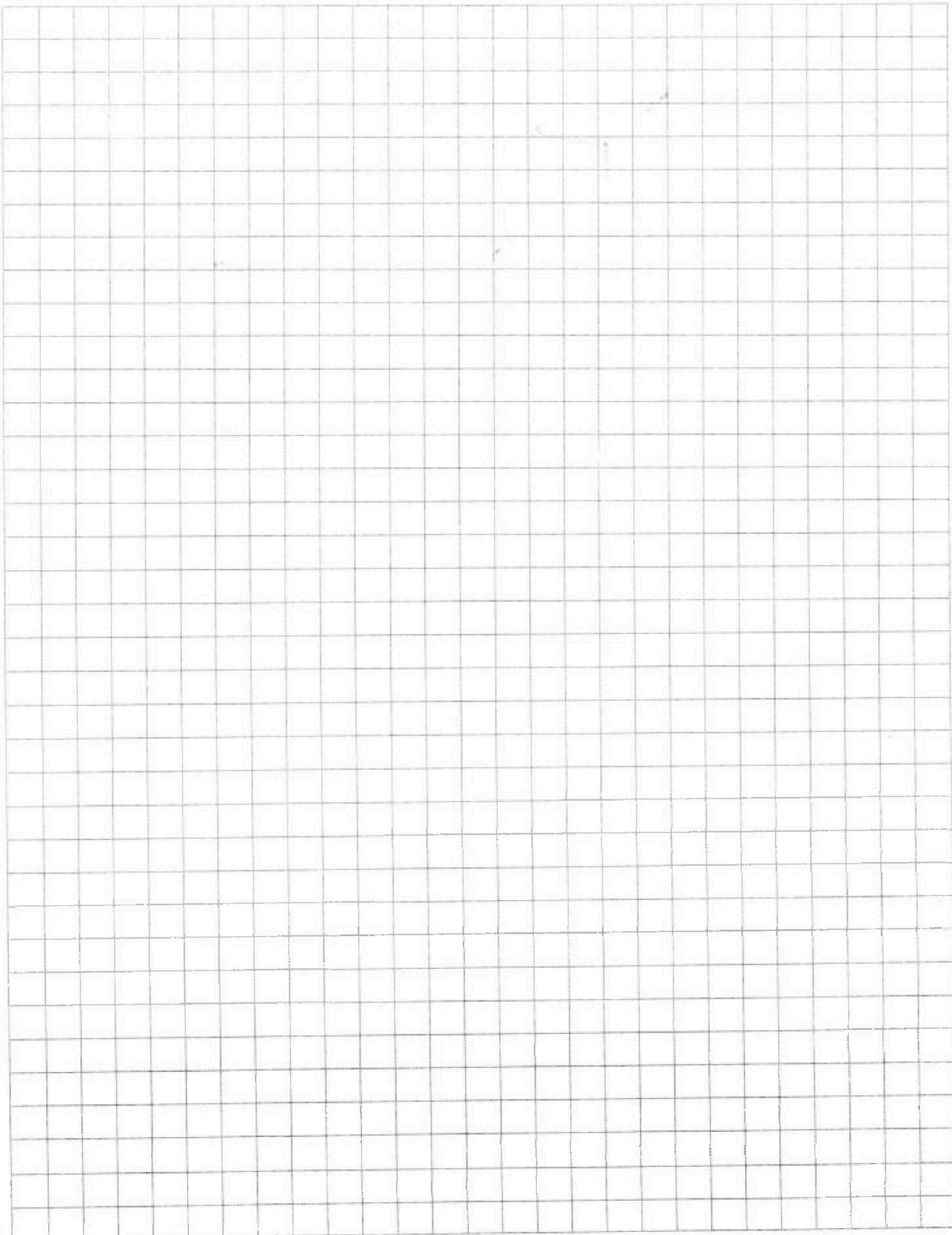


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



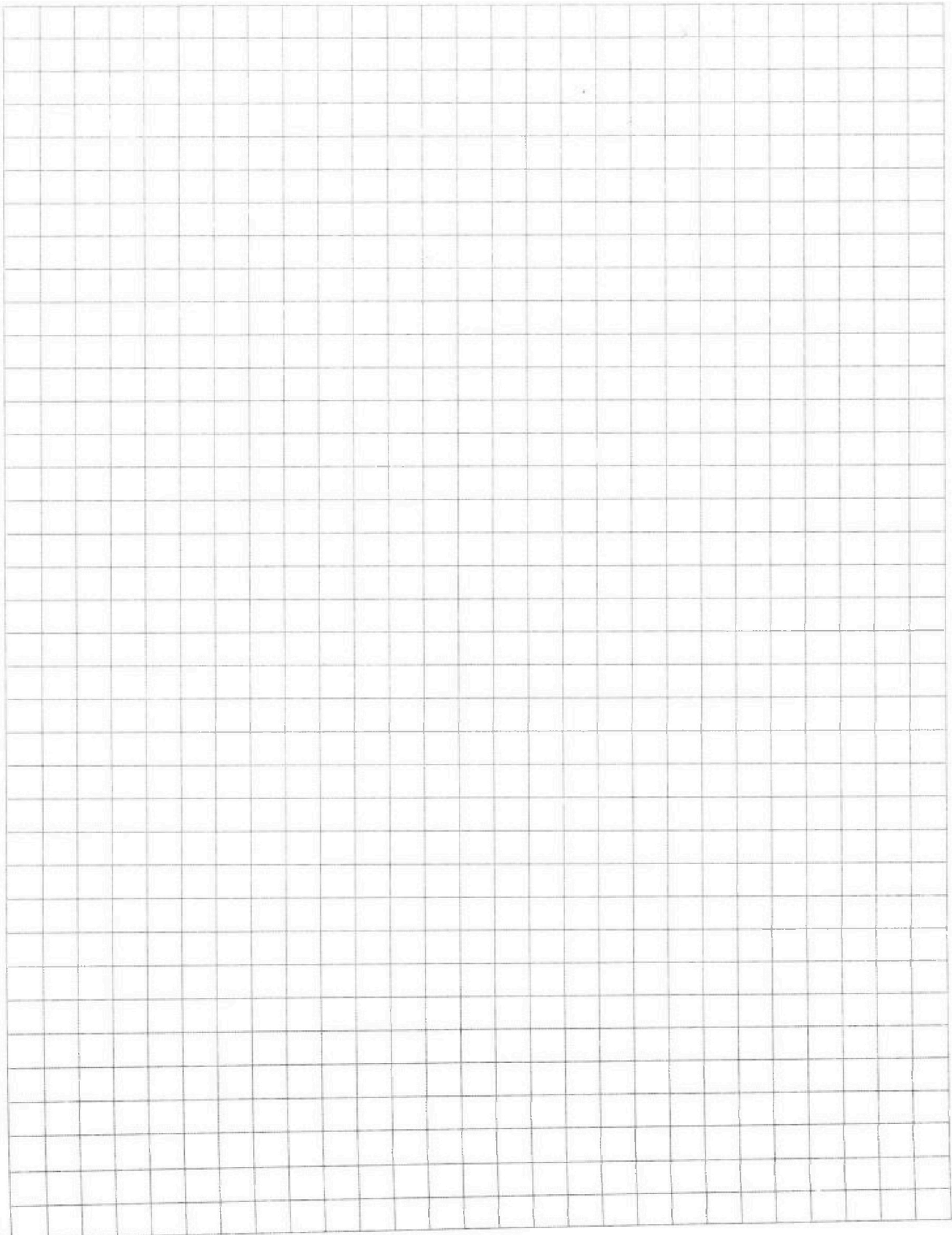


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

