



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Представим a, b, c в виде: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot m$,

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot n$, где: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \in$

$\{0\} \cup \mathbb{N}$ и $k, m, n \in \mathbb{N}$ и $k, m, n \notin \{2, 3, 5\}$.

Из $a \cdot b = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, $b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $a \cdot c = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$ следует:

$$\begin{cases} \textcircled{1} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 9 \\ \textcircled{4} \beta_1 + \beta_2 \geq 10 \\ \textcircled{7} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{2} \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \textcircled{5} \beta_2 + \beta_3 \geq 13 \\ \textcircled{8} \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{3} \alpha_1 + \alpha_3 \geq 19 \\ \textcircled{6} \beta_1 + \beta_3 \geq 18 \\ \textcircled{9} \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}: \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_3 \geq 9 + 14 + 19 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 42 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 21.$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6}: \beta_1 + \beta_2 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_1 + \beta_3 \geq 10 + 13 + 18 \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41 \Rightarrow$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 20,5. \text{ Поскольку } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0\} \cup \mathbb{N}: \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \Rightarrow$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21.$$

$$\textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9}: \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_1 + \gamma_3 \geq 10 + 13 + 30 \Rightarrow 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 53 \Rightarrow$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26,5. \text{ Поскольку } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \{0\} \cup \mathbb{N}: \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 27 \Rightarrow$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 27.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 1~~

Задача 1 (проектная)

Можно считать:

$$a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot \overset{d_1+d_2+d_3}{2} \cdot \overset{d_1+d_2+d_3}{3} \cdot \overset{b_1+b_2+b_3}{5} \cdot \overset{r_1+r_2+r_3}{m \cdot k \cdot n} \cdot$$
$$\cdot \overset{d_1+d_2+d_3}{2} \cdot \overset{b_1+b_2+b_3}{3} \cdot \overset{r_1+r_2+r_3}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \overset{2^1}{2} \cdot \overset{2^1}{3} \cdot \overset{2^7}{5}$$

Ответ: наименьшее возможное значение $a \cdot b \cdot c$

равно $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

Дано:

$\triangle ABC$ - прямо-уг.; CD - высота.

окружность:

касается кривой BC в точке B ,

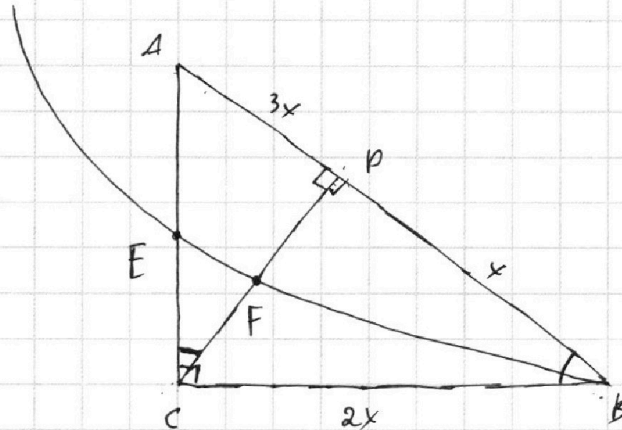
~~касается~~

пересекает ~~кривую~~ BC в F ,

пересек ~~касает~~ AC в E ;

$AB \parallel EF$; $AD:DB = 3:1$.

$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CEF} = ?$



1) Из условия следует, что $\angle ACB = 90^\circ$. Пусть $\angle CBA = \alpha$. Из условия о сумме углов в треугольнике ABC : $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$. Из условия о сумме углов в треугольнике ACB : $\angle ACB = \alpha$.

2) Пусть $AD = 3x \Rightarrow AD:DB = 3:1 \Rightarrow DB = x$. $\angle CDB = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle BDC = \angle BAC \Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow \frac{4x}{CB} = \frac{CB}{x} \Rightarrow 4x^2 = CB^2 \Rightarrow CB = 2x$.

$\angle CDA = \angle BCA = 90^\circ$, $\angle DCA = \angle CBA \Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle BCA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{4x}{AC} = \frac{AC}{3x} \Rightarrow 12x^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}x$$

$$3) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = \frac{4\sqrt{3}x^2}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

Также: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 4x \cdot CD \Rightarrow CD = \sqrt{3}x$

4) $EF \parallel AB$, $FD \perp AB \Rightarrow$ по теореме $EF \perp FD$. $\angle ECF = \angle ACD = \alpha$, $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle EFC$. $EC \neq AC \Rightarrow EF \neq AD$.
Кривая $EF \subset AD$, так как $E \subset AC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

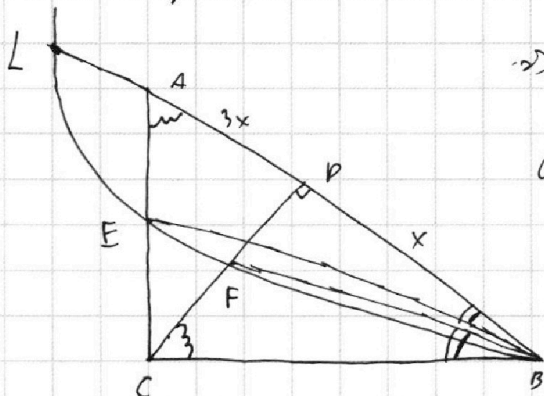
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2 (процентная).

5) Прямая AB отрезана окружностью. Пусть точка пересечения L . В окружности LB и EF - хорды, $LB \parallel EF \Rightarrow$

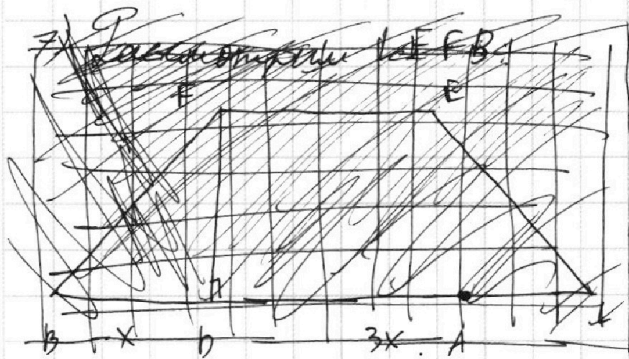


\Rightarrow по теореме $LF = FB$.

6) В ч-г. $LEFB$: $LB \parallel EF$, $LB \neq EF$

\Rightarrow по признаку $LEFB$ - трапеция с основаниями LB и EF . $LE = FB \Rightarrow$

\Rightarrow ~~равно~~ $LEFB$ - равнобедренная трапеция с осн. EF и LB .



7) CB - касательная к окр в точке $B \Rightarrow$
 \Rightarrow по теореме $\angle FBC = \frac{\widehat{FB}}{2}$.

$\angle FLB = \frac{\widehat{FB}}{2}$ как вписанный, опирающийся на \widehat{FB} .

$LEFB$ - равн-бедр. трапеция \Rightarrow

$\Rightarrow \angle EBL = \angle FLB$. Тогда $\angle EBL = \angle FBC$. ~~НЕ~~ $\angle CAB = \angle DCB = 90^\circ - \alpha$.

Тогда имеем: ~~...~~ $\angle FCB = \angle EAB$, $\angle FDC =$

$$= \angle EBA \Rightarrow \triangle FCB \stackrel{\neq}{\sim} \triangle EAB \Rightarrow \frac{FC}{EA} = \frac{CB}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow EA = 2FC$$

8) Пусть $CF = y$. $\triangle ABC \stackrel{\neq}{\sim} \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{EC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2x}{2\sqrt{3}x} \Rightarrow$

$$\frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3}x - 2FC}{2\sqrt{3}x} \quad (x \neq 0) \Rightarrow 2FC = 2\sqrt{3}x - 2FC \Rightarrow 4FC = 2\sqrt{3}x \Rightarrow FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (Геометрия)

$$9) \triangle ADC \stackrel{I}{\sim} \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{DC} = \frac{EF}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\sqrt{3}x} = \frac{EF}{3x} \rightarrow EF = \frac{3x}{2}$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$10) \text{Тогда } S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CEF} = (2\sqrt{3}x^2) : \left(\frac{3\sqrt{3}x^2}{8}\right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}x^2}{3\sqrt{3}x^2} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение).

Ищем: ~~$A(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2})$~~ $A(\frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{11}}{2})$, $B(\frac{13}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3})$

Пусть AB имеет уравнение: $y = kx + b$. Тогда:

$$\begin{cases} \textcircled{1} -\frac{\sqrt{11}}{2} = k \cdot \frac{5}{2} + b \\ \textcircled{2} \frac{\sqrt{11}}{3} = k \cdot \frac{13}{3} + b \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} k = \frac{5\sqrt{11}}{11} \\ b = -\frac{18\sqrt{11}}{11} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: \frac{\sqrt{11}}{3} - \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{13k}{3} - \frac{5k}{2} \quad (\Rightarrow) \quad 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 26k - 15k \quad (\Rightarrow)$$

$$5\sqrt{11} = 11k \quad (\Rightarrow) \quad k = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - \frac{\sqrt{11}}{2} &= k \cdot \frac{5}{2} + b \quad (\Rightarrow) \quad b = -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{11\sqrt{11}}{22} - \frac{25\sqrt{11}}{22} = \\ &= -\frac{36\sqrt{11}}{22} = -\frac{18\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } AB: y = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot x - \frac{18\sqrt{11}}{11}$$

2) Ищем CD :

В силу симметрии относительно O_1, O_2 ищем:

$$CD: y = -\frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot x + \frac{18\sqrt{11}}{11}$$

$$\text{Тогда необходимо: } -\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{\alpha}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{10\sqrt{11}}{11} > \alpha > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$$

$$\text{Ответ: при } \alpha \in \left(\frac{10\sqrt{11}}{11}; -\frac{10\sqrt{11}}{11} \right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

$$\textcircled{2} \begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 2) = 0 \end{cases}$$

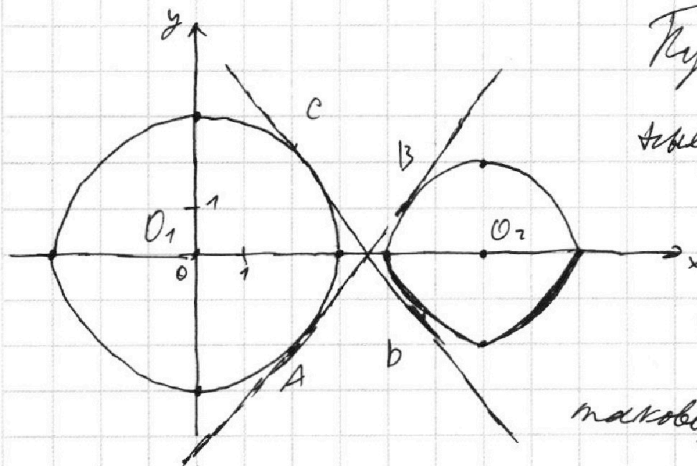
$$\textcircled{1} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 2) = 0$$

$$\textcircled{1} (x^2 + y^2 - 9)(x - 6)^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

Решениями являются все (x, y) , принадлежащие: окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом 3 и окружности с центром $(6; 0)$ и радиусом 2.

$$\textcircled{2} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b.$$

Изобразим на графике: Пусть $O_1(0; 0)$; $O_2(6; 0)$.



Пусть AB и CD — общие касательные,
как показано. Заметим,

что 4 решения будет только

в том случае, если $-\frac{a}{2}$

такое, что прямая из уравнения

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$ имеет корни через пересечение A и C так,

чтобы пересекать окружности. Каждой уравнение

прямых AB и CD .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

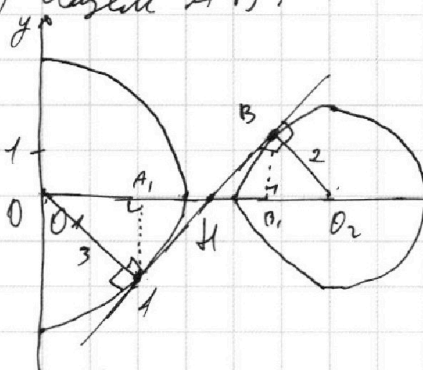


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4 (профильная)

1) Углом AB :



Прямая $AB \perp O_1O_2 = H$. $\angle O_1HA = \angle O_2HB$ как

верт. $\angle O_1HA = \angle O_2HB$, $\angle O_1AH = \angle O_2BH = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle O_1AH \sim \triangle O_2BH \Rightarrow \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow O_1H = \frac{3}{2} \cdot O_2H$$

$$O_1H + O_2H = O_1O_2 (=) \frac{3}{2} O_2H + O_2H = 6 (=) \frac{5}{2} O_2H = 6 (=) O_2H = \frac{12}{5} = 2,4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_1H = 3,6$. Прямая $AA' \perp BB'$ - перп. из A и B на O_1O_2 соотв.

$$\angle O_1AH = \angle O_1A_1A = 90^\circ, \angle A_1O_1H = \angle A_1O_1A \Rightarrow \angle O_1AH \sim \triangle O_1A_1A \Rightarrow \frac{O_1A}{O_1A_1} = \frac{O_1H}{O_1A} (=)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{O_1A_1} = \frac{3,6}{3} (=) O_1A_1 = \frac{9}{3,6} = \frac{5}{1,2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Из теоремы Пифагора для $\triangle O_1A_1A$: $AA_1 = \sqrt{O_1A^2 - O_1A_1^2} =$
 $= \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Тогда $A(2,5; -\frac{\sqrt{11}}{2})$.

$$\angle O_2HB = \angle O_2B_1B, \angle O_2BH = \angle O_2B_1B = 90^\circ \Rightarrow \triangle O_2BH \sim \triangle O_2B_1B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_2B}{O_2B_1} = \frac{O_2H}{O_2B} (=) \frac{2}{O_2B_1} = \frac{2,4}{2} (=) O_2B_1 = \frac{4}{2,4} = \frac{2}{1,2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Из теоремы Пифагора для $\triangle O_2B_1B$: $BB_1 = \sqrt{O_2B^2 - O_2B_1^2} =$
 $= \sqrt{4 - \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$. Тогда $B(\frac{13}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5 (подметие).

$$\textcircled{1} \log_3(x) + \log_3(5y) = 0$$

$$\textcircled{2} 2 \log_3(x) \log_3(5y) (\log_3^2(x) + \log_3^2(5y)) (\log_3(x) - \log_3(5y)) + 7 = 0$$

$$\text{Из } \textcircled{1}: (\log_3(x))^4 + \frac{7}{2} \cdot \log_3(x) = -8.$$

$$(\log_3(x))^4 \geq 0 \rightarrow \frac{7}{2} \cdot \log_3(x) < 0 \Rightarrow \log_3(x) < 0$$

$$\text{Из } \textcircled{2} (\log_3(5y))^4 - \frac{7}{2} \log_3(5y) = -8.$$

$$(\log_3(5y))^4 \geq 0 \rightarrow \frac{7}{2} \log_3(5y) > 0 \Rightarrow \log_3(5y) > 0$$

Можно переписать $\textcircled{2}$:

$$2 \underbrace{\log_3(x)}_{< 0} \cdot \underbrace{\log_3(5y)}_{> 0} \underbrace{(\log_3^2(x) + \log_3^2(5y))}_{\geq 0} \underbrace{(\log_3(x) - \log_3(5y))}_{< 0} + 7 = 0 (\Rightarrow)$$

$$2 \log_3(x) \log_3(5y) (\log_3^2(x) + \log_3^2(5y)) (\log_3(x) - \log_3(5y)) + 7 = 0$$

≥ 0 .

Значит, $\textcircled{2}$ не имеет решений.

$$\textcircled{1} \log_3(x) + \log_3(5y) = 0 (\Rightarrow) \log_3(5xy) = 0 (\Rightarrow) 5xy = 1 (\Rightarrow)$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5.

$$① \begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \log_3^4(5y) + 2 \log_3(3) = \log_{25y}(3^{11}) - 9 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$① \log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \Rightarrow \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x = -8$$

$$② \log_3^4(5y) + 2 \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} - 9 \Rightarrow \log_3^4(5y) - \frac{7}{2} \log_3(5y) = -8$$

①-②:

$$\log_3^4 x - \log_3^4(5y) + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3(5y)} \right) = 0$$

Пусть $a = \log_3 x$; $b = \log_3(5y)$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$):

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) + \frac{7}{2}(a+b) \cdot \frac{1}{ab} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$2ab(b^2 + a^2)(a+b)(a-b) + 7(a+b) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab(b^2 + a^2)(a-b) + 7 = 0 \end{cases}$$

Обратная замена:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Заметим, что для точки $A(x_1; y_1)$ соседней точки B вида: ~~$(x_1 + 1 - k; y_1 + 3k)$~~ $(x_1 + 1 - k; y_1 + 3k)$, где $k \in \mathbb{Z}$ (максимальная точка с целыми координатами).

Заметим, что для точки $A(x_1; y_1)$ в соседней с ней B образуют множество точек, лежащих на прямой, и прямой параллельной стороне параллелограмма OP .

~~Заметим на OP все точки с целыми координатами. Их~~

~~будет 15. Заметим, что для каждой третьей точки (отсчитав считав точку $(0; 0)$) внутри параллелограмма будет 15 точек B , а для каждой только 14 точек~~

Отметим на OP все точки с целыми координатами.

Их будет 15. Заметим, что для каждой из них в параллелограмме попадут 15 точек. Итого: $15 \cdot 15 = 225$.

На OP можно взять любую точку с целыми координатами и провести прямую, параллельную OP . Для них можно провести аналогичные рассуждения.

Какие из них не подходят?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

Условие того, что такая прямая дан посредом, в
следствии: Если $S(x; 0)$ - точка на OR , из которой
мы восстановили прямую, то необходимо, чтобы
 $\angle(S; R) \neq 11$. Это есть, так как $R(20; 0)$ и $O(0; 0)$,
 $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

~~Но если можно построить \neq такие прямые~~
то есть можно построить еще 9 таких прямых,
параллельных OR (при $x=0$ получается именно OR).

Итого кол-во пар точек A и B :

$$225 \cdot 10 = 2250$$

Ответ: 2250 пар.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Пусть прямая AB имеет вид: $y = kx + b$. Найти:

① $y_2 = x_2 k + b$

② $y_1 = x_1 k + b$

③ $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

① - ②: $y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)k$

③ $3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 \Rightarrow (3+k)(x_2 - x_1) = 33$



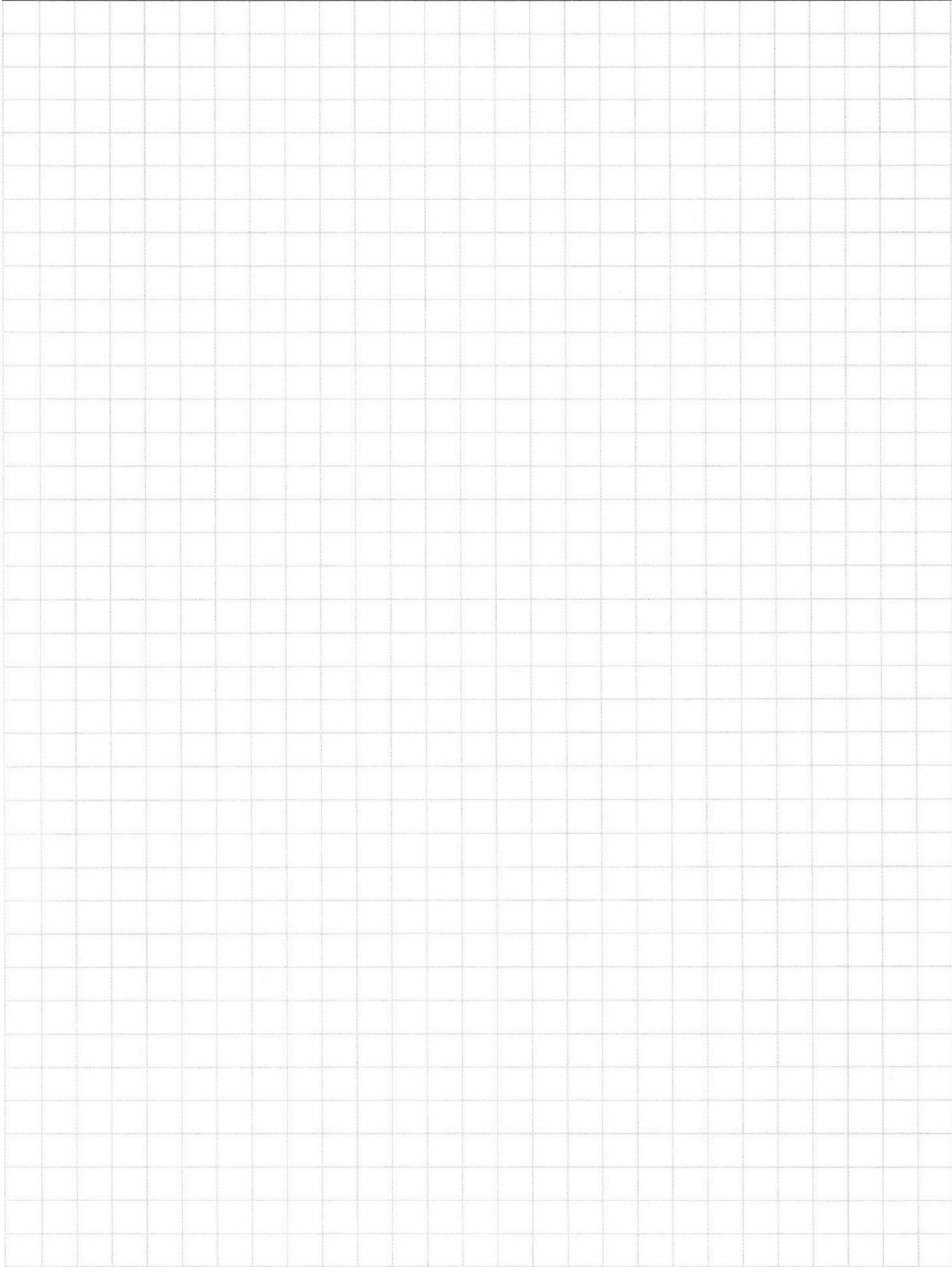
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



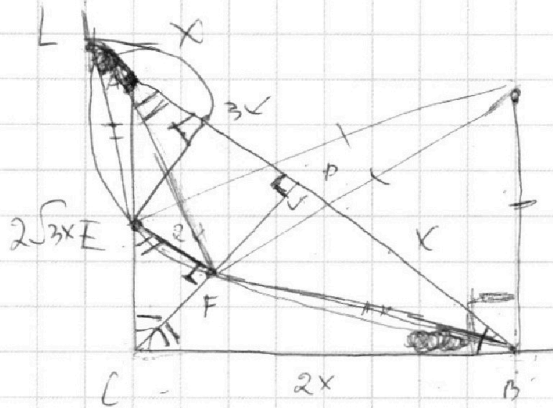
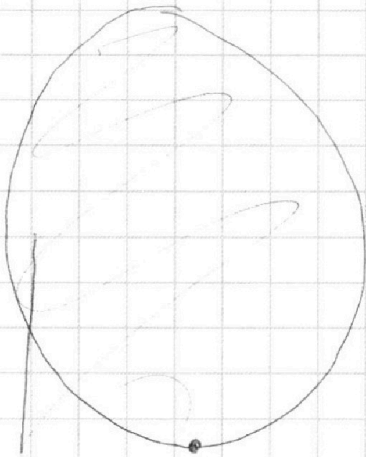
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{PB} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4x}{CB} = \frac{CB}{x} \quad (\Rightarrow) \quad 4x^2 = CB^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4x}{AC} = \frac{AC}{2x} \quad (\Rightarrow) \quad 4x^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3} \cdot x$$

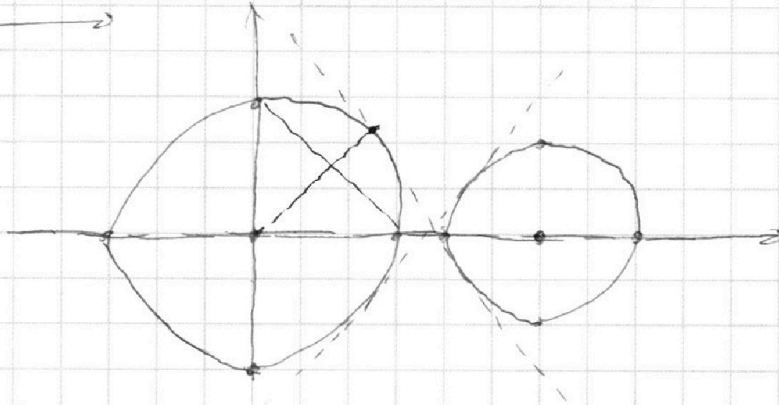
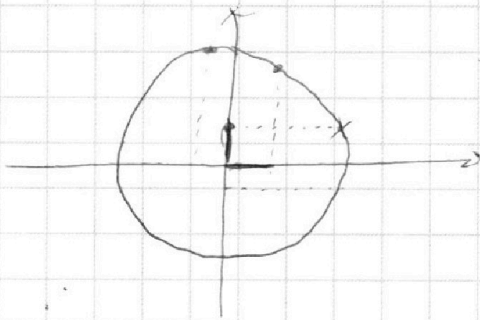
$$2\sqrt{3} \cdot x \cdot 2x = 4x \cdot CB \quad (\Rightarrow) \quad CB = \frac{4\sqrt{3}x^2}{4x} = \sqrt{3}x$$

$$5 \sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

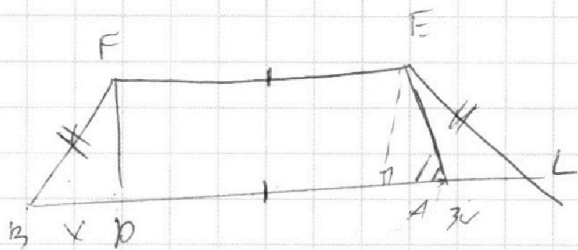
$$5 \sin(\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \quad +2\pi$$



$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}\theta$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot m \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot n$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 9$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 10$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 10$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 13$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 19$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 10$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$$

$$9 + 14 + 15 = 20 + 9 + 4 + 9 = 38 \cdot 4 = 42$$

$$\begin{array}{r}
 19 \\
 + 23 \\
 \hline
 30 \\
 \hline
 42
 \end{array}$$

$$10 + 13 + 18 =$$

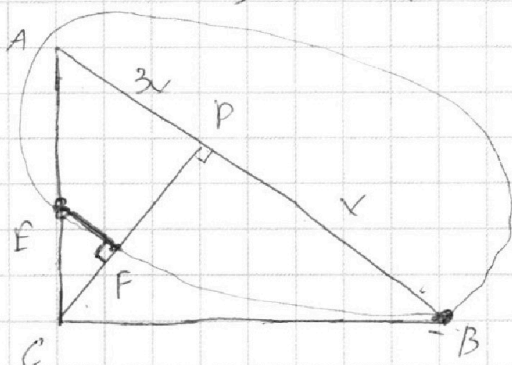
$$\begin{array}{r}
 13 \\
 + 18 \\
 \hline
 20 \\
 + 11 \\
 \hline
 31
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 31} \\
 \underline{4} \\
 13 \\
 \underline{12} \\
 1
 \end{array}$$

$$9 + 14 + 15 = 23 + 15 = 38 \cdot 5 = 42 \quad | : 2 \rightarrow 21$$

$$10 + 13 + 18 = 20 + 31 = 24 \cdot 5 = 20,5 \rightarrow 21$$

$$10 + 13 + 30 = 53 \cdot 2 = 26,5 \rightarrow 27$$



AB // EF

$$S_{\triangle ACP} : S_{\triangle CEF}$$

$$\begin{cases}
 y = kx + b \\
 x^2 + y^2 = 3^2
 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$$

~~*~~

$$x^2 + (kx+b)^2 = 3^2$$

$$(x-6)^2 + (kx+b)^2 = 2^2$$

$$x^2 - (x-6)^2 = 9 - 4 = 5$$

$$(x-6)(x+6)(x-(x-6)) = 5 \quad (2x-6=5) \Rightarrow 2x-6=5 \Rightarrow x = \frac{11}{2} = 5,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_3 5y)^4 + 2 \frac{1}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3(5y)} - 8 \quad t = \log_3(5y)$$

$$t^4 + \frac{2}{t} = \frac{11}{2t} - 8 \quad (\cdot) \cdot 2t \quad 4t^5$$

$$2t^5 + 4 = 11 - 16t \quad (\cdot) \quad 2t^5 + 16t - 7 = 0$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} = -8$$

$$(\log_3 5y)^4 + 2 \frac{1}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2 \log_3(5y)} = -8$$

$$6 \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \dots} = 6 \frac{12}{2 \log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} = \frac{7}{2 \log_3 x}$$

$$\frac{4}{2 \log_3(5y)} - \frac{11}{2 \dots} = -\frac{7}{2 \log_3(5y)}$$

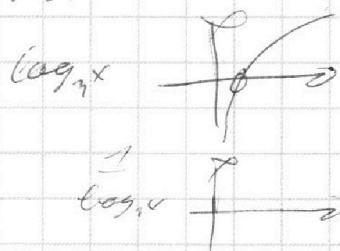
$$(\log_3 x)^4 - (\log_3 5y)^4 + \frac{7}{2 \log_3 x} + \frac{7}{2 \log_3(5y)} = 0$$

$$a = \frac{1}{\log_3 x} \quad b = \frac{1}{\log_3 5y}$$

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2}a + \frac{7}{2}b = 0$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

$$(\log_3 5y)^4 - \frac{7}{2 \log_3(5y)} = -8$$



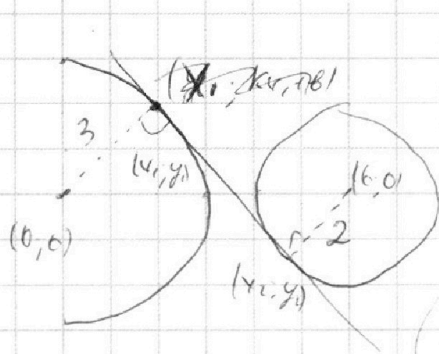
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = kx + b \quad \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

$$y_1 = kx_1 + b \quad \{x_1, y_1\}$$

$$\sqrt{x_1^2 + (kx_1 + b)^2} = 3 \quad \{b - kx_1\}$$

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 3 \quad \{x_2 - 6, y_2\}$$

$$\sqrt{(6 - x_1)^2 + y_1^2} = 2$$

$$x_1(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1) = 0$$

$$(x_1 - 6)(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1) = 0$$

$$x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 + 6x_2 + 6x_1 = 0$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 x_2 + 6x_1 + 6x_2 = 0 \quad (-)$$

$$(x_1 - x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) = 0$$

$$243 = 27 \cdot 3 = 27 \cdot 3 = 3^5$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$24^5 + 84 + 7 = 0$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x^2} - 8 \quad \log_3 x^2 = 2 \cdot \frac{1}{\log_3 x}$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8 \quad t = \log_3 x$$

$$t^4 + 6t = \frac{5}{2} - 8 \quad t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} - 8 \quad (-) \quad 2t^5 + 12 = 5 - 8t \quad (-)$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \quad (*)$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \quad (**) \quad 6 - \frac{5}{2} = \frac{12 - 5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} = -8$$

$$\log_3^4 5y + 2 \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} = \log_3 \frac{125}{2} - 8 \quad (***)$$

$$(\log_3 5y)^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 5y} = -8 \quad t^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} = -8$$

$$a^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} = -8$$

$$2t^5 + 16t - 7 = 0$$

$$b^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} = -8$$

$$2 \frac{16 \cdot 0.5 - 7}{16 \cdot 2} + 16 \cdot \frac{1}{2} - 7 \neq 0$$

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0 \quad (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + \frac{7}{2} \cdot \frac{a + b}{ab} = 0 \quad (***)$$

$$a + b \neq 0$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

$$(a^2 + b^2)(a + b) + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$a^3 + (a^2 + b^2)(2a^2b + 2ab^2) + 7 = 0$$

$$2a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + 2ab^4 + 7 = 0$$

$$2ab(b^3 + a^3)(a - b) = -7. \quad l = (a - b), \quad n = ab:$$

$$2nl(l^2 + 2n) + 7 = 0 \quad (**) \quad 2nl^3 + 4n^2l + 7 = 0$$

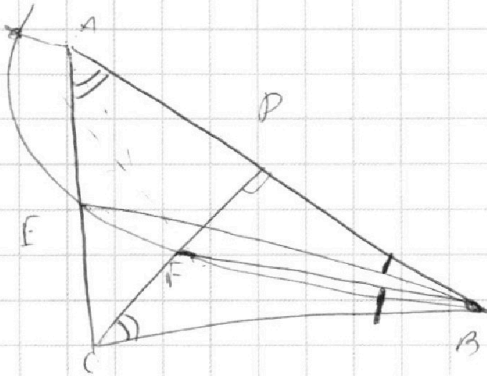
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle FCB \sim \triangle EAB$$

$$\frac{FC}{EA} = \frac{FB}{EB} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{FC}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow EA = 2FC$$

$$\frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3}x - 2FC}{2\sqrt{3}x} \quad (\Rightarrow) \quad 2FC = 2\sqrt{3}x - 2FC \quad (\Rightarrow) \quad 4FC = 2\sqrt{3}x \quad (\Rightarrow) \quad FC = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad 25 + 11 = 36 \quad \begin{array}{r} \sqrt{169} \quad 20 \\ \sqrt{11} \\ \hline 180 \end{array} \quad 25 + 11 = 36$$

$$\frac{13}{3} - 6 = \frac{13}{3} - \frac{18}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{3}, \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{13\sqrt{11}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{13}{3} = \frac{65\sqrt{11}}{33}$$

$$\frac{65\sqrt{11}}{33} - \frac{69\sqrt{11}}{33}$$

$$-\frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{11}}{22}$$

$$\theta = -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{25\sqrt{11}}{22} = -\frac{11\sqrt{11}}{22} - \frac{25\sqrt{11}}{22} =$$

$$= -36$$

$$-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{\alpha}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad (\Rightarrow)$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{11} > \alpha > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

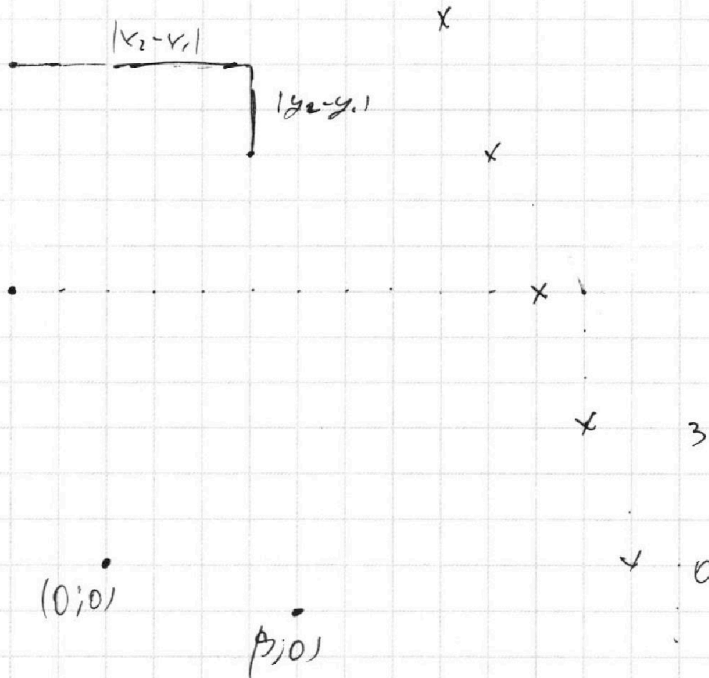
$$3x_2 - 3x_1 - y_2 - y_1 = 33 \quad (\Rightarrow) \quad 3(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) = 33$$

$$y_1 = x_1 k + b \quad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) k = 11 \quad (\Rightarrow) \quad y_2 =$$

$$y_2 = x_2 k + b \quad 3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 \quad (\Rightarrow)$$

$$(3+k)(x_2 - x_1) = 33 \quad (\Rightarrow) \quad k(x_2 - x_1) = 11$$

$$3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 - 3(x_2 - x_1)$$



$$3(x_1 + 11 - k - x_1) + y_1 - 3k - y_1 = 33$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (продолжение)

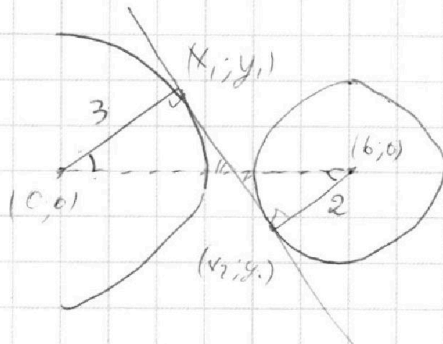
$$9) \triangle ABC \sim \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{DC} = \frac{EF}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{EF}{3x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EF}{3x} \Rightarrow EF = \frac{3x}{2}$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$$

$$5 \sin(\cos \alpha) = x \Rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow 5 \sin(\cos \alpha) - \frac{\pi}{2} = x$$

$$\cos(\cos \alpha) = \frac{x}{5} \pm \frac{\pi}{10}$$

Сложно, лучше использовать формулы

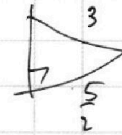


$$\{x_1, y_1\}$$

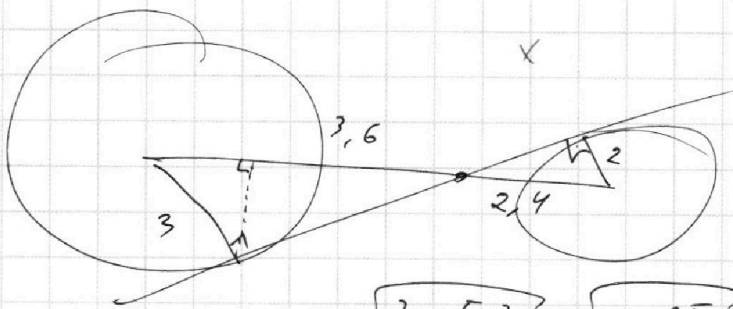
$$\{6-x_2, -y_2\}$$

$$\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$$

$$\frac{x_1}{6-x_2} = \frac{y_1}{-y_2}$$



$$x_1(x_2-x_1) - y_1(y_2-y_1) = 0$$



$$\frac{3}{1,2} \cdot 3$$

$$\frac{3}{1,2} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{3,4} = \frac{40}{14} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{36-25}{4}}$$

$$6 - \frac{5}{3} = \frac{18}{3} - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

6