



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



VI. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

VII. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

VIII. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

IX. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

X. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1.

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{15}, \quad bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}, \quad ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Рассмотрим } ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \Rightarrow$$

$$abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \quad (\text{каждый простой множитель } a, b, c$$

входит в  $(abc)^2$  дважды, т.е. четное кол-во раз,

$$\text{поэтому если } ord_2((abc)^2) \geq 36 \Rightarrow ord_2(abc) \geq 18,$$

$$ord_3((abc)^2) \geq 59 \Rightarrow ord_3(abc) \geq 30, \quad \text{и т.д.}$$

$$\text{но поскольку } ac: 5^{28}, \quad abc: 5^{26} \Rightarrow abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot$$

$$5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

приведем пример

$$\text{Тогда } a, b, c: \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14} \end{cases} \text{ Тогда } abc =$$

$$= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \quad \text{и} \quad ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11};$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}; \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\Rightarrow \text{но так как } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} - \text{min возможное } abc$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 2.

Решение:

Окружность описана около  $\triangle AEF$

касается  $AC \Rightarrow \angle AFE = \angle FAC$ ,

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle BAF = \angle AFE = \alpha$ .

$CD$  - высота  $\triangle ABC$  -  $\beta/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CAD \Rightarrow \angle CAA = \angle CBD = \beta \Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle BAF$

(по двум углам)  $\Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB}$ , ~~по двум сторонам~~  $(EF \parallel BD)$

~~по двум сторонам~~  $\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow CE = BF \cdot \frac{AC}{AB} = DF \cdot \sin \beta$

$\frac{CF}{CE} = \sin \angle CFE = \sin \beta \Rightarrow CE = CF \cdot \sin \beta = BF \cdot \sin \beta \Rightarrow F$  -

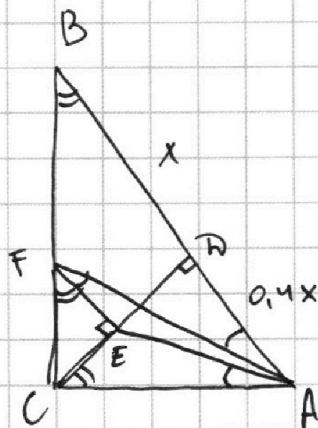
середина  $BC \Rightarrow \frac{S_{\triangle CBA}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{4}{1} = 4$

Поскольку  $\frac{AB}{BD} = 1,4$   $\frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle CBA}} = \frac{1}{1,4} = \frac{5}{2}$  ( $CD$  - высота,

$AD$ ;  $BD$  - основаниями)  $\Rightarrow \frac{S_{\triangle CBA}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{4}{5} \cdot 2 =$

$= \frac{8}{5}$ .

Ответ:  $\frac{8}{5}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.  
 $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$       ОДЗ:

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi] \Rightarrow$$

$$9\pi - 2x \in [0; 10\pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi\right].$$

Рассмотрим случаи, когда  $x$  принадлежит различным интервалам  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ,  $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ ,  $[\pi; 2\pi]$ ,  $[2\pi; 3\pi]$ ,  $[3\pi; 4\pi]$ .

1)  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$

$$\Rightarrow 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

2)  $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \Leftrightarrow x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7}{6}\pi$$

3)  $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(-x + 2,5\pi) = 9\pi - 2x$

$$\Rightarrow -10x + 25\pi = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 16\pi, x = 2\pi$$

4)  $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(x - 2,5\pi) = 9\pi - 2x$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 34\pi \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}\pi$$

5)  $x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$

$$\Rightarrow 45\pi - 10x = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 36\pi \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}\pi$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi.$





1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 12y + 37) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

Покажем на графике на плоскости  $xOy$ :

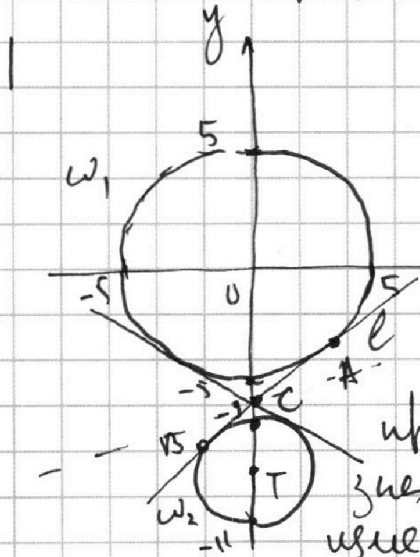
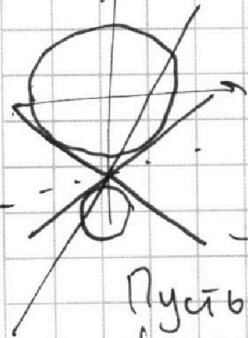


График второго ур-я - это две окр-ти радиусов  $r_1 = 5$  и  $r_2 = 2$  и центры  $O(0;0)$  и  $T(0;-9)$ ,

линия первого ур-я - это прямая, в зависимости от значения параметра  $a$ , имеет разный наклон, который может равняться нулю.

Если система ур-я имеет 4 решения, это значит, что данная прямая является секущей для двух окр-ей. Из геометрических соображений ясно, что для системы также имеют, где которых существует прямая параллельная и являющаяся секущей, является множество прямых, касательных к  $\omega_2$  у которых наклон меньше больше или равно по модулю, чем у внутренней касательной к двум окр-ям; из картинки видно, что все такие прямые удовлетворяют этому условию, и ни одна другая не удовлетворяет.



Найдем косф наклона внутренней касательной  $l$  к  $\omega_2$ , проходящей через  $T(0; -9)$  т.к. центры  $O$  и  $T$  лежат на оси  $Oy$ .

Пусть  $\omega_1$  касается  $l$  в  $T_1$ , а  $\omega_2$  в  $T_2$ . и пересекает ось симметрии  $Oy$  в  $T_3$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

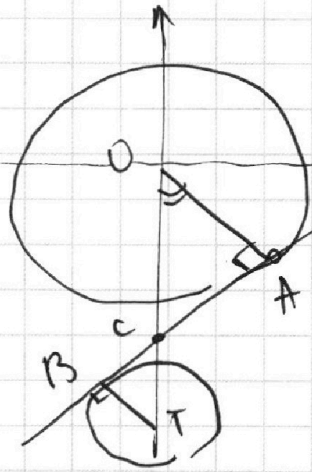
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 - продолжение



Тогда  $\triangle AOC \sim \triangle TBC$   $\Rightarrow \frac{OA}{TB} = \frac{5}{2}$

$$\begin{cases} OC + CT = 9 \\ \frac{OC}{CT} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow OC = \frac{45}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle OCA = \frac{OA}{OC} \quad AC =$$

$$= \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 25} = \sqrt{\frac{800}{49}} = \frac{10\sqrt{2}}{7}$$

$\Rightarrow \text{tg} \alpha$  - коэф наклона  $l$  :

$$\therefore \text{tg} \alpha = \text{tg} \angle OCA = \frac{AC}{OA} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{7}}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{7}$$

или симметрич коэф наклона второй прямой  $-\frac{10}{7}\sqrt{2}$ . Если  $\text{tg} \alpha$  и  $-\frac{10}{7}\sqrt{2}$  коэф наклона прямой

$$y = -\frac{5}{6a}x + b$$
 если  $\left|-\frac{5}{6a}\right| < \frac{10}{7}\sqrt{2}$  нулевой

$b$  не существует, а если  $\left|-\frac{5}{6a}\right| > \frac{10}{7}\sqrt{2}$ , тогда

всегда найдёт  $b$  - абсцисса т.с. Если  $a = 0, b = 0$ , прямая  $x = 0$  не подходит. Теперь можно найти, удовлетворяющие нас  $a$  :

1)  $-\frac{5}{6a} > \frac{10}{7}\sqrt{2}$   $a < 0$

2)  $-\frac{5}{6a} < -\frac{10}{7}\sqrt{2}$   $a > 0$

3)  $a = 0$

Ответ:  $-\frac{5}{6\sqrt{2}} < a < \frac{5}{6\sqrt{2}}$

$-\frac{5}{6a} > \frac{10}{7}\sqrt{2}, a < 0 \Rightarrow -\frac{7}{24\sqrt{2}} < a < \frac{7}{24\sqrt{2}}$

Ответ:  $-\frac{7}{24\sqrt{2}} < a < \frac{7}{24\sqrt{2}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\log_{x^3} 121 - 5$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{1}{\log_{11} x} \cdot \frac{2}{3} + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - \frac{16}{3} = 0 \quad (1) \quad x > 0$$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \log_{(0,5y)^3} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} + 13 \log_{(0,5y)^3} 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} + \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^5(0,5y) + 5 \log_{11}(0,5y) + \frac{16}{3} = 0 \quad (2); y > 0$$

Свойства логарифмов:

Рассмотрим  $f(x) = \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x$ . Если  $f(x) = a$   
то  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{11}^5 x - 5 \log_{11} x = -f(x)$ , тогда  
если  $f(x) = \frac{16}{3}$ ,  $f(0,5y) = -\frac{16}{3} \Rightarrow 0,5y =$   
 $= \frac{1}{x}$ , тогда  $x \cdot y = 2 \quad (x, y \neq 0)$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

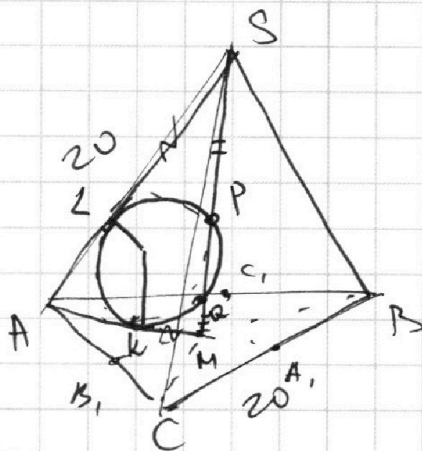
### Задача 7.

Решение.

Соединяем точки M отн.  $\Omega$   
набрав  $MQ \cdot MP = SP \cdot SQ \Rightarrow$

$\Rightarrow SL = MK$  (отрезки  
касательных из  $\tau$  S и M)

и  $l \perp m$  в этом  $AL = AK \Rightarrow$



$\Rightarrow AM = 20 \Rightarrow AA_1 = 30$  (медиана),  $S_{\triangle ABC} = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  высота  $AK$  из  $A$  на  $BC$ :  $AK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{180}{20} = 9$

$= AK = 9$ . Рассмотрим  $\triangle ABC$ :

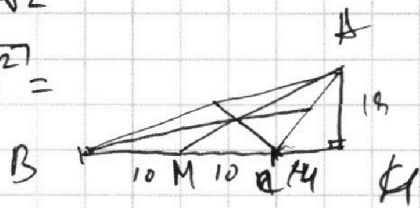
по т. Пифагора  $AK = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$

$\Rightarrow \# \text{ } \textcircled{A}$  (пусть  $K$  лежит  
на продолжении  $BC$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520} = 2\sqrt{130}$

$AB = \sqrt{30^2 + 14^2} = \sqrt{900 + 196} = \sqrt{1096} = 2\sqrt{274}$

$= \sqrt{324 + 1156} = \sqrt{1480} = 2\sqrt{370}$



так как  $\angle C_1 = 90^\circ$  в  $\triangle$  сторонах треугольника  
можно найти произведение его медиан

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{18}{\sin C} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB_1 =$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a+b \geq 6 \\ b+c \geq 14 \\ a+c \geq 16 \end{cases} \Rightarrow a+b+c \geq 19$$

28

S:

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b &= 0 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b+c &= 14 \\ b &= 14 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$$2^{30}$$

$$\begin{aligned} a &= 5^{14} \cdot 3^9 \\ b &= 5^0 \cdot 3^5 \\ c &= 5^{14} \cdot 3^{16} \end{aligned}$$

2<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} bc &: 2^{14} \\ ac &: 2^{16} \end{aligned}$$

bc 8 8  
6

19

$$\begin{aligned} b &= 15 \\ c &= 15 \end{aligned}$$

15 10

6

$$\begin{aligned} 12 & \cdot 2 \\ 21 & \cdot 4 \end{aligned}$$

15 9 6

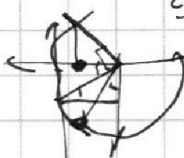
$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 42 \\ c &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 21 \end{aligned}$$

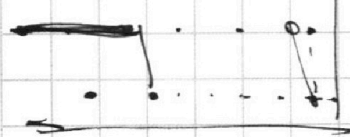
9 5 16

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

12



3 5 1



$$\log_5 x + 5 \log_5 x = \log_5 x + 5 \log_5 x + 5$$

t<sup>2</sup> - 3at + a

$$\begin{aligned} t^5 + t + \frac{3}{16} &= 0 \\ t^5 + t + \frac{3}{16} &= 0 \\ t^5 + t + \frac{3}{16} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6x + \frac{3}{2}x &= 0 \\ -3x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -18 - 2 &= 0 \\ -20 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

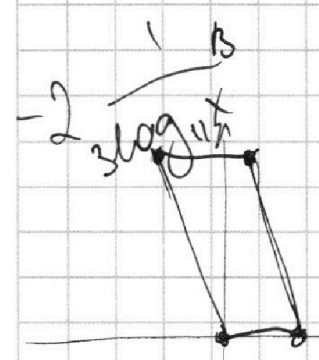
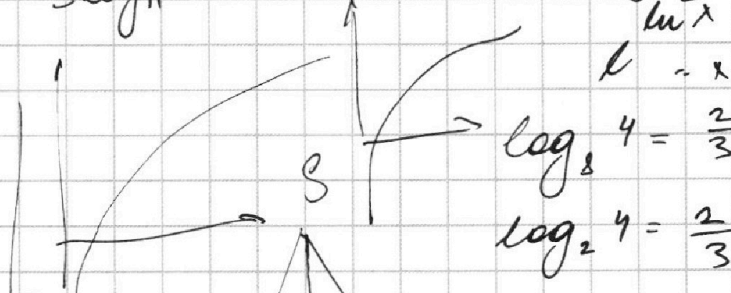
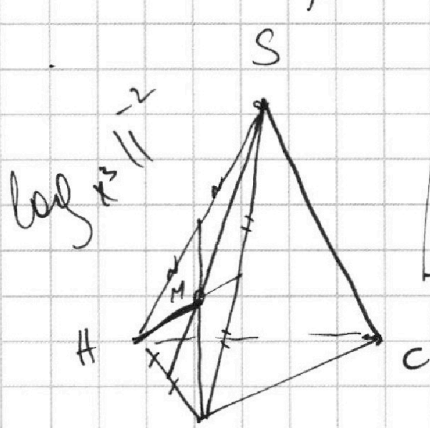
$$\log_{11}^4 x - \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \quad c=1 \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{1}{\log_{11} x} = \log_{x^3} 1 - \log_{x^3} 121 \quad \log_a b = \log_a - \log_b$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{1}{\log_{121} x^3} + 5 = 0 \quad \log_{121} 11 = \frac{1}{2}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11} a = \frac{\log_{11} a}{\ln a} \cdot \frac{1}{2}$$



$$-2 \cdot 3 \log_{11} x$$

$$-13 \cdot 3 \log_{11} x$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 =$$

$$t^5 + t - 5 = 0$$

$$t(t^4 + 1) = 5$$

$$\log(\dots)$$

$$\log(\dots)$$

$$\log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11}^5 (0.7y) + 5 \log_{11} (0.7y) + \frac{16}{3} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving circles and lines.

**Equations:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 11y + 81 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + (y-9)^2 = 2^2 - x + 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{b-5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

$$5x + 6ay$$

$$y = -\frac{5}{6a}x$$

**Algebraic Solution:**

$$x(x+4) = (2-x)(2-x)$$

$$x^2 + 4x = 24 - 2x - 2x + x^2$$

$$14x = 24$$

$$x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$$

**Geometric Diagrams:**

- Top left: Two circles of radius 5 centered at (0, 5) and (0, -5) on the y-axis. A line passes through their centers.
- Top middle: A circle with center at the origin and radius 5. A line is tangent to it.
- Top right: A coordinate system showing a line with a negative slope.
- Middle left: A small circle with radius 2 centered at (4, 0) on the x-axis.
- Middle: A large circle with radius 10 centered at the origin. A line is tangent to it.
- Middle right: A circle with radius 5 centered at (0, 9) on the y-axis. A line is tangent to it.
- Bottom left: A small circle with radius 2 centered at (4, 0) on the x-axis.
- Bottom middle: A circle with radius 5 centered at (0, 9) on the y-axis.
- Bottom right: A coordinate system showing a line with a positive slope.

**Calculations:**

$$\frac{45}{7} = \frac{18}{7} + 9$$

$$\frac{45}{7} - \frac{18}{7} = 9$$

$$\frac{27}{7} = 9$$

**Other notes:**

- $a=0 \Rightarrow x = \frac{b}{5}$
- $a \neq 0$
- $\frac{5}{2} = \frac{x}{y}$
- $x+y=9$
- $y = \frac{5}{2}x$
- $x + \frac{5}{2}x = 9$
- $\frac{7}{2}x = 9$
- $x = \frac{18}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

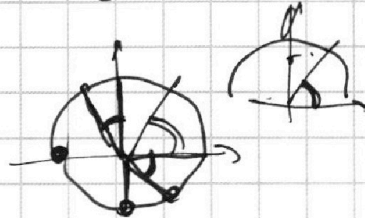
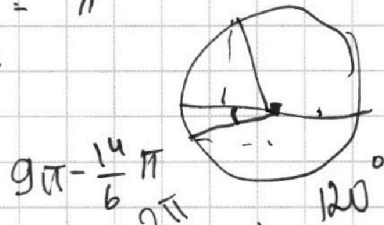
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



10/12  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \quad x \in \left[ \frac{4,5\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

11/12  $\arccos(\sin x) = \pi$   
 $x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$

13/12



$y = -2 \times 54$   
 $0,5y = -x$   
 $y = -2x^2$

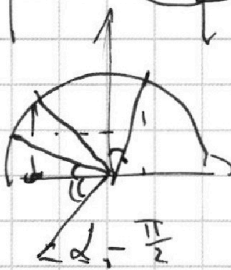
$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2}$

9π - 16π  
27π - 16π  
11π - 16π

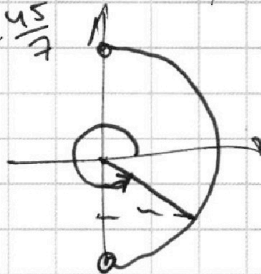
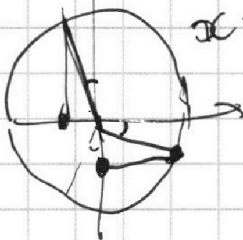


$g - x = \frac{5}{x} \pm 1$   
 $2x = 45 - 5x$   
 $x = \frac{45}{7}$

$\pi - x = \pi$

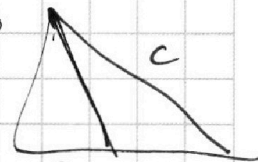
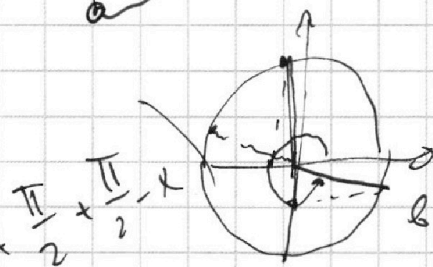


$2\pi - \alpha - \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$   
 $\Delta = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha$



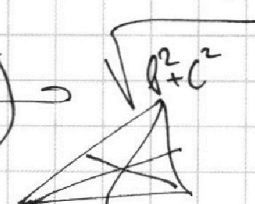
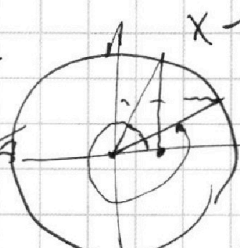
$25x^2 = 2025 - 1225x$   
 $25x^2 + 1225x - 2025 = 0$   
 $x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$



$2025 - 25 \cdot 49 = 3x$   
 $\frac{2025 - 1225}{49} = 3x$   
 $\frac{800}{49} = 3x$

$\frac{225}{49} = \frac{225}{49}$   
 $\frac{1225}{49} = \frac{1225}{49}$   
 $\frac{100}{49} = \frac{100}{49}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

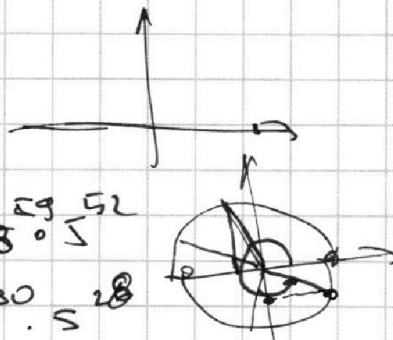
$$10 \left( \arccos \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right) \right) = 9\pi - 2x$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos \in [0; \pi]$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} \cdot 3^{29} \cdot 5^{52}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \sin B$$

XC

X

$$x + y + z = 18$$

$$x + y = 6$$

$$y + z = 14$$

$$x + z = 16$$

$$x - y = 2$$

$$x + y = 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$\log_{10} \frac{1}{10^x} =$$

$$= -\log$$

$$z = 12$$

$$x = 4$$

$$y = 0$$

$$a = 2^7$$

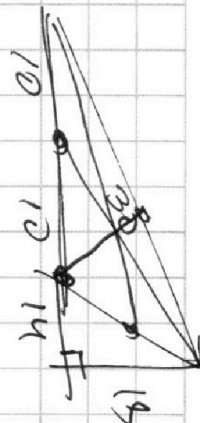
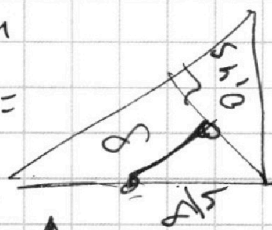
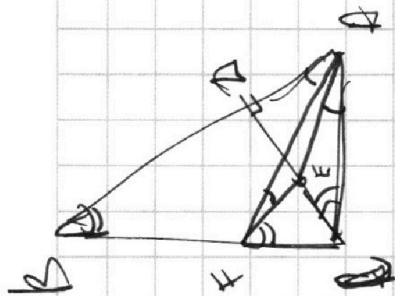
$$b = 2^{10}$$

$$c = 2^{14}$$

$$a = 2^7$$

$$b = 2^{10}$$

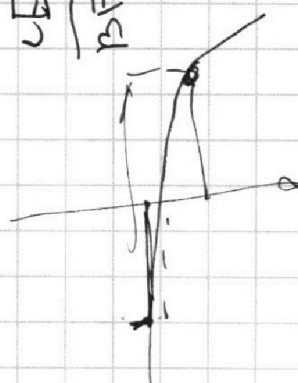
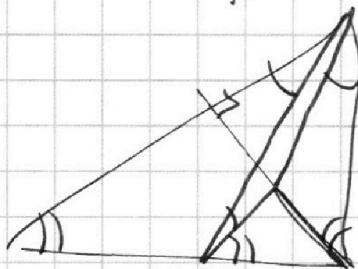
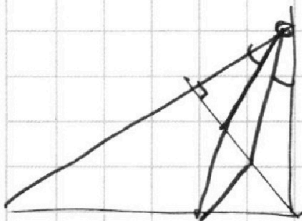
$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$



$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{BA}$$

$$CE = B'E \cdot \sin d$$

$$CE = CF \cdot \sin d$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{22}$$

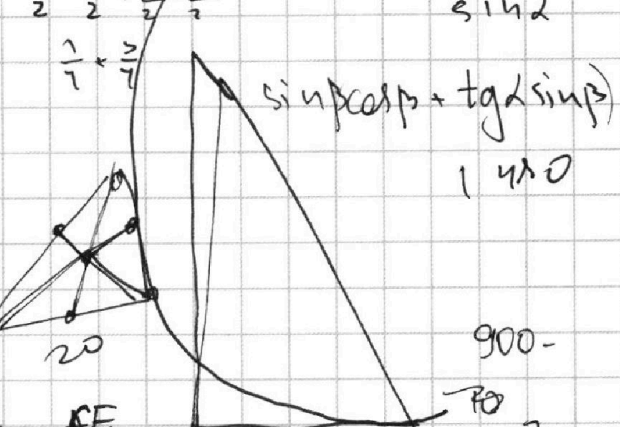
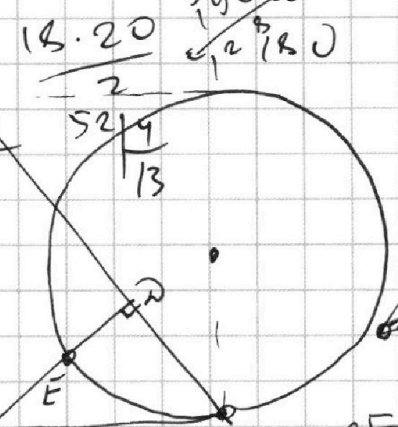
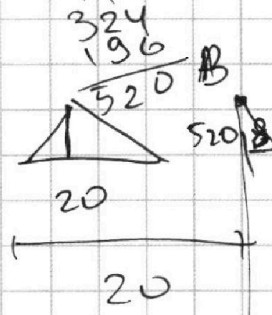
$$\frac{16 \cdot 20}{2} = 160$$

$$\frac{324 \cdot 14}{81} = 56$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2}{1156 - 324}$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha}$$



$$\frac{7}{24\sqrt{2}}$$

$$\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}$$

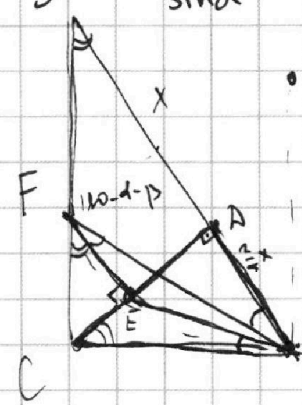
$$\frac{AB}{BF} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AB}{BF} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CF}{BF} = \frac{CE}{EN}$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB}$$

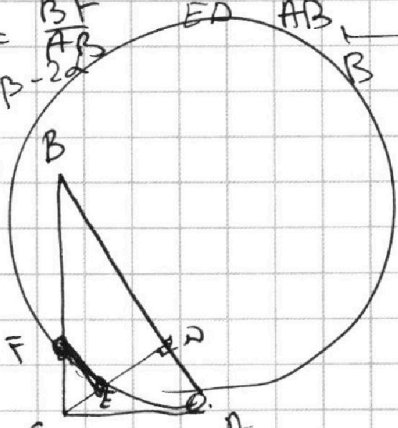


$$\frac{CE}{ED} = \frac{AC}{AB} = \sin \beta$$

$$CE = EA \cdot \sin \beta$$

$$CE = (CD - CE) \cdot \sin \beta$$

$$CE(1 + \sin \beta) = CD \cdot \sin \beta$$



$$\frac{CE}{ED} = \frac{AC}{AB} = x$$

$$\frac{1.4x}{x} = 1.4$$

$$\frac{AB}{BA} = 1.4$$

$$CE^2 = \frac{AC \cdot BF}{AB}$$

$$BF \cdot AC = CE \cdot ED$$

$$\frac{BF \cdot AC \cdot CE \cdot ED}{AB \cdot BF}$$

$$h = \sqrt{AB \cdot BF}$$

$$\sqrt{x \cdot \frac{2}{5}x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x$$

$$S_{\Delta CEF}$$

$$S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB} \Rightarrow CE = \frac{AC \cdot BF}{AB}$$

$$\frac{FE}{AA} = \frac{CE}{AB} = \frac{AC \cdot BF}{AB \cdot AD}$$

$$\frac{2}{5}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{5}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}x^2}{5\sqrt{5}}$$

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot BF} = \frac{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AC}{AF} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BF}$$