



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1.

Представьте  $a, b, c$  в виде:  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot m$ ,

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot n$ , где:  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \in$

$\{0\} \cup \mathbb{N}$  и  $k, m, n \in \mathbb{N}$  и  $k, m, n \notin \{2, 3, 5\}$ .

Из  $a \cdot b = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ ,  $b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ ,  $a \cdot c = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$  следует:

$$\begin{cases} \textcircled{1} \alpha_1 + \alpha_2 = 9 \\ \textcircled{4} \beta_1 + \beta_2 = 10 \\ \textcircled{7} \gamma_1 + \gamma_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{2} \alpha_2 + \alpha_3 = 14 \\ \textcircled{5} \beta_2 + \beta_3 = 13 \\ \textcircled{8} \gamma_2 + \gamma_3 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{3} \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \\ \textcircled{6} \beta_1 + \beta_3 = 18 \\ \textcircled{9} \gamma_1 + \gamma_3 = 30 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}: \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_3 = 9 + 14 + 19 (=) 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 42 (=)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 21.$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6}: \beta_1 + \beta_2 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_1 + \beta_3 = 10 + 13 + 18 (=) 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 41 (=)$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 20,5. \text{ Поскольку } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0\} \cup \mathbb{N}: \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 20,5 (=)$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 21.$$

$$\textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9}: \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_1 + \gamma_3 = 10 + 13 + 30 (=) 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) = 53 (=)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 26,5. \text{ Поскольку } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \{0\} \cup \mathbb{N}: \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 26,5 (=)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 27.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 1~~

Задача 1 (проектная)

Можно считать:

$$a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot \overset{d_1+d_2+d_3}{2} \cdot \overset{d_1+d_2+d_3}{3} \cdot \overset{b_1+b_2+b_3}{5} \cdot \overset{r_1+r_2+r_3}{m \cdot k \cdot n} \cdot \dots$$

$$\Rightarrow 2^{\overset{d_1+d_2+d_3}{2}} \cdot 3^{\overset{d_1+d_2+d_3}{3}} \cdot 5^{\overset{r_1+r_2+r_3}{1 \cdot 1 \cdot 1}} \cdot 2^{\overset{21}{2}} \cdot 3^{\overset{21}{3}} \cdot 5^{\overset{27}{5}}$$

Ответ: наименьшее возможное значение  $a \cdot b \cdot c$

равно  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ .

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 2.

Дано:

$\triangle ABC$  - прямо-уг.;  $CD$  - высота.

окружность:

касается кривой  $BC$  в точке  $B$ ,

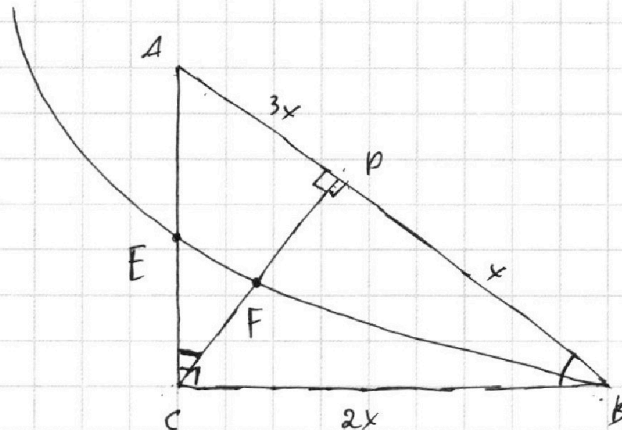
~~касается~~

пересекает ~~кривую~~  $BC$  в  $F$ ,

пересек ~~касает~~  $AC$  в  $E$ ;

$AB \parallel EF$ ;  $AD:DB = 3:1$ .

$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CEF} = ?$



1) Из условия следует, что  $\angle ACB = 90^\circ$ . Пусть  $\angle CBA = \alpha$ . Из условия о сумме углов в треугольнике  $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$ .

о сумме углов в треугольнике  $\triangle ACB$ :  $\angle ACB = \alpha$ .

2) Пусть  $AD = 3x \Rightarrow AD:DB = 3:1 \Rightarrow DB = x$ .  $\angle CDB = \angle ACB = 90^\circ$ ,

$$\angle DBC = \angle CAB \Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow \frac{4x}{CB} = \frac{CB}{x} \Rightarrow 4x^2 = CB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = 2x.$$

$$\angle CDA = \angle BCA = 90^\circ, \angle DCA = \angle CBA \Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle BCA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{4x}{AC} = \frac{AC}{3x} \Rightarrow 12x^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}x.$$

$$3) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = \frac{4\sqrt{3}x^2}{2} = 2\sqrt{3}x^2.$$

Также:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 4x \cdot CD \Rightarrow CD = \sqrt{3}x$ .

4)  $EF \parallel AB$ ,  $FD \perp AB \Rightarrow FD \perp EF$ .  $\angle ECF = \angle ACD = \alpha$ ,  $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle EFC$ .  $EC \neq AC \Rightarrow EF \neq AD$ .  
Таким образом  $EF \perp AD$ , так как  $EC \perp AC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

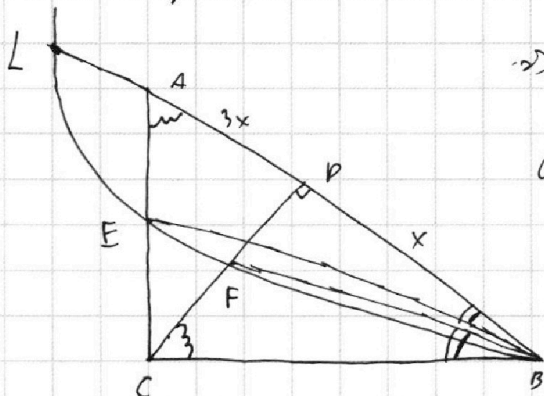
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 2 (процентная).

5) Прямая  $AB$  пересекает окружность. Пусть точка пересечения  $L$ . В окружности  $LB$  и  $EF$  - хорды,  $LB \parallel EF \Rightarrow$

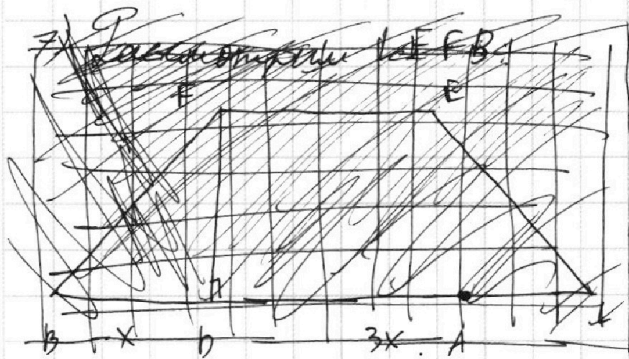


$\Rightarrow$  по теореме  $LF = FB$ .

6) В ч-г.  $LEFB$ :  $LB \parallel EF$ ,  $LB \neq EF$

$\Rightarrow$  по признаку  $LEFB$  - трапеция с основаниями  $LB$  и  $EF$ .  $LE = FB \Rightarrow$

$\Rightarrow$  ~~равнобедренная~~  $LEFB$  - равнобедренная трапеция с осн.  $EF$  и  $LB$ .



7)  $CB$  - касательная к окр в точке  $B \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  по теореме  $\angle FBC = \frac{\widehat{FB}}{2}$ .

$\angle FLB = \frac{\widehat{FB}}{2}$  как вписанный, опирающийся на  $\widehat{FB}$ .

$LEFB$  - равн-бедр. трапеция  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBL = \angle FLB$ . Тогда  $\angle EBL = \angle FBC$ . ~~НЕ~~  $\angle CAB = \angle BCB = 90^\circ - \alpha$ .

Тогда имеем: ~~...~~  $\angle FCB = \angle EAB$ ,  $\angle FDC =$

$$= \angle EBA \Rightarrow \triangle FCB \stackrel{\neq}{\sim} \triangle EAB \Rightarrow \frac{FC}{EA} = \frac{CB}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow EA = 2FC$$

8) Пусть  $CF = y$ .  $\triangle ABC \stackrel{\neq}{\sim} \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{EC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2x}{2\sqrt{3}x} \Rightarrow$

$$\frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3}x - 2FC}{2\sqrt{3}x} \quad (x \neq 0) \quad (\Rightarrow) 2FC = 2\sqrt{3}x - 2FC \quad (\Rightarrow) 4FC = 2\sqrt{3}x \quad (\Rightarrow) FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 2 (Геометрия)

$$9) \triangle ADC \stackrel{I}{\sim} \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{DC} = \frac{EF}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\sqrt{3}x} = \frac{EF}{3x} \rightarrow EF = \frac{3x}{2}$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$10) \text{Тогда } S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CEF} = (2\sqrt{3}x^2) : \left(\frac{3\sqrt{3}x^2}{8}\right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}x^2}{3\sqrt{3}x^2} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4 (продолжение).

Ищем:  ~~$A(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2})$~~   $A(\frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{11}}{2})$ ,  $B(\frac{13}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3})$

Пусть AB ищем уравнение:  $y = kx + b$ . Тогда:

$$\begin{cases} \textcircled{1} -\frac{\sqrt{11}}{2} = k \cdot \frac{5}{2} + b \\ \textcircled{2} \frac{\sqrt{11}}{3} = k \cdot \frac{13}{3} + b \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} k = \frac{5\sqrt{11}}{11} \\ b = -\frac{18\sqrt{11}}{11} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: \frac{\sqrt{11}}{3} - \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{13k}{3} - \frac{5k}{2} \quad (\Rightarrow) \quad 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 26k - 15k \quad (\Rightarrow)$$

$$5\sqrt{11} = 11k \quad (\Rightarrow) \quad k = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - \frac{\sqrt{11}}{2} &= k \cdot \frac{5}{2} + b \quad (\Rightarrow) \quad b = -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{11\sqrt{11}}{22} - \frac{25\sqrt{11}}{22} = \\ &= -\frac{36\sqrt{11}}{22} = -\frac{18\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда AB: } y = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot x - \frac{18\sqrt{11}}{11}$$

2) Ищем CD:

В силу симметрии относительно  $O_1, O_2$  ищем:

$$CD: y = -\frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot x + \frac{18\sqrt{11}}{11}$$

$$\text{Тогда необходимо: } -\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{\alpha}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{10\sqrt{11}}{11} > \alpha > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$$

$$\text{Ответ: при } \alpha \in \left( \frac{10\sqrt{11}}{11}; -\frac{10\sqrt{11}}{11} \right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 4.

$$\textcircled{2} \begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 2) = 0 \end{cases}$$

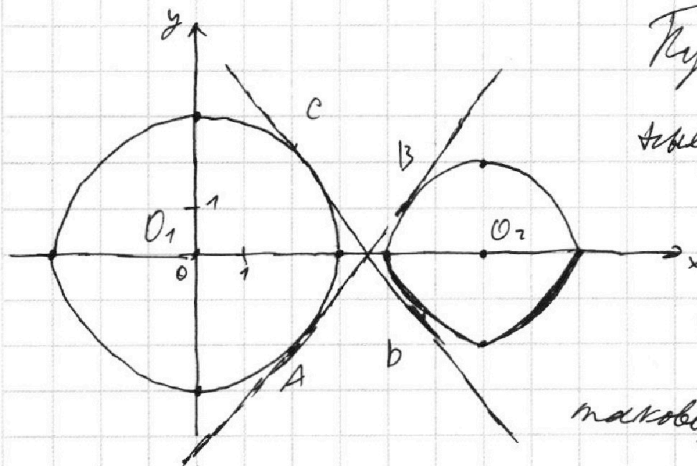
$$\textcircled{1} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 2) = 0$$

$$\textcircled{1} (x^2 + y^2 - 9)(x - 6)^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

Решениями являются все  $(x, y)$ , принадлежащие: окружности с центром  $(0; 0)$  и радиусом 3 и окружности с центром  $(6; 0)$  и радиусом 2.

$$\textcircled{2} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b.$$

Изобразим на графике: Пусть  $O_1(0; 0)$ ;  $O_2(6; 0)$ .



Пусть  $AB$  и  $CD$  — общие касательные,  
как показано. Заметим,

что 4 решения будет только

в том случае, если  $-\frac{a}{2}$

такое, что прямая из уравнения

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$  имеет корни через пересечение  $A$  и  $C$  так,

чтобы пересекать окружности. Каждой уравнение

прямых  $AB$  и  $CD$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

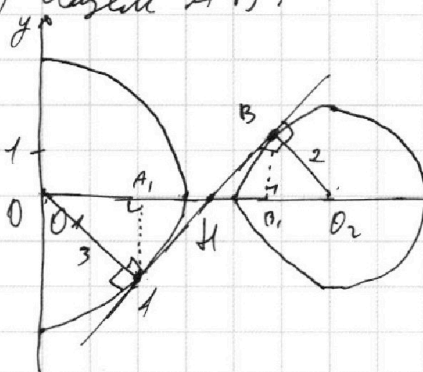
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 4 (профильная)

1) Узел  $AB$ :



Прямая  $AB \perp O_1O_2 = H$ .  $\angle O_1HA = \angle O_2HB$  как

верт.  $\angle O_1HA = \angle O_2HB$ ,  $\angle O_1AH = \angle O_2BH = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle O_1AH \sim \triangle O_2BH \Rightarrow \frac{O_1H}{O_2H} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow O_1H = \frac{3}{2} \cdot O_2H.$$

$$O_1H + HO_2 = O_1O_2 (=) \frac{3}{2} O_2H + O_2H = 6 (=) \frac{5}{2} O_2H = 6 (=) O_2H = \frac{12}{5} = 2,4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_1H = 3,6$ . Прямая  $AA' \perp BB'$  - перп. из  $A$  и  $B$  на  $O_1O_2$  соотв.

$$\angle O_1AH = \angle O_1A_1A = 90^\circ, \angle A_1O_1H = \angle A_1O_1A \Rightarrow \angle O_1AH \sim \triangle O_1A_1A \Rightarrow \frac{O_1A}{O_1A_1} = \frac{O_1H}{O_1A} (=)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{O_1A_1} = \frac{3,6}{3} (=) O_1A_1 = \frac{9}{3,6} = \frac{5}{1,2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Из теоремы Пифагора для  $\triangle O_1A_1A$ :  $AA_1 = \sqrt{O_1A^2 - O_1A_1^2} =$   
 $= \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ . Тогда  $A(2,5; -\frac{\sqrt{11}}{2})$ .

$$\angle O_2HB = \angle O_2B_1B, \angle O_2BH = \angle O_2B_1B = 90^\circ \Rightarrow \triangle O_2BH \sim \triangle O_2B_1B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_2B}{O_2B_1} = \frac{O_2H}{O_2B} (=) \frac{2}{O_2B_1} = \frac{2,4}{2} (=) O_2B_1 = \frac{4}{2,4} = \frac{2}{1,2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Из теоремы Пифагора для  $\triangle O_2B_1B$ :  $BB_1 = \sqrt{O_2B^2 - O_2B_1^2} =$   
 $= \sqrt{4 - \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$ . Тогда  $B(\frac{13}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3})$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5 (подметие).

$$\textcircled{1} \log_3(x) + \log_3(5y) = 0$$

$$\textcircled{2} 2 \log_3(x) \log_3(5y) (\log_3^2(x) + \log_3^2(5y)) (\log_3(x) - \log_3(5y)) + 7 = 0$$

$$\text{Из } \textcircled{1}: (\log_3(x))^4 + \frac{7}{2} \cdot \log_3(x) = -8.$$

$$(\log_3(x))^4 \geq 0 \rightarrow \frac{7}{2} \cdot \log_3(x) < 0 \Rightarrow \log_3(x) < 0$$

$$\text{Из } \textcircled{2} (\log_3(5y))^4 - \frac{7}{2} \log_3(5y) = -8.$$

$$(\log_3(5y))^4 \geq 0 \rightarrow \frac{7}{2} \log_3(5y) > 0 \Rightarrow \log_3(5y) > 0$$

Можно переписать  $\textcircled{2}$ :

$$2 \underbrace{\log_3(x)}_{< 0} \cdot \underbrace{\log_3(5y)}_{> 0} \underbrace{(\log_3^2(x) + \log_3^2(5y))}_{\geq 0} \underbrace{(\log_3(x) - \log_3(5y))}_{< 0} + 7 = 0 (\Rightarrow)$$

$$2 \log_3(x) \log_3(5y) (\log_3^2(x) + \log_3^2(5y)) (\log_3(x) - \log_3(5y)) + 7 = 0$$

$\geq 0$ .

Значит,  $\textcircled{2}$  не имеет решений.

$$\textcircled{1} \log_3(x) + \log_3(5y) = 0 (\Rightarrow) \log_3(5xy) = 0 (\Rightarrow) 5xy = 1 (\Rightarrow)$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5.

$$① \begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \log_3^4(5y) + 2 \log_3(3) = \log_{25y}(3^{11}) - 9 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$① \log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \Rightarrow \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x = -8$$

$$② \log_3^4(5y) + 2 \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} - 9 \Rightarrow \log_3^4(5y) - \frac{7}{2} \log_3(5y) = -8$$

①-②:

$$\log_3^4 x - \log_3^4(5y) + \frac{7}{2} \left( \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3(5y)} \right) = 0$$

Пусть  $a = \log_3 x$ ;  $b = \log_3(5y)$  ( $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ):

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) + \frac{7}{2}(a+b) \cdot \frac{1}{ab} = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$2ab(b^2 + a^2)(a+b)(a-b) + 7(a+b) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab(b^2 + a^2)(a-b) + 7 = 0 \end{cases}$$

Обратная замена:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 6.

Заметим, что для точки  $A(x_1; y_1)$  соседней точки  $B$  вида:  ~~$(x_1 + 1 - k; y_1 + 3k)$~~   $(x_1 + 1 - k; y_1 + 3k)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  (максимальная точка с целыми координатами).

Заметим, что для точки  $A(x_1; y_1)$  в соседней с ней  $B$  образуют множество точек, лежащих на прямой, и прямой параллельной стороне параллелограмма  $OP$ .

~~Заметим на  $OP$  все точки с целыми координатами. Их~~

~~будет 15. Заметим, что для каждой третьей точки (отсчитав считав точку  $(0; 0)$ ) внутри параллелограмма будет 15 точек  $B$ , а для каждой только 14 точек~~

Отметим на  $OP$  все точки с целыми координатами.

Их будет 15. Заметим, что для каждой из них в параллелограмме попадут 15 точек. Итого:  $15 \cdot 15 = 225$ .

На  $OP$  можно взять любую точку с целыми координатами и провести прямую, параллельную  $OP$ . Для них можно провести аналогичные рассуждения.

Какие из них не подходят?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6 (продолжение)

Условие того, что такая прямая дан посредом, в  
следствии: Если  $S(x; 0)$  - точка на  $OR$ , из которой  
мы восстановили прямую, то необходимо, чтобы  
 $\angle(S; R) \neq 11$ . Это есть, так как  $R(20; 0)$  и  $O(0; 0)$ ,  
 $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

~~Но если мы хотим построить такую прямую~~  
то есть можно построить еще 9 таких прямых,  
параллельных  $OR$  (при  $x=0$  получается именно  $OR$ ).

Итого кол-во пар точек  $A$  и  $B$ :

$$225 \cdot 10 = 2250$$

Ответ: 2250 пар.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Пусть прямая  $AB$  имеет вид:  $y = kx + b$ . Найти:

①  $y_2 = x_2 k + b$

②  $y_1 = x_1 k + b$

③  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

① - ②:  $y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)k$

③  $3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 \Rightarrow (3+k)(x_2 - x_1) = 33$



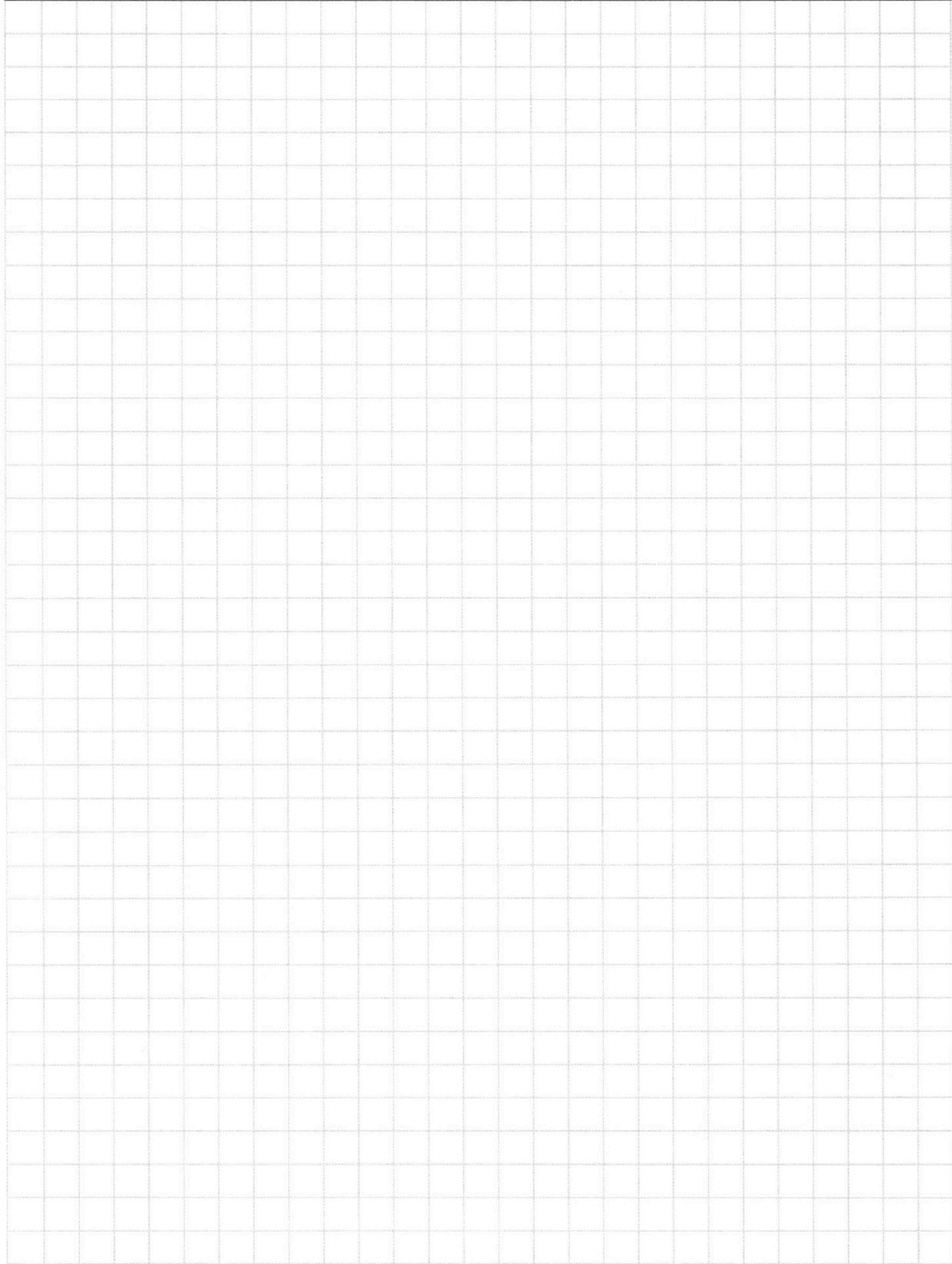
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





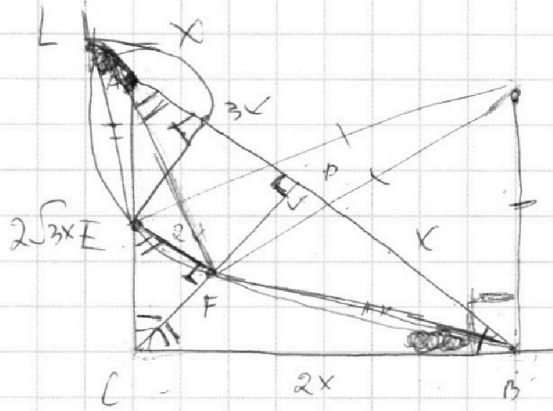
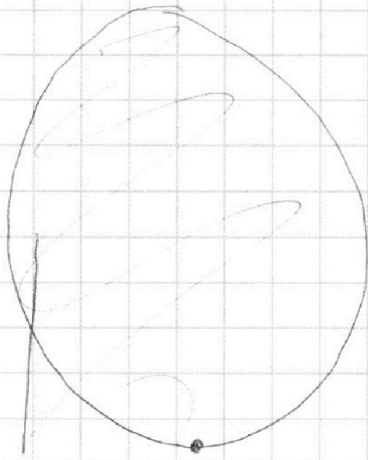
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4x}{CB} = \frac{CB}{x} \quad (\Rightarrow) \quad 4x^2 = (CB)^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4x}{AC} = \frac{AC}{2x} \quad (\Rightarrow) \quad 4x^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3} \cdot x$$

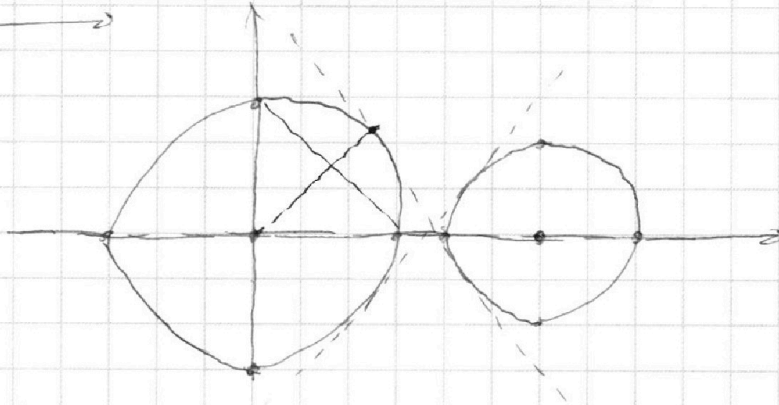
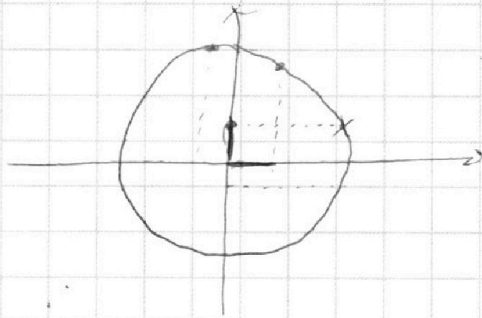
$$2\sqrt{3} \cdot x \cdot 2x = 4x \cdot CB \quad (\Rightarrow) \quad CB = \frac{4\sqrt{3}x^2}{4x} = \sqrt{3}x$$

$$5 \sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

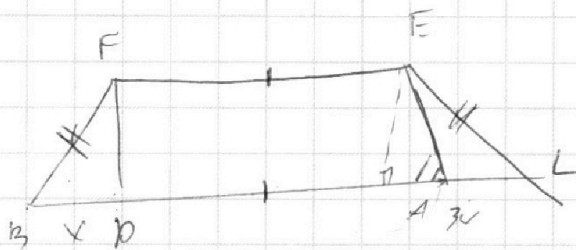
$$5 \sin(\cos x) = \frac{5\pi}{2}$$

$$= \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \quad +2\pi$$



$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot m \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot n$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 9$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 10$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 10$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 13$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 19$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 10$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$$

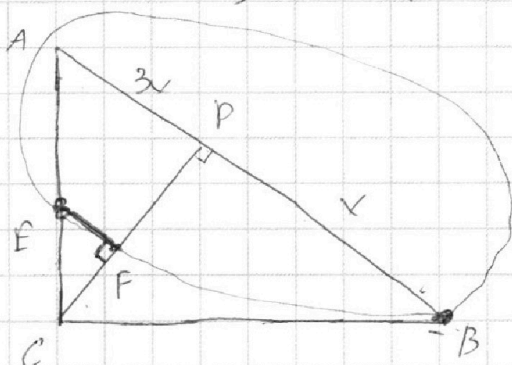
$$9 + 14 + 15 = 20 + 9 + 4 + 9 = 38 \cdot 4 = 42$$

$$\begin{array}{r}
 19 \\
 + 23 \\
 \hline
 30 \\
 \hline
 42
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10 \\
 + 13 \\
 \hline
 23 \\
 \hline
 31
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10 + 13 + 18 = \\
 + 18 \\
 \hline
 20 \\
 \hline
 31
 \end{array}$$

$$9 + 14 + 15 = 23 + 15 = 38 \cdot 5 = 42 \quad | : 2 \rightarrow 21$$

$$10 + 13 + 18 = 20 + 31 = 24 \cdot 5 = 20,5 \rightarrow 21$$

$$10 + 13 + 30 = 53 \cdot 2 \rightarrow 26,5 \rightarrow 27$$



$AB \parallel EF$

$$S_{\triangle ACP} : S_{\triangle CEF}$$

$$\begin{cases}
 y = kx + b \\
 x^2 + y^2 = 3^2
 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$$

$\neq$

$$x^2 + (kx+b)^2 = 3^2$$

$$(x-6)^2 + (kx+b)^2 = 2^2$$

$$x^2 - (x-6)^2 = 9 - 4 = 5$$

$$(x-6)(x+6)(x-(x-6)) = 5 \quad (2x-6=5) \Rightarrow 2x-6=5 \Rightarrow x = \frac{11}{2} = 5,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_3 5y)^4 + 2 \frac{1}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3(5y)} - 8 \quad t = \log_3(5y)$$

$$t^4 + \frac{2}{t} = \frac{11}{2t} - 8 \quad (\cdot) \cdot 2t \quad 4t^5$$

$$2t^5 + 4 = 11 - 16t \quad (\cdot) \quad 2t^5 + 16t - 7 = 0$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} = -8$$

$$(\log_3 5y)^4 + 2 \frac{1}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2 \log_3(5y)} = -8$$

$$6 \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \dots} = 6 \frac{12}{2 \log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} = \frac{7}{2 \log_3 x}$$

$$\frac{4}{2 \log_3(5y)} - \frac{11}{2 \dots} = -\frac{7}{2 \log_3(5y)}$$

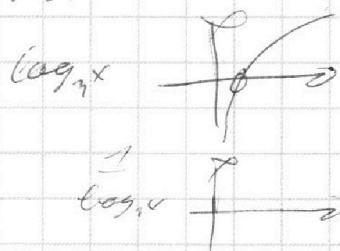
$$(\log_3 x)^4 - (\log_3 5y)^4 + \frac{7}{2 \log_3 x} + \frac{7}{2 \log_3(5y)} = 0$$

$$a = \frac{1}{\log_3 x} \quad b = \frac{1}{\log_3 5y}$$

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2}a + \frac{7}{2}b = 0$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

$$(\log_3 5y)^4 - \frac{7}{2 \log_3(5y)} = -8$$



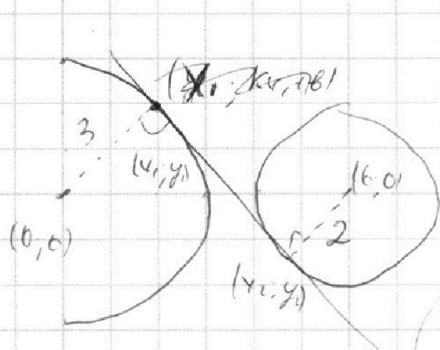
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = kx + b \quad \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

$$y_1 = kx_1 + b \quad \{x_1, y_1\}$$

$$\sqrt{x_1^2 + (kx_1 + b)^2} = 3 \quad \{b - kx_1\}$$

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 3 \quad \{x_2 - 6, y_2\}$$

$$\sqrt{(6 - x_1)^2 + y_1^2} = 2$$

$$x_1(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1) = 0$$

$$(x_1 - 6)(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1) = 0$$

$$x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 + 6x_2 + 6x_1 = 0$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 x_2 + 6x_1 + 6x_2 = 0 \quad (-)$$

$$(x_1 - x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) = 0$$

$$243 = 2 \cdot 123 = 22 \cdot 3 = 3^5$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$24^5 + 84 + 7 = 0$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x^2} - 8 \quad \log_{143} x^2 = 2 \cdot \frac{1}{5} \log_3 x$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8 \quad t = \log_3 x$$

$$t^4 + 6t = \frac{5}{2} - 8 \quad t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} - 8 \quad (-) \quad 2t^5 + 12 = 5 - 8t \quad (-)$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \quad (*)$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \quad (**) \quad 6 - \frac{5}{2} = \frac{12 - 5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} = -8$$

$$\log_3^4 5y + 2 \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} = \log_3 \frac{121}{2} - 8 \quad (***)$$

$$(\log_3 5y)^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 5y} = -8 \quad t^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} = -8$$

$$a^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} = -8$$

$$2t^5 + 16t - 7 = 0$$

$$b^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} = -8$$

$$2 \cdot \frac{16 - 0.5 \cdot 7}{16 \cdot 2} + 16 \cdot \frac{7}{2} - 7 \neq 0$$

$$a^4 - b^4 + \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0 \quad (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + \frac{7}{2} \cdot \frac{a + b}{ab} = 0 \quad (iv)$$

$$a + b \neq 0$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

$$(a^2 + b^2)(a + b) + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$a^3 + (a^2 + b^2)(2a^2b + 2ab^2) + 7 = 0$$

$$2a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + 2ab^4 + 7 = 0$$

$$2ab(b^3 + a^3)(a - b) = -7. \quad l = (a - b), \quad n = ab:$$

$$2nl(l^2 + 2n) + 7 = 0 \quad (v) \quad 2nl^3 + 4n^2l + 7 = 0$$

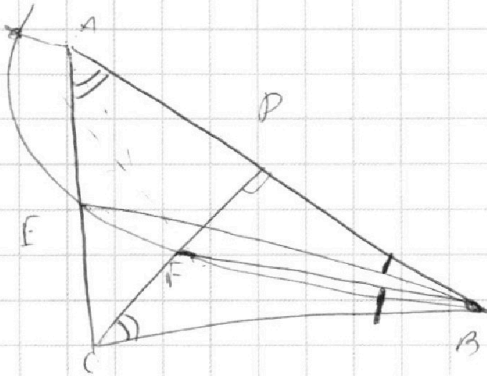
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle FCB \sim \triangle EAB$$

$$\frac{FC}{EA} = \frac{FB}{EB} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{FC}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow EA = 2FC$$

$$\frac{FC}{\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3}x - 2FC}{2\sqrt{3}x} \quad (\Rightarrow) \quad 2FC = 2\sqrt{3}x - 2FC \quad (\Rightarrow) \quad 4FC = 2\sqrt{3}x \quad (\Rightarrow) \quad FC = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad 25 + 11 = 36 \quad \begin{array}{r} \sqrt{169} \quad 20 \\ \sqrt{11} \\ \hline 180 \end{array} \quad 25 + 11 = 36$$

$$\frac{13}{3} - 6 = \frac{13}{3} - \frac{18}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{3}, \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{13\sqrt{11}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{13}{3} = \frac{65\sqrt{11}}{33}$$

$$\frac{65\sqrt{11}}{33} - \frac{69\sqrt{11}}{33}$$

$$-\frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{11}}{22}$$

$$\theta = -\frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{25\sqrt{11}}{22} = -\frac{11\sqrt{11}}{22} - \frac{25\sqrt{11}}{22} =$$

$$= -36$$

$$-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{\alpha}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \quad (\Rightarrow)$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{11} > \alpha > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

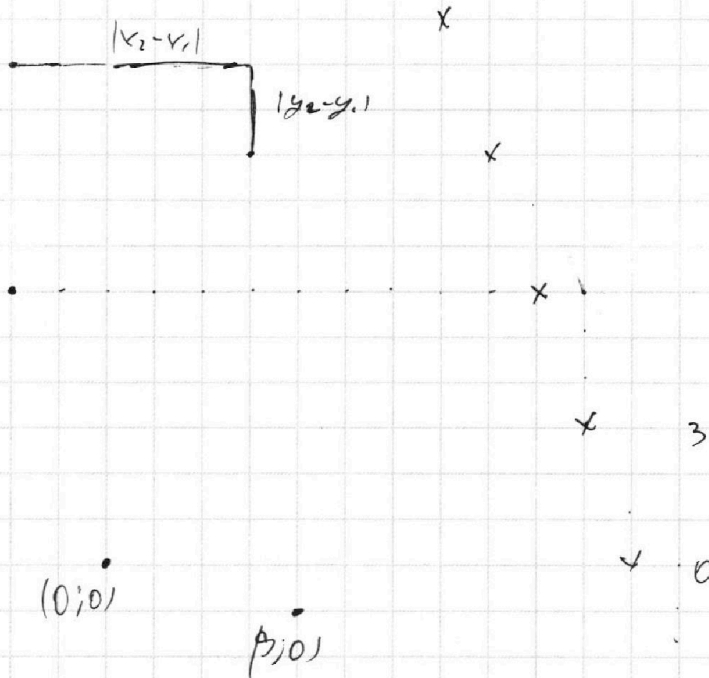
$$3x_2 - 3x_1 - y_2 - y_1 = 33 \quad (\Rightarrow) \quad 3(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) = 33$$

$$y_1 = x_1 k + b \quad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) k = 11 \quad (\Rightarrow) \quad y_2 =$$

$$y_2 = x_2 k + b \quad 3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 \quad (\Rightarrow)$$

$$(3+k)(x_2 - x_1) = 33 \quad (\Rightarrow) \quad k(x_2 - x_1) = 11$$

$$3(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 33 - 3(x_2 - x_1)$$



$$3(x_1 + 11 - k - x_1) + y_1 - 3k - y_1 = 33$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  
  2  
  3  
  4  
  5  
  6  
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Задача 2 (продолжение)*

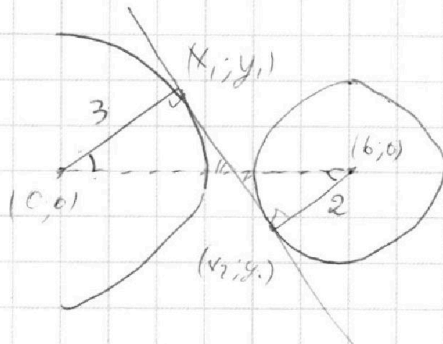
$$9) \triangle ABC \sim \triangle EFC \Rightarrow \frac{FC}{DC} = \frac{EF}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{EF}{3x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EF}{3x} \Rightarrow EF = \frac{3x}{2}$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$$

$$5 \sin(\cos \alpha) = x \Rightarrow 5 \sin(\cos \alpha) - \frac{x}{5} = x$$

$$\cos(\cos \alpha) = \frac{x}{5} + \frac{x}{10}$$

*Сложно решить*

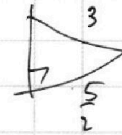


$$\{x_1, y_1\}$$

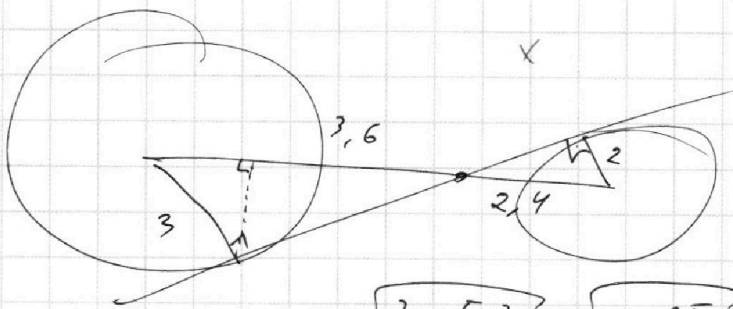
$$\{6-x_2, -y_2\}$$

$$\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$$

$$\frac{x_1}{6-x_2} = \frac{y_1}{-y_2}$$



$$x_1(x_2-x_1) - y_1(y_2-y_1) = 0$$



$$\frac{3}{1,2} \cdot 3$$

$$\frac{3}{1,2} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{3,4} = \frac{40}{14} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{36-25}{4}}$$

$$6 - \frac{5}{3} = \frac{18}{3} - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

6