МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14}$, $bc \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $ac \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

Перемножим эти числа: $ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2 \vdots 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

Тогда $a^2b^2c^2 = 2^{34} 3^{43} 5^{75} \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$.

$abc = \sqrt{2^{34} 3^{43} 5^{75} k} = 2^{17} 3^{21} 5^{37} \sqrt{15k}$

Наименьшее возможное значение $\underbrace{\text{достигается}}_{}$ (оно может не достигаться) при $k = 15$, так как $abc \in \mathbb{N}$.

Тогда $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot 15 = 2^{17} \cdot 3^{22} 5^{38}$

$ac \vdots 5^{43}$, поэтому случай $abc \neq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

Наименьшее возможное достижимое значение $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 $5\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{2} + x$

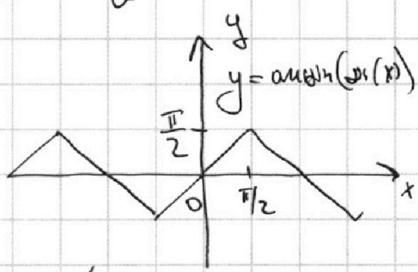
$\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

Поскольку $\arccos(\alpha) + \arcsin(\alpha) = \frac{\pi}{2}$, где $\alpha \in [-1; 1]$, то,

подставив $\alpha = \sin(x)$, получим, что

$\arccos(\sin(x)) + \arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))$.

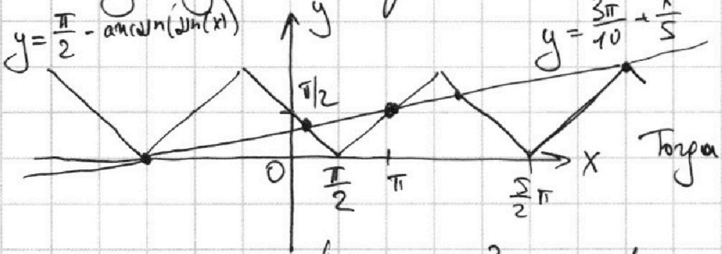
Итого: $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$



Построим график функции $y = \arcsin(\sin(x))$

$y = x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, причём $y \in [-1; 1]$.

Тогда получаем следующую кусочно-линейную периодическую функцию, показанную на графике.



Если $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, то

$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = x + \frac{3\pi}{2}$

Тогда $x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\frac{4}{5}x = -\frac{6}{5}\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\pi$.

Заметим, что при $x < -\frac{3}{2}\pi$ корней нет, поскольку тогда $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} < 0$.

Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, то $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = -\frac{\pi}{2} + x = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow x = \pi$

Если $x \in \left[\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$, то $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = -x + \frac{5}{2}\pi = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow x = \frac{11}{6}\pi$

Если $x \in \left[\frac{5}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right]$, то $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = x - \frac{5}{2}\pi = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}\pi$

Заметим, что все $x > \frac{7}{2}\pi$ не подходят, поскольку тогда

$\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} > \pi$, что не может пересекаться с $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))$.

Таким образом, есть всего 5 корней.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11}{6}\pi; \frac{7}{2}\pi\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

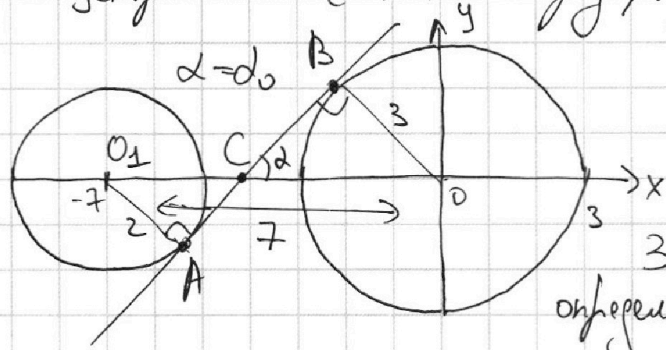
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$ Решу систему уравнений графически:

$x+3ay-7b=0$ – уравнение прямой (в координатах x, y).

$x^2+x^2-9=0$ – уравнение окружности с центром в $(0;0)$ и радиусом 3.

$x^2+14x+y^2+45=(x+7)^2+y^2-4=0$ – уравнение окружности с центром в $(-7;0)$ и радиусом 2.



Таким образом, 2-е уравнение в исходной системе – это две окружности, изображённые на рисунке.

Заметим, что параметр a определяет наклон прямой $x+3ay-3b=0$, b – её движение.

$y=\dfrac{3b-x}{3a}=\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{3a}$. Заметим, что ответом на задачу является $\alpha\in(-\alpha_0;\alpha_0)$, где α_0 – крайний случай, когда прямая является общей касательной 2-х окружностей.

Рассмотрим этот случай. α – угол наклона прямой $\left(\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$. α максимален, если $x+3ay-7b=0$ – общая внутренняя касательная (при внешней касательной угол будет меньше).

Пусть O_1 – центр окружности меньшего радиуса, A и B – точки касания прямой и окружностей. C – точка пересечения AB с осью абсцисс.

По свойству касательной $O_1A\perp AB$, $AB\perp BO$. Тогда $\triangle CAO_1\sim\triangle CBO$, поскольку $\angle O_1CA=\angle BCO$.

Тогда $\dfrac{O_1A}{BO}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{O_1C}{CO}$. Поскольку $O_1C+CO=7$, то $O_1C=\dfrac{14}{5}$, $CO=\dfrac{21}{5}$

По теореме Пифагора $\triangle BOC$ получаем $CB=\sqrt{CO^2-BO^2}=\dfrac{6}{5}\sqrt{6}$

$tg(\alpha_0)=\dfrac{BO}{BC}=\dfrac{3\cdot5}{6\sqrt6}=\cancel{15}\ \dfrac{5}{2\sqrt6}$ Итого: $\alpha=-\dfrac{1}{3a}\in\left(-\dfrac{5}{2\sqrt6};\dfrac{5}{2\sqrt6}\right)$, $a\neq0$.

Ответ: $a\in\left(-\infty;-\dfrac{2\sqrt6}{15}\right)\cup\left(\dfrac{2\sqrt6}{15};+\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}(7) = \log_{36x^2}(343) - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\log_y(7) = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$

Пусть $a = 6x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$(\log_7(a))^4 - 2\log_a(7) = \log_{a^2}(7^3) - 4$

$(\log_7(a))^4 - \frac{2}{\log_7(a)} = \frac{3}{2}\log_a(7) - 4 \Leftrightarrow (\log_7(a))^4 - \frac{2}{\log_7(a)} = \frac{3}{2\log_7(a)} - 4$

Пусть $b = \log_7(a)$.

$b^4 - \frac{2}{b} = \frac{3}{2b} - 4 \Leftrightarrow 2b^5 + 8b - 7 = 0$

Пусть $c = \log_7(y)$ Тогда $c^4 + \frac{6}{c} = \frac{5}{2}\frac{1}{c} - 4$

$\Leftrightarrow 2c^5 + 8c + 7 = 0$

Заметим, что искомое $xy = \frac{7^b \cdot 7^c}{6} = \frac{7^{b+c}}{6}$

~~Т.к.~~ b, c – корни $(2p^5+8p-7)(2p^5+8p+7)=0$. Получаем

$4p^{10} + 64p^2 + 32p^6 - 49 = 0$

По теореме Виета сумма корней $b+c=0$

Тогда $xy = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$

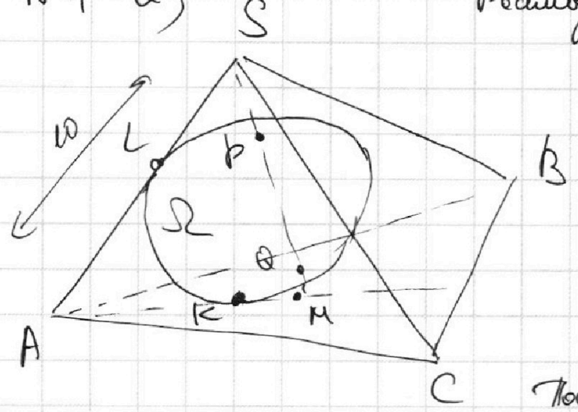
Ответ: $\frac{1}{6}$.

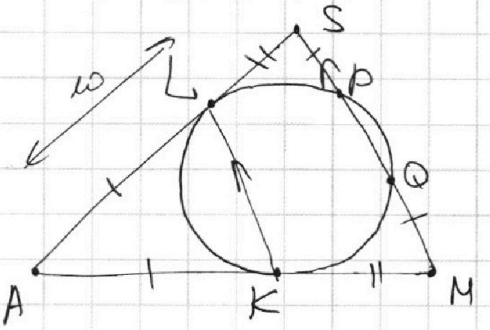
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7 а) Рассмотрим сечение плоскостью (SAM).





Поскольку $\Omega \cap (ABC) = \{K\}$, то окружность $\omega = \Omega \cap (SAM)$ ~~тоже~~ касается AM в точке K.

По ~~свойству~~ теореме о касательной: $MK^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ+PQ)$,

$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP+PQ)$ (будем считать, что точки P, Q расположены так, как на рисунке). Поскольку $SP = QM$, то $SL = MQ$, ведь PQ — общая. По свойству касательной $AK = AL$

Итого: $\frac{AL}{LS} = \frac{AK}{KM} \Rightarrow \triangle ALK \sim \triangle ASM \Rightarrow LK \parallel SM$.

По условию $AS = 10 \Rightarrow AM = 10$. Тогда длина медианы, проведённой из точки A, равна 15. Пусть $AH \perp BC$, $H \in (BC)$.

Рассмотрим $\triangle AHA_1$: $AH \cdot BC = 120$ (площадь $\triangle ABC$), $BC = 10 \Rightarrow AH = 12$.

$AA_1 = 15$. По теореме Пифагора $HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9$.

$\sin(\angle AA_1B) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{AH}{AA_1} \Rightarrow \cos(\angle AA_1B) = \sqrt{1 - (\sin(\angle AA_1B))^2} = \frac{3}{5}$

По теореме косинусов $\triangle ABA_1$: (не умаляя общности, считаем косинус положительным).

$$\frac{3}{5} = \frac{AA_1^2 + A_1B^2 - AB^2}{2 \cdot AA_1 \cdot A_1B} = \frac{15^2 + 5^2 - AB^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Rightarrow 150 - AB^2 = 90 \Leftrightarrow AB = \sqrt{60}$$

Аналогично для $\triangle AA_1C$

$$-\frac{3}{5} = \frac{15^2 + 5^2 - AC^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Leftrightarrow 150 - AC^2 = -90 \Leftrightarrow AC = \sqrt{240}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По формуле длины медианы ($\triangle ABC$)

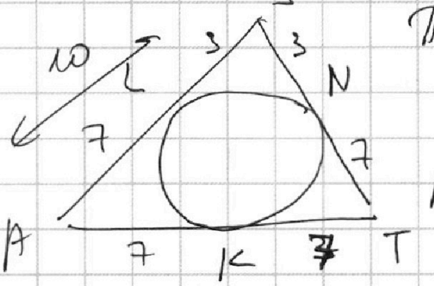
$$BB_1 = \sqrt{\frac{AB^2}{2}+\frac{BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{60}{2}+\frac{100}{2}-\frac{240}{4}} = \sqrt{20}$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{BC^2}{2}+\frac{AC^2}{2}-\frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{100}{2}+\frac{240}{2}-\frac{60}{4}} = \sqrt{155}$$

Искомая величина $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15\sqrt{20\cdot 155} = 150\sqrt{31}$

б) Определим двугранный угол:

Пусть $ST \perp BC$, где $T \in (BC)$, рассмотрим $\triangle AST$.



Поскольку $SN = 3$, то $SL = 3$ (касательные)

~~Тогда $AL = 7$, $= AK$, $KT = 3$~~

$$MT = \frac{AA_1}{3} = 4 \Rightarrow AT = 14$$

Тогда $\triangle AST$ равносторонний $\Rightarrow \angle STA = 60^\circ$.
Это и есть величина двугранного угла.

Ответ: а) $150\sqrt{31}$
б) 60°

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = 2^7 3^{12} 5^{15}$ $\quad bc = 2^{13} 3^{15} 5^{18}$ $\quad ac = 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$34 - 14 = 20$

$a_1 + b_1 + b_1 + c_1 + a_1 + c_1 = 2(a_1 + b_1 + c_1) = 34$

$a_1 + b_1 + c_1 = 17$

$a = 2^3 3^4 5$

$a_1 = 17 - (b_1 + c_1) = 17 - 14 = 3$

$a_2 = 21 - 17 = 4$

$a_3 = 37 -$

$441 - 125 = 316$

$\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{6\sqrt6}{5}$

$\left|\frac{1}{3a}\right| < \frac{5}{2\sqrt6}$ $\quad \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt6} \quad |\cdot 6\sqrt6 a$

$\frac{2\cancel{6}\sqrt6 a}{\cancel{3a}} < \frac{5\cdot \overset{3}{\cancel{6}}\cancel{\sqrt6} a}{\cancel{2\sqrt6}}$ $\quad 2\sqrt6 < 15a \quad a \geqslant \frac{2\sqrt6}{15}$

$\frac{1\cdot 5}{2\sqrt6}$

$b^4 - \frac{2}{b} = \frac{3}{2b} - 4 \quad |\cdot 2b$

$2b^5 - 4 = 3 - 8b$

$b = \log_7(6x)$

$7^b = 7^{\log_7 (6x)}$

$6x = 7^b$

$2b^5 + 8b - 7 = 0$

$\log_7^4(y) + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$ $\quad y = 7^c$

$c^4 + \frac{6}{c} = \frac{5}{2c} - 4 \quad |\cdot 2c \iff 2c^5 + 12 = 5 - 8c$

$2c^5 + 8c + 7 = 0$ $\quad xy = \frac{7^b \cdot 7^c}{6} = \frac{7^{bc}}{6}$

$4p^{10} + 64p^2 + 32c^6 - 49 = 0$

$4q^5 + 64q + 32p^3 - 49 = 0$ $\quad 150\sqrt{31}$

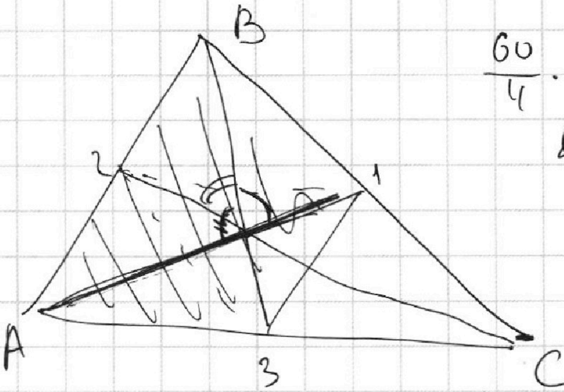
$15\sqrt{20\cdot 155} = 15\sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot \cancel{5} \cdot 31} = \overset{30}{15\cdot 2\cdot 5}\sqrt{31}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

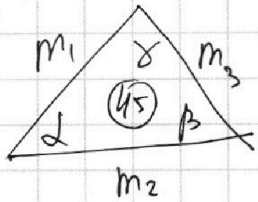
МФТИ

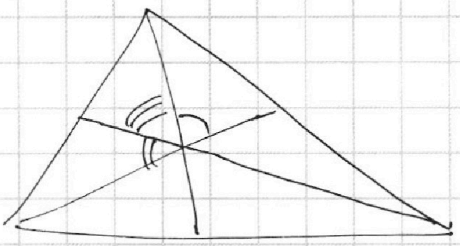


$\frac{60}{4}\cdot 3 = 45$

$m_1 = 15$

$$\begin{cases} 90 = m_1 m_2 \sin(\alpha) \\ 90 = m_2 m_3 \sin(\beta) \\ 90 = m_1 m_3 \sin(\gamma) \\ \alpha+\beta+\gamma=\pi \\ m_1 = 15 \end{cases}$$





$\sin(\gamma) = \sin(\alpha+\beta)$

$S = \frac{m_1 m_2 m_3}{4R}$

$S = 2R^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$

$2R = \frac{m_1}{\sin(\beta)}$ $\quad \sin(\varphi) = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{3}{5}$

$\frac{3}{5} = \frac{15^2+5^2-AB^2}{2\cdot 15\cdot 5} \Rightarrow 3 = \frac{125+25-AB^2}{2\cdot 5\cdot 3}$

$90 = 150 - AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{60}$

$-3 = \frac{125+25-AC^2}{2\cdot 5\cdot 3} \Rightarrow -90 = 150 - AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{240}$

$\angle BAC:\quad \cos = \frac{60+240-100}{2\cdot\sqrt{60\cdot 60\cdot 4}} = \frac{\cancel{200}\ 100}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$

$\sin = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{36-25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$m_1 = \sqrt{\frac{60}{2}+\frac{240}{2}-25} = \sqrt{30+120-25} = 15$

$m_2 = \sqrt{\frac{60}{2}+\frac{100}{2}+\frac{240}{4}} = \sqrt{30+50-60} = \sqrt{20}$

$m_3 = \sqrt{\frac{240}{2}+\frac{100}{2}-\frac{60}{4}} = \sqrt{120+50-15} = \sqrt{155}$

Ищем: $m_1 m_2 m_3$

$\begin{array}{r} 10 \\ \cdot 10 \\ \hline 150 \\ -72 \\ \hline 78 \end{array}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

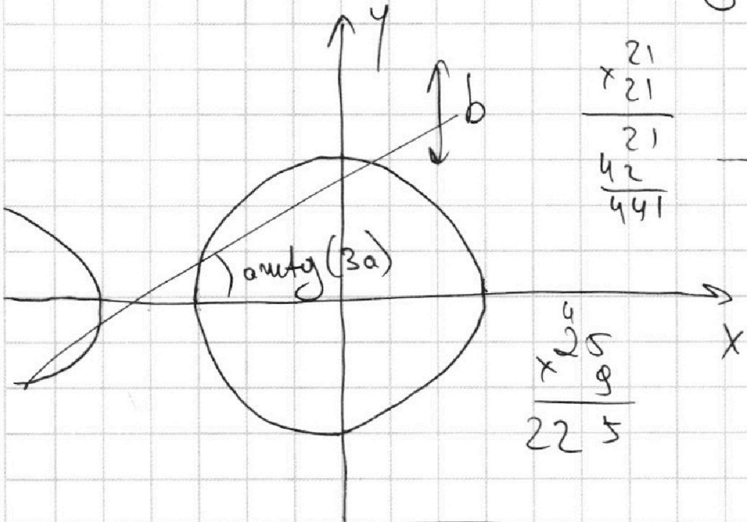
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

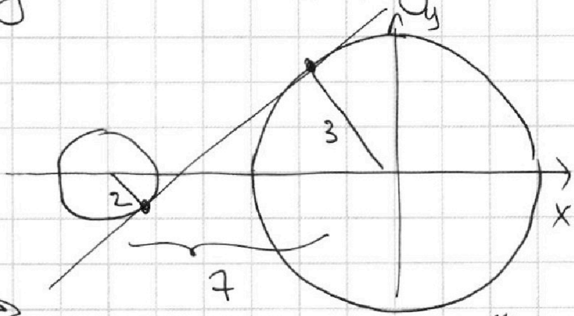
N4 $\begin{cases} x+3ay-7b=0 & \text{— прямая.} \\ (x^2+14x+y^2+45)\underbrace{(x^2+y^2-9)}_{\leftarrow \text{ окружность}}=0 \end{cases}$

$x^2+14x+y^2+45=0$ окружность.

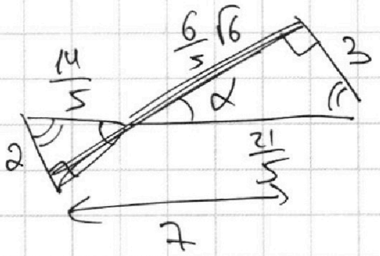
$(x+7)^2 = x^2+14x+49 \Rightarrow (x+7)^2+y^2-4=0 \Leftrightarrow (x+7)^2+y^2=2^2$



$\begin{array}{r} \times\, 21 \\ 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$



$\begin{array}{r} \times\, 25 \\ 9 \\ \hline 225 \end{array}$



$\begin{array}{r} 441 \\ -\,225 \\ \hline 216 \end{array}$ $\begin{array}{r} 216 \\ +\,225 \\ \hline 441 \end{array}$

$\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2-9} = \sqrt{\frac{441-225}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt6$

$3a_0 = \frac{3}{\frac{6}{5}\sqrt6} = \frac{15}{6\sqrt6} = \frac{15\sqrt6}{36} \Rightarrow a_0 = \frac{5\sqrt6}{36}$

$a \in \left(-\frac{5\sqrt6}{36}; \frac{5\sqrt6}{36}\right)$ — отв.

N5 $\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}(7) = \log_{36x^2}(343) - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\log_y(7) = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$

$t = 6x$

$t > 0$
$t \neq 1$

$\log_7^4 t - 2\log_t 7 = \log_{t^2}(7^3) - 4$

$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3}{2}\log_t(7) - 4$

$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3/2}{\log_7(t)} + 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

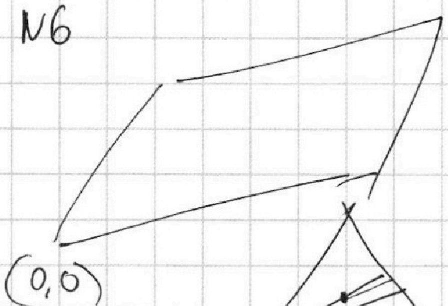
$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3/2}{\log_7(t)} + 4 \qquad k = \log_7(t)$

$k - \frac{2}{k} = \frac{3/2}{k} + 4 \longrightarrow$ получить k

$\log_7^4(y) + 6\log_y(7) = \frac{5}{2}\log_y(7) - 4$

$\log_7^4(y) + \frac{6}{\log_7(y)} = \frac{5}{2}\,\frac{1}{\log_7(y)} - 4 \longrightarrow$ получить $\log_7 y$

N6

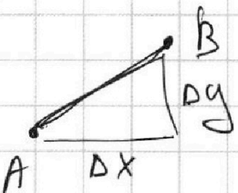


$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$

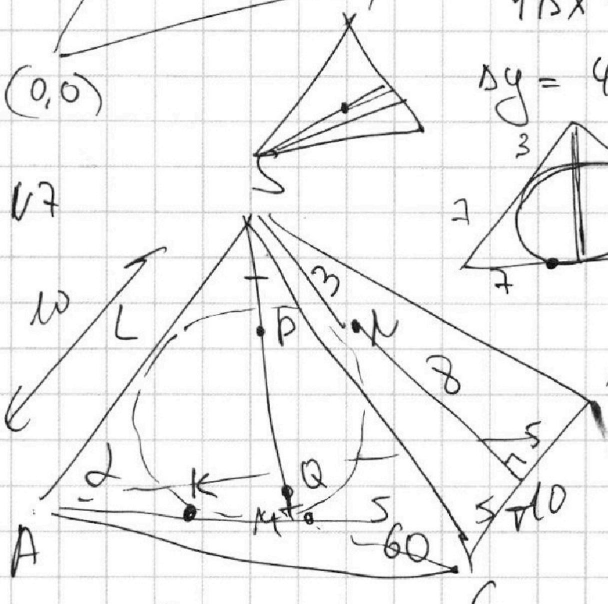
$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

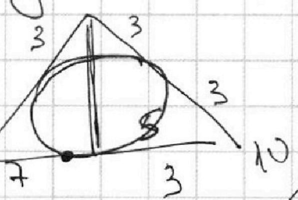
$4\Delta x + \Delta y = 40$

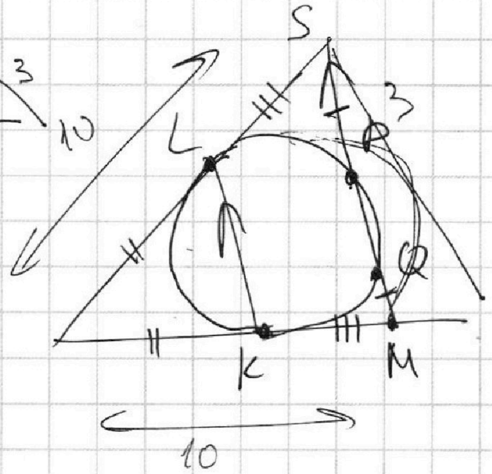
$\Delta y = 40 - 4\Delta x$

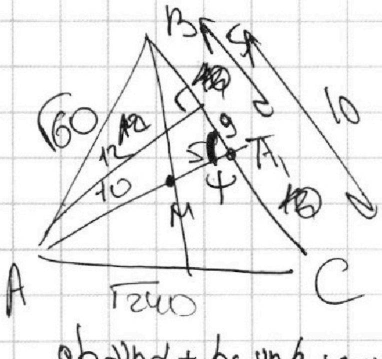


N7

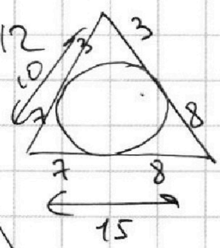


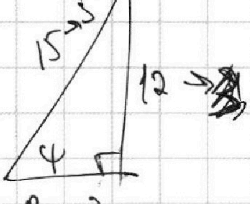


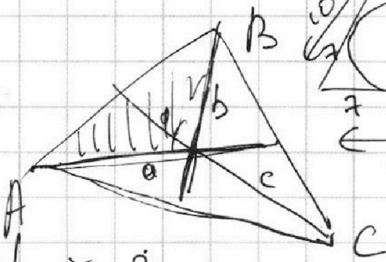




$60 = \frac{1}{2}h \cdot 10 \Rightarrow h = 12$







$S = \frac{ab\sin\alpha + bc\sin\beta + ac\sin\gamma}{2} = 60$

$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

Угол $\arccos\left(\frac{5}{11}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1 $ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14}$, $bc \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $ac \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 \Rightarrow abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} =$

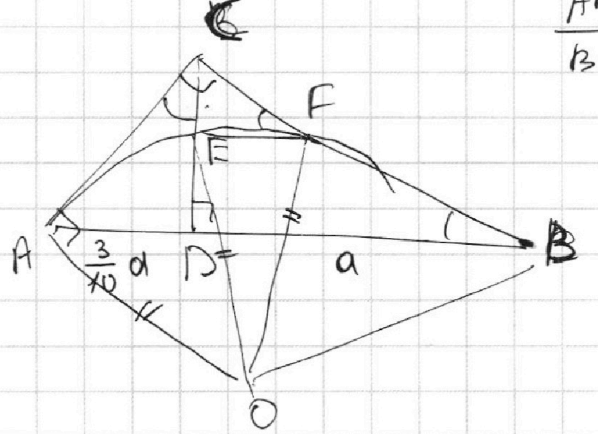
$= \sqrt{2^{34} 3^{43} 5^{75}} \Rightarrow 2^{17} 3^{22} 5^{38}$ — ответ.

$a = 1$, $b = 2^7 3^{11} 5^{14}$ $c = 2^6 3^4 5^4$

$+\begin{array}{r}26\\17\\\hline 43\end{array}$ $+\begin{array}{r}14\\18\\\hline 32\end{array}$ $+\begin{array}{r}32\\43\\\hline 75\end{array}$ $-\begin{array}{r}43\\17\\\hline 26\end{array}$ $\begin{array}{r|l}76 & 2\\ -6 & 38\\ \hline 16 & \\ 10 & \end{array}$

N2

$\frac{AB}{BD} = 1,3$

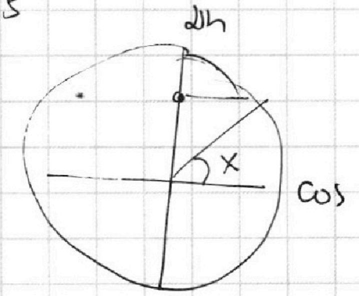


$CD = \sqrt{\frac{3}{10} a \cdot a} = a\sqrt{\frac{3}{10}}$

$+\begin{array}{r}43\\14\\\hline 57\end{array}$ $+\begin{array}{r}57\\18\\\hline 75\end{array}$

$a = 2^{20} \cdot 3^{28} 5$

N3



$5\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\hookrightarrow \in [-5; 5]$

$\arccos(\sin(x)) + \underbrace{\arcsin(\sin(x))}_{x + 2\pi n} = \frac{\pi}{2}$

$5\arccos(\sin(x)) = 5\left(\frac{\pi}{2} \underbrace{- x - 2\pi n}_{-x'}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x'\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x' = \frac{3\pi}{2} + x$

$x + 5x' = \pi$

Нужно:

$\frac{3\pi}{2} + x \leq 5$

$x \leq 5 - \frac{3\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2} + x \geq -5$

$x \geq -5 - \frac{3\pi}{2}$

Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $x' = x \Rightarrow 6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Если $x < -\frac{\pi}{2}$, то $x' > x \Rightarrow \overset{\pi}{\overset{\shortparallel}{x + 5x'}} > 6x \Rightarrow 6x < \pi \Rightarrow x < \frac{\pi}{6}$

Если $x > \frac{\pi}{2}$, то $x' < x \Rightarrow x + 5x' = \pi < 6x \Rightarrow$

$5\frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{6}$ — ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

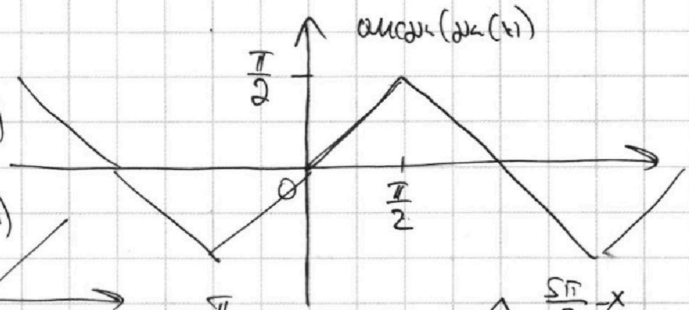
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

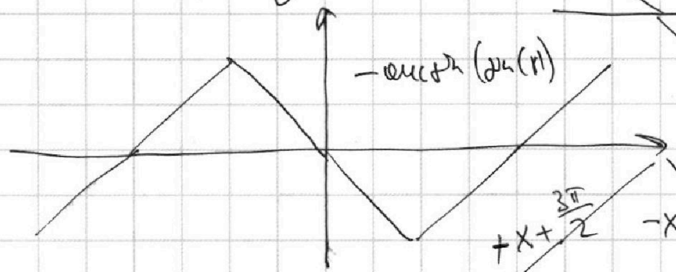
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

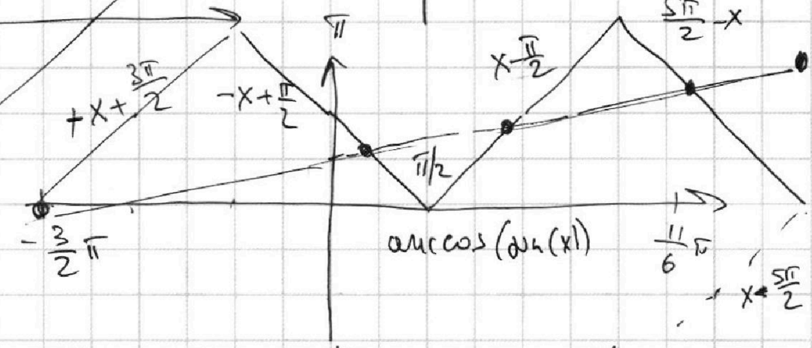
МФТИ

$\arccos(\sin(x)) + \arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{2}$

$\arccos(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))$







$\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow x = \pi$

$\frac{5\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} = \frac{22}{10}\pi = \frac{11}{5}\pi$

$x = \frac{11}{\cancel{5}}\pi \cdot \frac{\cancel{5}}{6} = \frac{11}{6}\pi$

$-x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi - 3\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$x = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\pi}{6}$

$x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi + 25\pi}{10} = \frac{14}{5}\pi$

$x = \frac{14}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{2}\pi$ — посторонний корень

$+x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \cancel{\frac{6}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi - 15\pi}{10} = -\frac{6}{5}\pi}$

$\frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{6}{5}\pi \Rightarrow x = -\frac{6}{\cancel{5}}\pi \cdot \frac{\cancel{5}}{4} = -\frac{3}{2}\pi$

Всего 5 корней.