



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}; bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}; ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$
$$ab = 2^9 3^{10} 5^{10} k; bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} m; ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} n$$
$$(abc)^2 = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot kmn =$$
$$= 2^{9+14+19} 3^{10+13+18} 5^{10+13+30} kmn = 2^{42} 3^{41} 5^{43} kmn$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{21} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{kmn}$$

Услови  $abc \in \mathbb{N}, \sqrt{k} = \sqrt{3}, \sqrt{m} = \sqrt{5}, \sqrt{n} = 1$ , тогда

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{21} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{22}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{22}$$

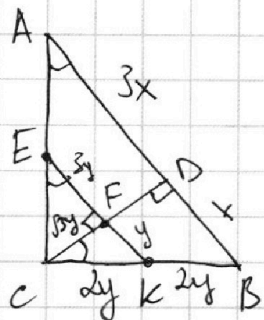
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $EF \parallel AB$ ,  $\frac{AD}{BD} = 3$

Т.к.  $EF \parallel AB$ ,  $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$

Продлим EF до точки K, пересечение  
с BC. KB — касательная к окружности,

пусть  $AD = 3x$ , тогда  $BD = x$ .  $\angle DCB = 90^\circ - \angle ABC =$   
 $= \angle CAB$ ,  $\angle ECF = \angle CAB$  т.к.  $EF \parallel AB$ .

$\triangle ECK \sim \triangle ACB$ , CF — высота в  $\triangle ECK \Rightarrow \frac{EF}{KF} = 3$ , пусть

$EF = 3y$ , тогда  $KF = y$ . По свойству высоты,

$CF = \sqrt{EF \cdot KF} = \sqrt{3y \cdot y} = y\sqrt{3}$ , аналогично,  $CD = \sqrt{3}x$

$\tan \angle FCK = \frac{FK}{CF} = \frac{y}{y\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle FCK = 30^\circ \Rightarrow \angle FKC = 60^\circ$

По свойству касательной и секущей из одной точки,

$BK^2 = KF \cdot KE = y \cdot 4y \Rightarrow BK = 2y$

$CK = \frac{BK}{\sin \angle FCK} = \frac{2y}{\sin 60^\circ} = \frac{2y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4y}{\sqrt{3}}$   $CK = \frac{y}{\sin \angle FCK} = 2y$

$BC = \frac{BD}{\sin \angle DCB} = \frac{BD}{\sin \angle FCK} = 2BD = 2x \Rightarrow 2x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$

$S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x \cdot 4x = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{\triangle CFE} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot y\sqrt{3} \cdot 3y = \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2$

$\frac{S_{\triangle ACB}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{1} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}y^2} = \frac{4x^2}{3y^2} = \frac{16}{3}$ . Ответ:  $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

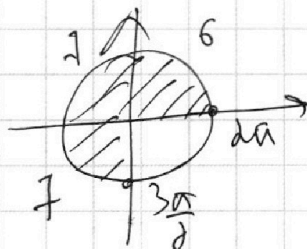
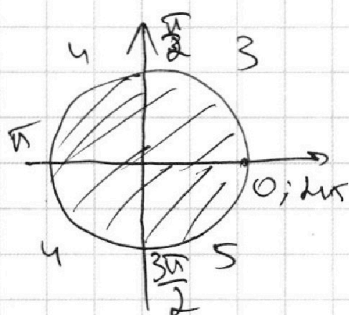
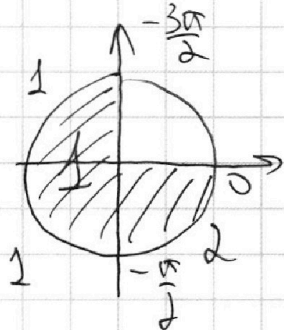
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $-3\pi \leq x \leq 2\pi$ , то  $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{7\pi}{2}$



$$\textcircled{1} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= \pi - \frac{5\pi}{2} + x = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$\textcircled{2} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= 2\pi - \frac{5\pi}{2} + x = x + \frac{\pi}{2}$$

~~3~~ Случаи 3, 4 и 5 рассмотрены ранее

$$\textcircled{6} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= -\frac{3\pi}{2} - x$$

$$\textcircled{7} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$= \pi + \frac{3\pi}{2} + x = x + \frac{5\pi}{2}$$

Тогда уравнение имеет вид:

$$ax + by - 3b = 0$$

Если  $x=0, y = \frac{3}{2}b$

Если  $y=0, x = \frac{3}{a}b$

~~1)  $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  решение нет~~

~~2)  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  решение~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

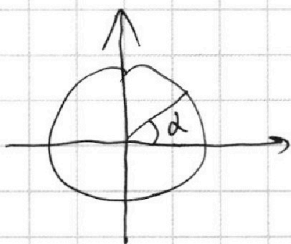
$$\text{S arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

Для того, чтобы были все решения,

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \quad (\text{т.к. } \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right])$$

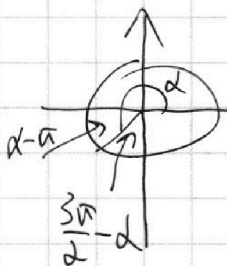
$-3\pi \leq x \leq 2\pi$ . Рассмотрим случаи, когда  $x \in [0; \pi)$ , ~~и  $x \in [\pi; 2\pi)$~~



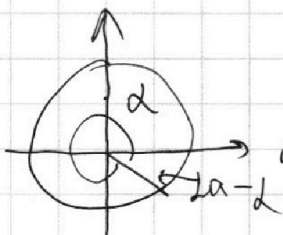
$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$



$$\arcsin(\sin \alpha) = \pi - \alpha \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x$$



$$\arcsin(\sin \alpha) = -(\alpha - \pi) = \pi - \alpha \Rightarrow \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x$$



$$\arcsin(\sin \alpha) = -(2\pi - \alpha) = \alpha - 2\pi \Rightarrow$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\frac{3\pi}{2} - x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда уравнение имеет вид:

$$\textcircled{1} \quad 5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 8\pi \Rightarrow x = 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{подходит}$$

$$\textcircled{2} \quad 5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 3\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{подходит}$$

$$\textcircled{3} \quad 5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2} - x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{не подходит.}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{5\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = -2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \pi \Rightarrow \text{подходит}$$

$$\textcircled{5} \quad -\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -6x = 8\pi \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi + 8\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \quad \text{подходит}$$

$$\textcircled{6} \quad -\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = \frac{11\pi}{6} \quad \text{не подходит}$$

$$\textcircled{7} \quad 5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = -12\pi \Rightarrow x = -3\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi \cdot 2 + \pi}{2} = \frac{7\pi}{2} \quad \text{подходит}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ 2\pi; \frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

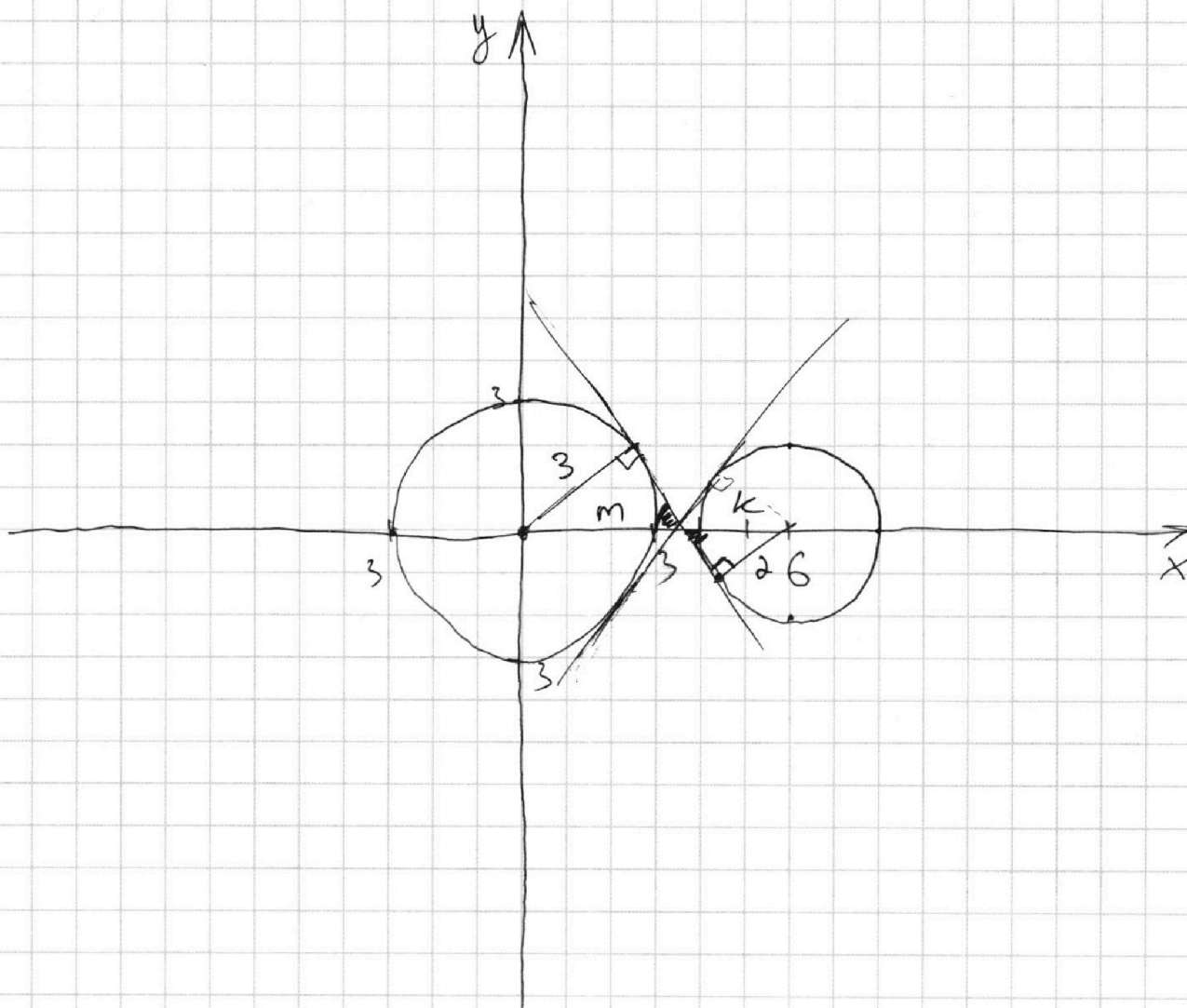
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \\ \Rightarrow (x - 6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Уравнение двух окружностей радиуса 3 и 2  
и с центрами в точках  $(0; 0)$  и  $(6; 0)$  соотв.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отдельно рассмотрим случай  $a=0$ . При  $a=0$   
 $y = \frac{3b}{2}$ . Очевидно, что при  $b=0$  решением будет 4.

Тогда  ~~$a \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}})$~~   $a \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}})$

Ответ:  $a \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax + 2y - 3z = 0$$

Параметр  $a$  задает угол наклона прямой,  
параметр  $-3z$  — точки пересечения с осью при  
фиксированном  $a$ .

Если при ~~каком-то~~ фиксированном  $a$  прямая  
не касается обеих окружностей или не лежит  
между ~~э~~ этими касательными, то можно

подобрать  $z$ , при котором прямая 4 раза пе-  
ресечет две окружности  $\Rightarrow$  4 решения

Заметим, что  $\sin \alpha = \frac{3}{m} = \frac{2}{k}$ , где  $\alpha$  — острый

на рисунке угол между касательной и  $Ox$ , а

$m$  и  $k$  это расстояния от центров до точки пере-  
сечения, то есть  $m+k=6$

$$3k = 2m \Rightarrow k = \frac{2}{3}m \Rightarrow \frac{5}{3}m = 6 \Rightarrow m = \frac{18}{5}, \text{ откуда}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\frac{18}{5}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}} = a$$

~~Аналогично найдем угол наклона второй прямой~~

Для второй прямой ситуация аналогична,  
только  $y$  и  $a < 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8, \text{ пусть } \log_3 x = t, \text{ тогда}$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8, t \neq 0$$

$$t^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8t$$

$$t^5 + 8t + 3,5 = 0 \quad (1)$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2 \log_3 5y} - 8, \text{ пусть } \log_3 5y = k$$

$$k^4 + \frac{2}{k} = \frac{11}{2k} - 8 \quad | \cdot k \quad (k \neq 0)$$

$$k^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8k$$

$$k^5 + 8k - 3,5 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) = t^5 + k^5 + 8(t+k) = 0$$

$$(k+t)(k^4 - k^3 t + k^2 t^2 - k t^3 + t^4 + 8) = 0$$

$$(k+t) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 5y = 0 \Leftrightarrow \log_3 (5xy) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

Т.к.  $x_2, x_1, y_2, y_1 \in \mathbb{Z}$ , то  $y_2 - y_1 \equiv 3$ . Пусть  $y_2 - y_1 = \Delta y$

и  $x_2 - x_1 = \Delta x$ , то есть  $3\Delta x + \Delta y = 33$ .

Т.к.  $\Delta y_{\max} = 42$ , то  $\Delta x_{\min} = -3$

Т.к.  $\Delta x_{\max} = 20$ , то  $\Delta y_{\min} = -27$

При  $\Delta y = 42 \rightarrow \Delta x = -3$

$\Delta y = 39 \rightarrow \Delta x = -2$

$\Delta y = 36 \rightarrow \Delta x = -1$

$\Delta y = 33 \rightarrow \Delta x = 0$

$\Delta y = 0 \rightarrow \Delta x = 11$

$\Delta y = -27 \rightarrow \Delta x = 20$

Выбрав одну координату  $y$  при фикс.  $\Delta y$ ,  
вторая получается автоматически, потому что выдох

~~сред.~~  $\Delta y$  есть  $(42 - |\Delta y| + 1)$  способов (+1 т.к. 0  
также учитывается) Аналогично, выбрать  $\Delta x$

есть  $(20 - |\Delta x| + 1)$  способов. Тогда всего способов:

$$\sum_{\substack{\Delta y = -27, \Delta x = 20 \\ \Delta y = 42, \Delta x = -3}} (42 - |\Delta y| + 1) \cdot (20 - |\Delta x| + 1)$$

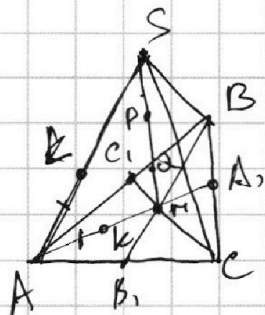
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



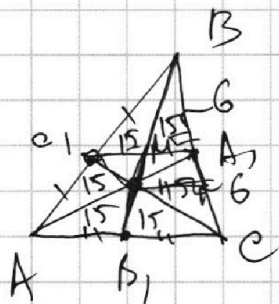
Дано:  $BC = AS = 12$

$$S_{ABC} = 90$$

$$a) AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

$AL = AK$  как касательные

Рассмотрим пирамиду  $\Delta ABC$ .



Медианы делят  $\Delta ABC$  на 6 равновеликих треугольничков, то есть на треугольнички площадью  $\frac{S}{6} = 15$

$$AH = \frac{2S}{BC} = \frac{180}{12} = 15 \quad MH' = 5$$

$$e, H'' = \frac{30 \cdot 2}{12} = 5$$



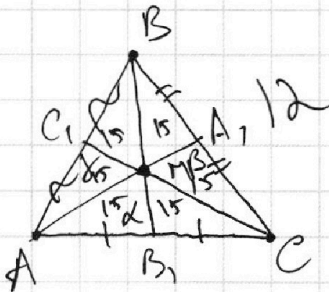
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BB_1 \cdot AB_1 \sin \alpha}{2} = S$$

$$BB_1 \cdot AB_1 \sin \alpha = S$$

$$AA_1 \cdot A_1C \sin \beta = S$$

$$CC_1 \cdot A_1C \sin \gamma = S$$

$$BB_1 \cdot AA_1 \cdot CC_1 \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{8} \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = S^3$$

$$\frac{AM \cdot CM \cdot \sin \gamma}{2} + \frac{AM \cdot BM \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{BM \cdot CM \cdot \sin \beta}{2}$$

$$AM = \frac{90}{24} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3,75$$

$$\frac{30}{24} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$\frac{m_b}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin \alpha = 30$$

$$\frac{P_{mabc}}{9} = \frac{abc}{8}$$

$$\frac{m_a}{3} \cdot \frac{a}{2} \sin \beta = 30$$

$$\frac{m_c}{3} \cdot \frac{c}{2} \sin \gamma = 30$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$16 \cdot 4 + 19 \cdot 2 + 22 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + \dots + 43 \cdot 10 + 40 \cdot 11 +$$

$$\begin{matrix} 28 & 31 & 34 & 37 & 40 & 43 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix}$$

$$ay = 18 \quad ay = 21$$

$$+ 37 \cdot 12 + 34 \cdot 13 + 31 \cdot 14 + 28 \cdot 15 + 25 \cdot 16 + 22 \cdot 17 +$$

$$ay = 24$$

$$ay = 27$$

$$ay =$$

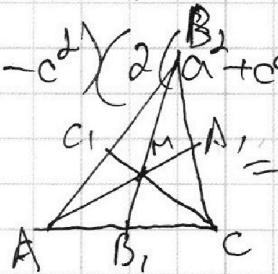
$$+ 19 \cdot 18 + 16 \cdot 19 + 13 \cdot 20 + 10 \cdot 21 + 7 \cdot 20 + 4 \cdot 19 + 1 \cdot 18$$

$$ay = 28 \quad \Delta x = (2a^2 + 2b^2 - c^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2) =$$

$$42 - |ay| + 1 = 20 \quad = (2(a^2 + b^2) - c^2)(2(a^2 + c^2) - b^2)(2(b^2 + c^2) - a^2) =$$

$$|ay| = 15 \Rightarrow ay = 15 \Rightarrow \Delta x = 6$$

$$42 - 18 + 1 = 25 \quad \Delta x = 5$$



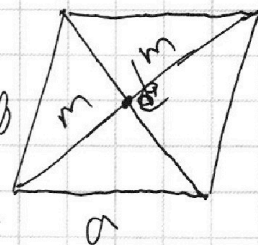
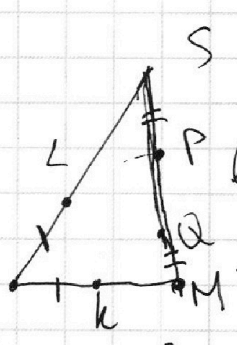
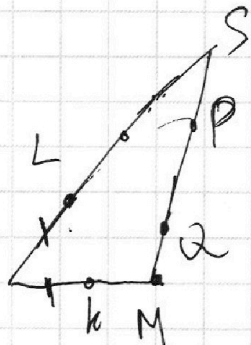
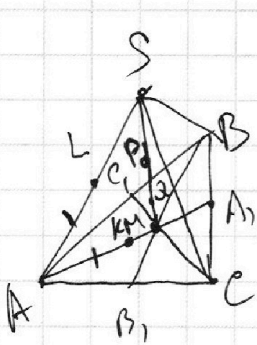
$$ay = 27 \quad 42 - 27 + 1 = 16 \Rightarrow \Delta x = 2 \Rightarrow 20 - 2 + 1 = 19$$

$$1 \cdot 18 + 4 \cdot 19 + 7 \cdot 20 + 10 \cdot 21 + 13 \cdot 20 + 16 \cdot 19 + 19 \cdot 18 + \dots$$

$$+ 43 \cdot 10 + 40 \cdot 9 + 37 \cdot 8 + 34 \cdot 7 + 31 \cdot 6 + 28 \cdot 5 +$$

$$+ 25 \cdot 4 + 22 \cdot 3 + 19 \cdot 2 + 16 \cdot 1$$

$$ab + (a+3)(b+1) + (a+6)(b+2) + (a+9)(b+3)$$



$$m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$2a^2 + 2b^2 = 4m^2 + c^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k^4 - k^3t + k^2t^2 - kt^3 + t^4 - 1$$

$$k^4 - t^4 - k^3t - k^4 + k^2t^2 - k^4 - kt^3 + k^3t + t^4 - k^4 - 1 +$$

$$+ t^4 + k^4 + k^4 + k^4$$

$$k^4 + t^4 + k^2t^2 + 8 \neq k^3t + kt^3$$

$$(k+t)^2 - k^2t^2 + 8$$

$$(k+t-k)(k+t+kt) + 8 - kt(k^2+t^2)$$

$$(k^2+t^2)^2 - k^2t^2 - kt(k^2+t^2) + 8 = 0$$

$$\left(\frac{k^2+t^2}{kt}\right)^2 - \frac{k^2+t^2}{kt} - 1 = 0$$

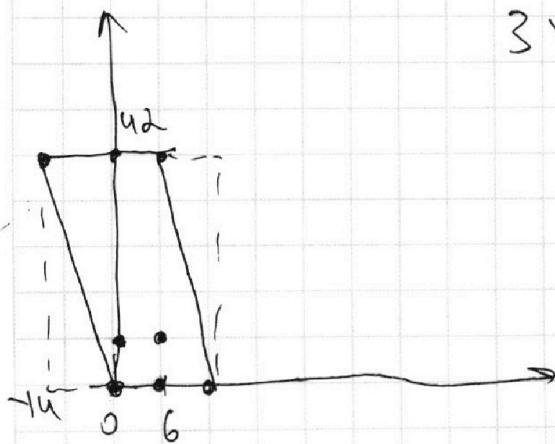
$$x_2^2 - x_1 + y_2^2 = 11$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$\frac{k^2+t^2}{kt} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\left(\frac{k^2+t^2}{kt} + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \left(\frac{k^2+t^2}{kt} + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) + 8 = 0$$

$$16k^2t^2(4k^2+t^2 - (kt + k\sqrt{5}))$$



$$3x_2^2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \quad \Delta y =$$

$$y_2 - y_1 = 3$$

~~$$40 - 20 = 800$$~~

$$\Delta y = 3 \quad x_2 - x_1 = 10$$

$$\Delta y = 6 \quad x_2 - x_1 = 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Delta y = 3$      $\Delta x = \frac{33 - 11 \cdot \frac{\Delta y}{3}}{1}$

$\Delta y = 3$      $\Delta x = 10$

$\Delta y = 6$      $\Delta x = 9$

$\Delta y = 9$      $\Delta x = 8$

;

$\Delta y = 30$      $\Delta x = 1$

$\Delta y = 33$      $\Delta x = 0$

$\Delta y = 36$      $\Delta x = -1$

$\Delta y = 39$      $\Delta x = -2$

$\Delta y = 42$      $\Delta x = -3$

~~14 сп. на y  
и 11 на x  
14 · 11 = 154~~

$\Delta x = 20$

$\Delta y = -27$

$\Delta y = 42$      $\Delta x = -3$

$\sum_{\substack{\Delta y = -27 \\ \Delta x = 20}}^{42 - 3} (42 - |\Delta y| + 1)(20 - |\Delta x| + 1)$

40 на y + 11 на x = 440

• 42 (42 - 3 + 1) сп.

37 на y + 12 на x =

• (42 - |n| + 1) сп

34 на y + 13 на x

• 3

30 на y + 14 на x

42 - 27 + 1 = 16

$\Delta y = -27$

$\Delta x = 20$

(20 - |\Delta x| + 1)

$\Delta y = -24$

$\Delta x = 19$

⋮

$\Delta y = 42$

$\Delta x = -3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда уравнение имеет вид  $9b^2 < 9a^2 + 36$

①  $5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 8\pi \Rightarrow x = 2\pi$   $9b^2 - 36ab + 36a^2 < 4a^2 + 16$

При  $x = 2\pi$ ,  $x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$  и не входит в ①

②  $5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 3\pi \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi$   $9(b^2 - a^2) < 36$

При  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$  и не входит в ②

③  $5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

При  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ , входит в ③

④  ~~$5x - \frac{5\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2}$~~   $\Rightarrow 4x = -3\pi \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$

При  $x = -\frac{3\pi}{4}$ ,  $x - \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow$  не входит в ④

⑤  $-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -6x = 8\pi \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3}$

При  $x = -\frac{4\pi}{3}$ ,  $x - \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow$  не входит в ⑤

⑥  $-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} < 0$  не подходит

⑦  $5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = -12\pi \Rightarrow x = -3\pi$

$x - \frac{\pi}{2}$      $ax + 2y - 3b = 0$      ~~$3a$~~

$(0; 0)$      $\frac{|3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} < 2$      $\frac{|6a - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} < 2$

$\frac{|3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} < 3$      $\frac{9b^2}{a^2 + 4} < 9$      $36a^2 + 9b^2 - 36ab = 4a^2 + 16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

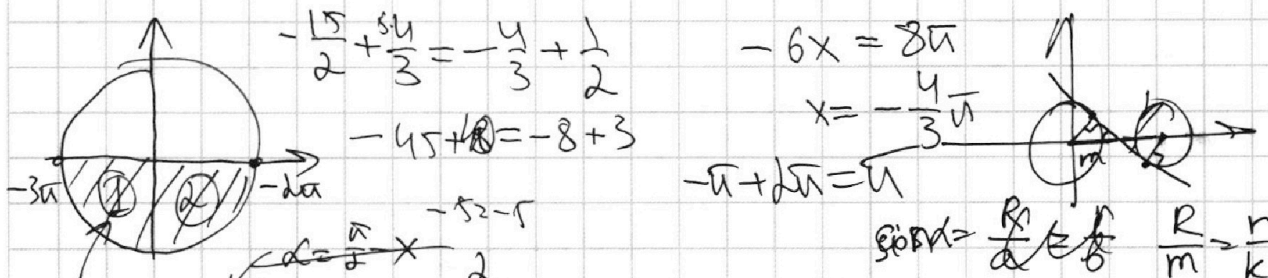
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



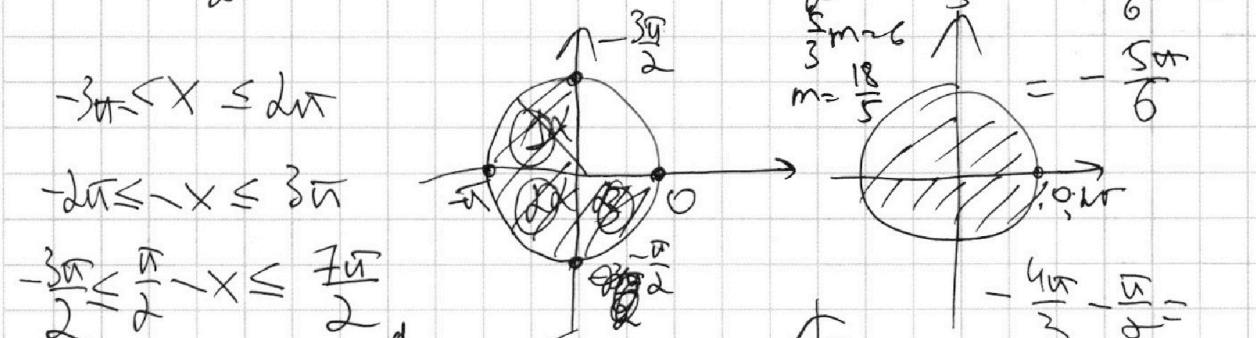
Дана  $x \in [-3\pi; 2\pi]$ : дане  $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$   $m+k=6$



~~$2 \arcsin(\sin \alpha) = \pi - \alpha + \pi = 5\pi - \alpha = 5\pi - \frac{\pi}{2} + x = 4,5\pi + x$~~

~~$\arcsin(\sin \alpha) = \pi - \alpha + 2\pi = \pi + \alpha$~~   $\frac{3b - ax - 12}{2}$   $Rb = ra$   $3k = 2m \Rightarrow k = \frac{2}{3}m$

$\arcsin(\sin \alpha) = \arcsin(\sin(\alpha + 4\pi)) = \pi - \alpha - 4\pi = -3\pi - \alpha = -3\pi - \frac{\pi}{2} + x = x - 3,5\pi$



$\arcsin(\sin(\alpha + 4\pi)) = y = \frac{3b - ax}{2}$

$\arcsin(\sin(\alpha + 4\pi)) = \pi - \alpha - 4\pi = -\alpha - \pi = x - \frac{\pi}{2} - \pi = x - \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$   $\frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$   $36a^2 - 144b + 144 > 0$

$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$   $\pi - \frac{3\pi}{2} + x = x - \frac{\pi}{2}$   $a^2 - 4b^2 + 4 > 0$

$P = 36a^2b^2 - 4(a^2 + 4b^2) \cdot 9(b^2 - 4) > 0$   $36a^2b^2 - 36(a^2b^2 - a^2 + 4b^3 - 4b) > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3 - 8$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8, \text{ пусть } \log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8 \quad (a^5 + b^5) = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) =$$

$$t^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8t$$

$$t^5 + 8t + 3,5 = 0 \rightarrow 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$(\log_3 (5y))^4 + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8, \log_3 5y = k$$

$$k^4 + \frac{2}{k} = \frac{11}{2k} - 8 \quad | \cdot k$$

$$\cancel{k^5 - k^4 + k^3 + k^2 + k + 2} = \cancel{11k^4 - 8k^5}$$

$$k^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8k$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 (5xy)$$

$$k^5 - 8k - \frac{7}{2} = 0$$

$$2k^5 + 16k - 3,5 = 0$$

$$\cancel{t^5 + k^5 + 8t - 8k = 0}$$

$$k^4 - kt^3 + k^2t^2 - kt^3 + t^4$$

$$t^5 + k^5 + 8t - 8k = 0$$

$$t^4 - 1 + k^4t^2 - kt^3$$

$$2(k^5 + t^5) + 16(k + t) = 0$$

$$k^3(k-1) + t^3(t-1) +$$

$$5xy = 1$$

$$(k+t)($$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$(k^4 + t^4 - k^3t - kt^3 + k^2t^2 - 1) = \frac{1}{5}k$$



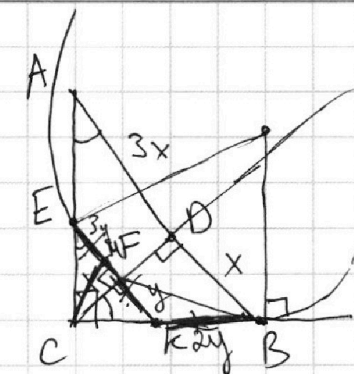
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: Найти:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$   $\sqrt{3}y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y$

$AB \parallel EF$

Т.к.  $EF \parallel AB$  и  $CD \perp AB$ ,  
 $EF \perp CD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$

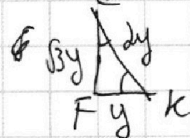
$\frac{AD}{BD} = 3$

Пусть  $AD = 3x$ , тогда  $BD = x$ .

$y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 = \frac{3}{2}y^2$

$\angle DCB = 90^\circ - \angle ABC = \angle CAB$ .  $\angle CEF = \angle CAD$  т.к.  $AB \parallel EF$

Пусть  $\angle CEF = \alpha$ , тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CF}{EF} = \frac{CD}{3x} = \frac{x}{CD}$



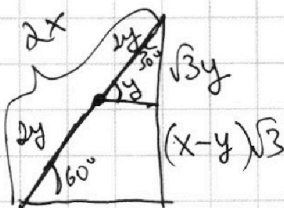
$CD = x\sqrt{3}$ . Продолжим EF до пересечения с BC (точка K)

Т.к.  $\triangle ACB \sim \triangle CEK$  по двум углам,  $\frac{EF}{KF} = \frac{AD}{BD} = 3$   $\frac{\sin \angle FCK}{\sin \angle CEF} = \frac{y}{CK}$

Пусть  $EF = 3y \Rightarrow FK = y$ . Т.к. CF - высота,  $CF = \sqrt{3y \cdot y} = y\sqrt{3}$

$CD = \frac{AB \cdot BC}{AB} \Rightarrow \sqrt{3}x = \frac{AB \cdot BC}{4x} \Rightarrow AB \cdot BC = 4\sqrt{3}x^2$

$CF = \frac{EF \cdot FK}{CF} \Rightarrow \sqrt{3}y = \frac{EF \cdot EK}{4y} \Rightarrow EF \cdot EK = 4\sqrt{3}y^2$



$BK = KF \cdot KE = 4y^2 \Rightarrow BK = 2y$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{\sqrt{3}y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{BC - 2y} = \frac{x}{BC} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{BC - 2y}{BC} \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 - \frac{2y}{BC} \Rightarrow 4y = 2x$

$\frac{BC}{CK} = \frac{CK}{BC} = \frac{EK}{AB} = \frac{y}{x}$

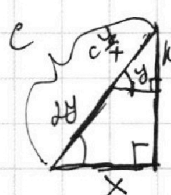
$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$1 - \frac{2y}{BC} = 1 - \frac{AE}{AC} \Rightarrow y = \frac{AE}{2}$

$\frac{c}{2y - c} = \frac{x}{y} \Rightarrow 2y - c = \frac{cy}{x}$

$\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ$   
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2y + \frac{cy}{x} = c \Rightarrow 2xy + cy = cx$



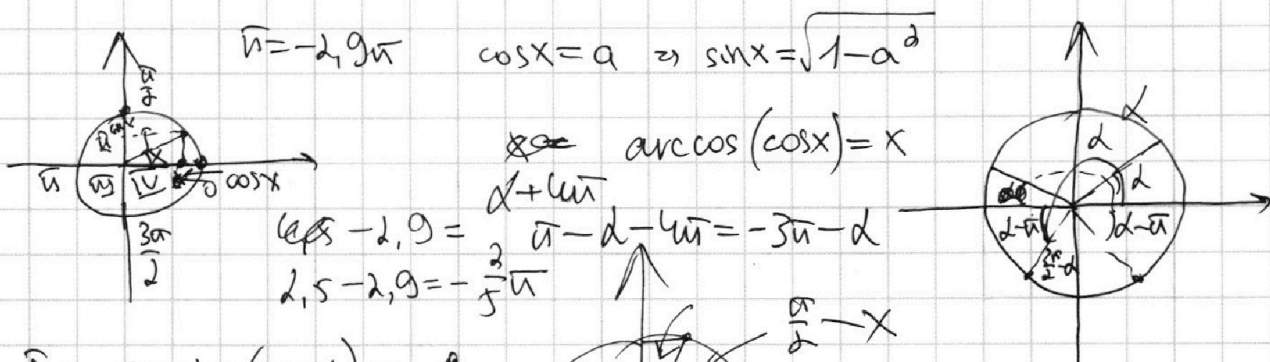
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

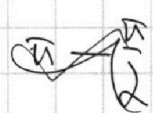
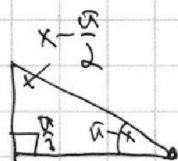
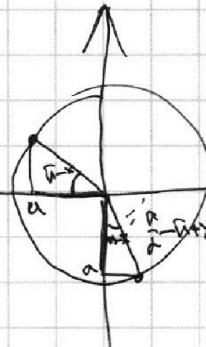
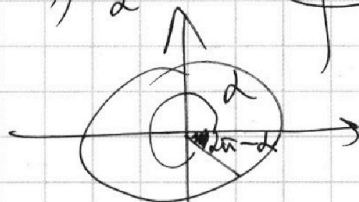
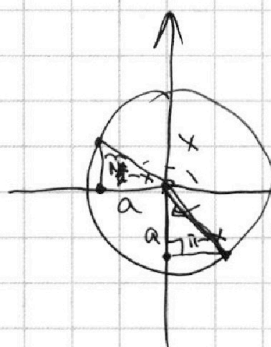
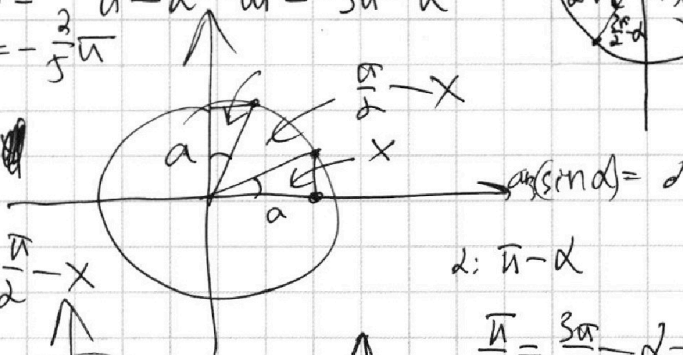
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



I:  $\arcsin(\cos x) =$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$



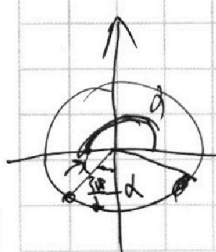
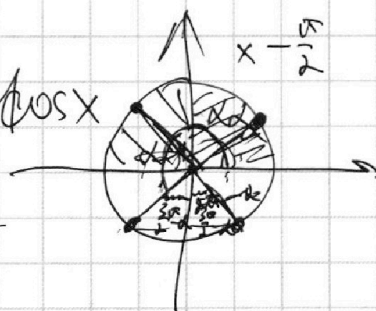
$\pi - x + y = \frac{\pi}{2}$      $\sin(d - \pi) = -\sin d$

$y = x - \frac{\pi}{2} \arcsin(\sin(\frac{7\pi}{6})) = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$

$\alpha = -2,9\bar{v} \Rightarrow 2,9\bar{v} - 3\bar{v} = -\frac{\pi}{10}$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin \frac{\pi}{2} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{2} = \cos x$

$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$      $-d\pi \leq x \leq 2\pi$



$0 < x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$

$\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$

$\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + \alpha =$

$-(\alpha - \pi) = \pi - \alpha$

$\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + d = d - \pi$