



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

~~$ab = pq \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, $bc = qm \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $ac = mp \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$~~

~~$ab \cdot bc \cdot ac = (pqm)^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$~~

~~$(abc)^2 = (pqm)^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$~~

Поскольку $a, b, c, p, q, m \in \mathbb{N}$, ~~тогда $3 \cdot 5^{53} (pqm)^2 = a^2$~~

Тогда $G^2 = 3^k \cdot 5^l$, $k:2, l:2$. Пусть l тогда $k=4l+8qpm$

Пусть a_2 - степень двойки, на

которую делится a .

$abc : 2^{19}$
 $abc : 5^{30}$
 $abc : 3^{18}$

Аналогичные обозначения для других степеней.

$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 19 \\ a_2 + b_2 \geq 9 \\ c_2 + b_2 \geq 14 \end{cases}$ $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$
р-во при $a_2=7, b_2=2, c_2=12$

$(*) \begin{cases} a_3 + c_3 \geq 18 \\ a_3 + b_3 \geq 10 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \end{cases}$ $a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$, $a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$ (т.к. $\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$)
при $\begin{cases} a_3 = 8 \\ b_3 = 3 \\ c_3 = 10 \end{cases}$

$(*)_1 \begin{cases} a_5 + c_5 \geq 30 \\ a_5 + b_5 \geq 10 \\ c_5 + b_5 \geq 13 \end{cases}$ $a_5 + b_5 + c_5 \geq \frac{53}{2}$, $a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$ ($\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$).

$a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$ ($a_5 + c_5 \geq 30$)
при $\begin{cases} a_5 = 10 \\ c_5 = 20 \\ b_5 = 0 \end{cases}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{30}$, $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$, $b = 2^2 \cdot 3^3$, $c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

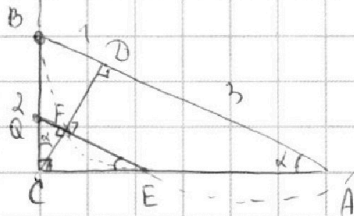
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2



1) $\angle BCD = \alpha \Rightarrow \angle CDA = \alpha$, $\triangle BCD \sim \triangle CDA$ по 2 углам
 $\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}$, $CD^2 = AD \cdot BD = 1 \cdot 3 = 3$, $CD = \sqrt{3}$
 $BC = 2$

2) $EF \cap BC = Q$. Пусть $FQ = x$.
 Тогда $\frac{QF}{FE} = \frac{BD}{DA}$ (т. параллельных), $FE = 3x$

$\triangle QCF \sim \triangle BCD$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{QC}{CB} = \frac{QF}{BD}$,

$\frac{QC}{2} = \frac{x}{1}$, $QC = 2x$, $BQ = 2 - 2x$. Также, $\frac{CF}{CB} = \frac{QF}{BD}$, $CF = \frac{2x \cdot \sqrt{3}}{1}$

степень точки Q: $QB^2 = QF \cdot QE$, $(2 - 2x)^2 = x \cdot 4x$, $4 - 4x^2 - 8x = 4x^2$, $8x = 4 - 4x^2$, $2x = 1 - x^2$

~~3) $\triangle CQE \sim \triangle CDA$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{S_{CQE}}{S_{CDA}} = \left(\frac{QE}{AB}\right)^2$ $\frac{S_{CQE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CQE}}{S_{CDA}} \cdot \frac{S_{CDA}}{S_{ABC}}$
 S_{ABC} - площадь $\triangle ABC$. $\frac{S_{ABC}}{S_{CQE}} = \left(\frac{4}{1/2}\right)^2 = 16 \cdot 4 = 64$~~

3) S_{CEF} - площадь $\triangle CEF$, $S_{CEF} = CF \cdot FE \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

S_{ABC} - площадь $\triangle ABC$, $S_{ABC} = BC \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \sqrt{16 - 4} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 $5a \cos \sin(\cos X) = x + \frac{\pi}{2}$, Пусть $a \cos \sin(\cos X) = d, d \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$.

$(5d) \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, $(x + \frac{\pi}{2}) \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, $x \in [-3\pi; 2\pi]$.

 $\sin 5d = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $\sin 5d = \cos x$

 $\cos d = \cos x$

 $|\cos d| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

~~$\sin 2d \cos 3d + \sin 3d \cos 2d = \cos x$~~

$8 \sin d \cos^4 d - 6 \sin d \cos^2 d + 6 \sin d \cos^2 d - 8 \sin^3 d \cos^2 d + 4 \sin^3 d + 3 \sin d = \cos x$

Пусть $\cos x = t$

~~$8t(1-t^2)^2 - 6t(1-t^2) + 6t(1-t^2) + 8t^3(1-t^2) + 4t^3 + 3t = t$~~

~~$t(8(1-t^2)^2 - 8t^2 + 8t^4 + 4t^2 - 4) = 0$~~

~~$t \neq 0$~~

~~$8t^4 - 16t^2 + 8t^2 - 8t^4 + 4t^2 + 2 = 0$~~

~~$\cos x = 0$~~ $t = 0$

~~$8t^4 - 16t^2 + 8t^2 - 8t^4 + 4t^2 + 2 = 0$~~

$6 \cos x = 0$

$16t^4 - 20t^2 + 4 = 0$, $8t^4 - 10t^2 + 2 = 0$, $(t^2 - 1)(8t^2 - 2) = 0$, $(t-1)(t+1)(2t-1)(2t+1) = 0$

- (1) $\cos X = 0, 5d = 0$
- (2) $\cos X = -1, 5d = -\frac{5\pi}{2}$
- (3) $\cos X = \frac{1}{2}, 5d = \frac{5\pi}{2}$
- (4) $\cos X = \frac{1}{2}, 5d = \frac{5\pi}{6}$
- (5) $\cos X = -\frac{1}{2}, 5d = -\frac{5\pi}{6}$

- (1): $x + \frac{\pi}{2} = 0, x = -\frac{\pi}{2}, \cos x = 0 \checkmark$
- (2): $x + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}, x = -3\pi, \cos(-3\pi) = -1 \checkmark$
- (3): $x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}, x = 2\pi, \cos(2\pi) = 1 \checkmark$
- (4): $x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{2\pi}{3}, \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \checkmark$
- (5): $x + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6}, x = -\frac{8\pi}{6}, \cos(-\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \checkmark$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{2}$

Ответ: $\{-\frac{\pi}{2}, -3\pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_3 3 = \frac{5}{2} \log_3 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_3 x - 8$$

$$2 \log_3^5 x + 12 = 5 - 16 \log_3 x$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0$$

$$2) \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$2 \log_3^5(5y) + 4 - 11 - 16 \log_3 5y$$

$$2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3(5y) - 7 = 0$$

$$f_1(t) = 2t^5 + 16t$$

$f_2(t) = 10t^4 + 16 > 0 \Rightarrow f$ - возрастает на \mathbb{R} ($f_2(g(x))$ - возрастает)

$g(x) = \log_3 x$ - непрерывная, монотонно возрастающая

$(f_1(g(x)) = 7)$ - имеет не более одного решения (т.к. f_1 - монотонно возрастает)

Значит, $x = 5y$, $xy = 5y^2$

Аналогично $f_2(t) = 2t^5 + 16t - 7$

$f_3(t) = 20t^4 + 16 > 0 \Rightarrow f_2(g(5y))$ - возрастает, $f_2(g(5y)) = 0$
имеет не более 1 решения.

Также, $f_4(t) = -f_3(t)$, т.е. если $(f_1(t) = 7)$, то $(f_4(t) = -7)$

~~Тогда $x = 5y$, $xy = 5y^2$~~

~~Тогда \log Тогда $(f_1(\log_3 x) = 7) \Rightarrow (f_1(-\log_3 x) = 7)$~~

~~$f_1(\log_3 x) = 7$ (x) $f_1(-\log_3 x) = f_1(\log_3(5y))$
 $f_1(\log_3 5y) = 7$~~

(x) - $\Leftrightarrow -\log_3 x = \log_3 5y$, поскольку f_1 - монотонно возрастающая.

$$\log_3 5y + \log_3 x = 0 \quad \log_3(5yx) = 0, \quad 5yx = 1, \quad yx = \frac{1}{5}$$

(*) $f_1(-t) = 2 \cdot (-t)^5 + 16(-t) = -(2t^5 + 16t) = -f_1(t)$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

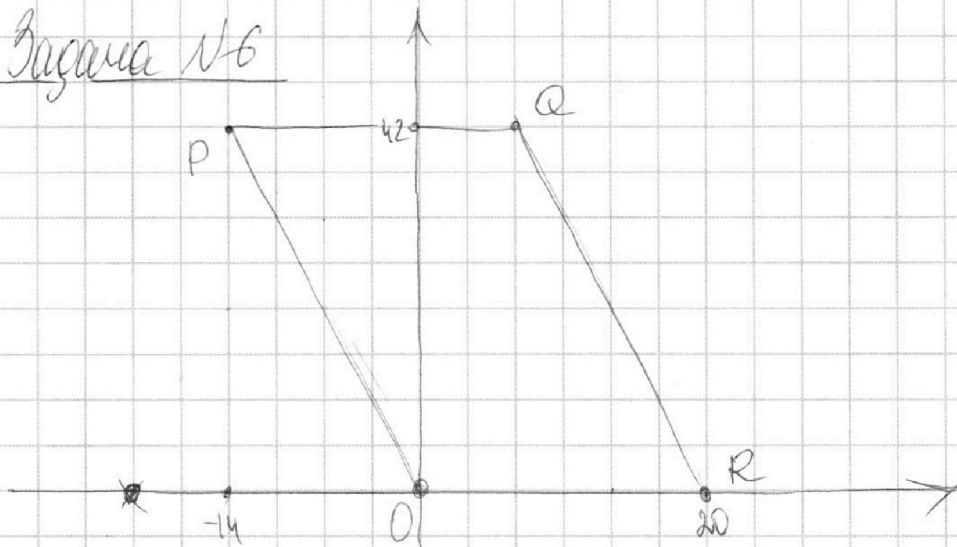
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6



~~AB~~ ~~AB~~ $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ $\vec{AB} = \left(\frac{3}{a}(x_2 - x_1), \frac{4}{b}(y_2 - y_1) \right)$

$(3a + b = 33) \Rightarrow b = 33 - 3a$

Если $a \in [0; 42]$, $b \in [0; 34]$. Для таких a, b всегда найдутся x_1, x_2, y_1, y_2 , такие, что

Для любых a, b ,

$x \in [0; 42], y \in [-14; 20]$

$3a + b = 33$, $3a \in [-14; 42]$

$(3a = 33 - b) \in [-9; 76]$

$a \in [-3; 25]$. Для каждого a есть $b = 33 - 3a$.

Всего в таких a - 29

Ответ: 29



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~НЕ ПРОВЕРЯТЬ~~

$$\frac{-42}{14} = \frac{-6}{2} = -3$$

в

$$33 - 42 =$$

$$60 + 16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$7 - \frac{2}{32} + \frac{16}{2} < 0$$

~~$$2a^4 = 16$$~~

$$f(a) = -7$$

a - решение

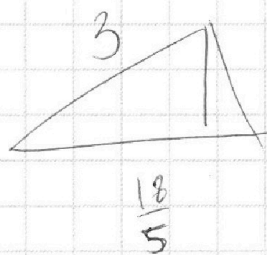
$$f(b) = 7$$

$$b = -a$$

$$f(-a) = 7$$

$$\frac{3k}{2k}$$

$$5k - 6 \quad k = \frac{6}{5} \quad 3k = \frac{18}{5}$$



$$AM = \frac{3 \cdot \sqrt{11} \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 18 \cdot 2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{11} \cdot 10}{2 \cdot 11} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$8a^2 - 10a + 2$$

$$(a-1)(8a-2)$$

$$HC = \sqrt{\frac{9 \cdot 11}{25} - \frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11(9 \cdot 4 - 25)}}{2 \cdot 10} = \frac{11}{10}$$

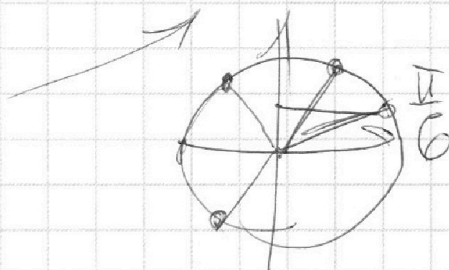
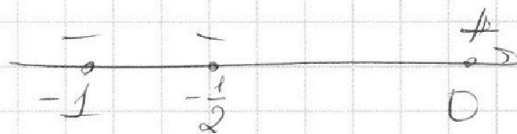
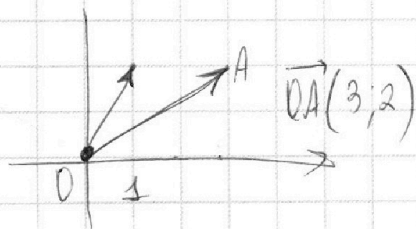
$$\sin \alpha = a$$

$$\cos \alpha = b$$

$$2ab(4b^3 - 3b) + (3a - 4a^3)(1 - 2b^2) =$$

$$8ab^4 - 6ab^2 + 6ab^2 - 8a^3b^2 - 3a + 4a^3$$

$$(t-2)(t+2)$$



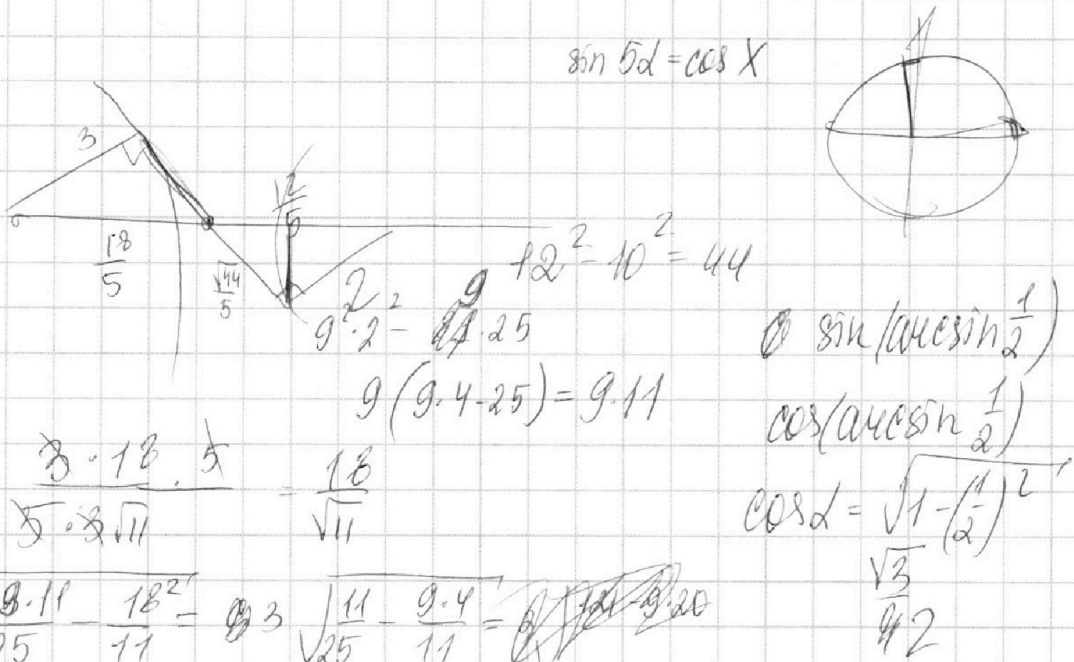
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 5d = \cos X$$

$$9 \cdot 2^2 - 9 \cdot 4 \cdot 25 = 12^2 - 10^2 = 44$$

$$9(9 \cdot 4 - 25) = 9 \cdot 11$$

$$\frac{18}{5} \cdot \frac{18}{5} - \frac{18}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{18}{5} \cdot \frac{18}{5}$$

$$\sin(\arcsin \frac{1}{2})$$

$$\cos(\arcsin \frac{1}{2})$$

$$\cos d = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{9 \cdot 11}{25} - \frac{18^2}{11}} = 3 \sqrt{\frac{11}{25} - \frac{9 \cdot 4}{11}} = \frac{3 \sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{9 \cdot 11}{25} - \frac{81 \cdot 4}{11}$$

$$\frac{2 \cdot 11}{5}$$

$$\frac{9 \cdot 9 \cdot 4}{25} - 9 = 9 \left(\frac{9 \cdot 4 - 25}{25} \right) = \frac{3}{5} \sqrt{11}$$

$$\frac{3 \sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{3 \cdot \frac{3 \sqrt{11}}{5} \cdot 5}{18} = \frac{9 \sqrt{11}}{18} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

УП
ОН

$$\frac{9 \cdot 11}{25} - \frac{11}{4} =$$

$$\sqrt{\frac{11 \cdot (9 \cdot 4 - 25)}{25 \cdot 4}} = \frac{11}{5 \cdot 2} = \frac{11}{10}$$

$$2 \sin d \cos d (4 \cos^2 d - 3 \cos d) + (3 \sin d - 4 \sin^2 d) (2 \cos^2 d - 1) =$$

$$= 8 \sin d \cos^4 d - 6 \sin d \cos^2 d + 6 \sin d \cos^2 d - 8 \sin^2 d \cos^2 d + 4 \sin^3 d + 3 \sin d$$

$$8 + 8t^4 - 16t^2 + 8t^2 - 8t^4 + 4t^2 + 2$$

$$-4t^2 + 10 = 0$$

$$t^2 = \frac{10}{4} \quad t = \pm \sqrt{\frac{10}{4}}$$

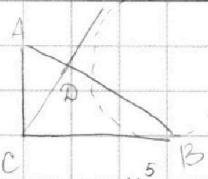
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



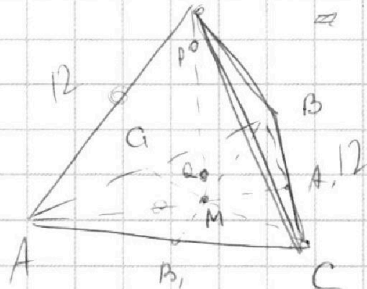
$$2a^5 + 16a - 7 = 0$$

$$f' = 10a^4 + 16 > 0$$

$$2 \cdot 7^5 - 16 \cdot 7 - 7 = 0$$

$$2 \cdot 7^4 - 16 = 7$$

$$2 \cdot \frac{7^5}{2^5} = \frac{16 \cdot 7 - 7}{2}$$



$$S_{ABC} = 90$$

$$\frac{1}{16} + 8 - 7$$

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{75} + \frac{16}{7} - 7 = 0$$

() () (x-a)

$$\frac{a}{c} = 2^{-5} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-3}$$

(by 2)?

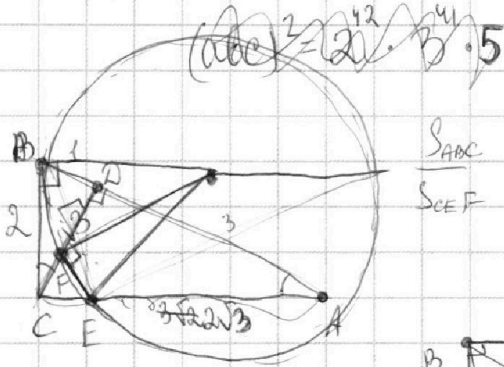
$$\frac{c}{a} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

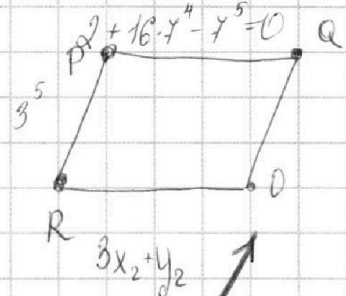
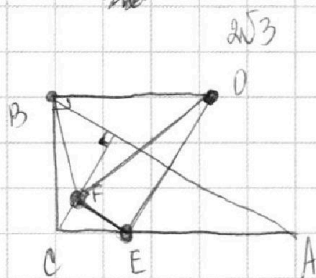
$$\frac{a^5 + b^5}{a^5 + b^5} = \frac{a^5 + b^5}{a^5 + b^5}$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEP}} = \frac{BD = EP}{EP = AD}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{CP}{3}$$

$$CP = 3$$



$$\sin(\cos X) = x + \frac{5}{2}$$

$$\arcsin(\cos X) = \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos X = \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$3x_2 + y_2 - 3x_3 - y_3 = 33$$

$$S(AB) = 33$$

$$\log_3^4 X + \frac{2}{\log_3 X} = \frac{5}{2 \log_3 X} - 8$$

$$\log_3^4 by + \frac{2}{\log_3 by} = \frac{11}{2 \log_3 by} - 8$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$$

$$2b^5 + 4 = 11 - 816b$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$$

$$2a^5 + 16a - 7 = 0$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$2a^5 + 16a - 7 = 0$$