



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \quad ab: 2^7 3^{11} 5^{14}, \quad bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}, \quad ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

Умножим эти числа:  $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

Тогда  $a^2 b^2 c^2 = 2^{34} 3^{43} 5^{75} \cdot k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ .

$$abc = \sqrt{2^{34} 3^{43} 5^{75} k} = 2^{17} 3^{21} 5^{37} \sqrt{15k}$$

Наименьшее возможное значение  $\sqrt{15k}$  достигается при  $k=15$ , так как  $abc \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot 15 = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

$ac: 5^{43}$ , поэтому окончательный ответ  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

Наименьшее возможное окончательное значение  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N3 \quad 5 \arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

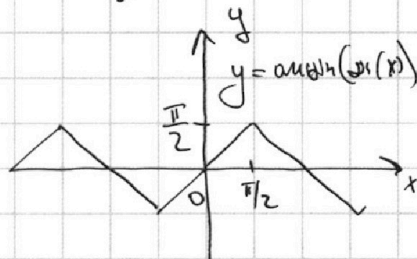
Поскольку  $\arccos(\alpha) + \arcsin(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ , где  $\alpha \in [-1; 1]$ , то,

проставив  $\alpha = \sin(x)$ , получим, что

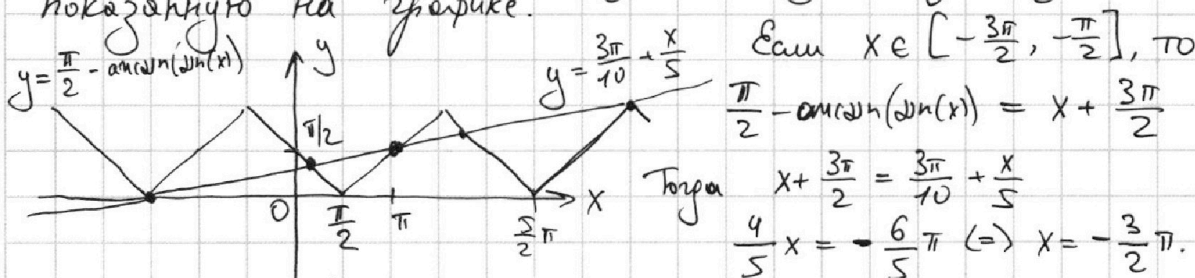
$$\arccos(\sin(x)) + \arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)).$$

$$\text{Итого: } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

Построим график функции  $y = \arcsin(\sin(x))$   
 $y = x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , примем  $y \in [-\pi/2; \pi/2]$ .



Тогда получим следующую кусочно-линейную периодическую функцию,  
показанную на графике.



$$\text{Если } x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = x + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Тогда } x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \\ \frac{4}{5}x = -\frac{6}{5}\pi \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\pi.$$

Заметим, что при  $x < -\frac{3}{2}\pi$  корней нет, поскольку тогда  $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} < 0$ .

$$\text{Если } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Если } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = -\frac{\pi}{2} + x = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \pi$$

$$\text{Если } x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = -x + \frac{5}{2}\pi = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{Если } x \in [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = x - \frac{5}{2}\pi = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{7}{2}\pi$$

Заметим, что все  $x > \frac{7}{2}\pi$  не подходят, поскольку тогда  $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} > \pi$ , что не имеет пересечения с  $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))$ .

Таким образом, есть всего 5 корней.

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11}{6}\pi; \frac{7}{2}\pi \right\}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

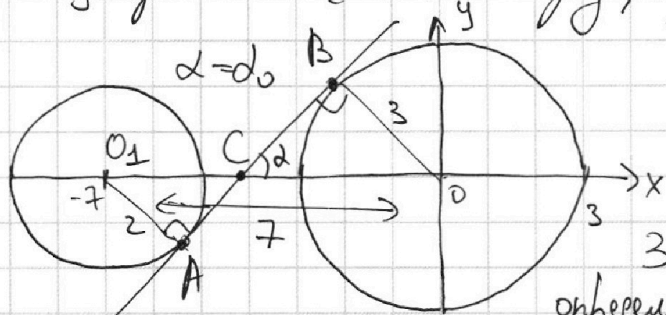
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и) 
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$
 Решу систему уравнений графически:

$x + 3ay - 7b = 0$  - уравнение прямой (в координатах  $x, y$ ).

$x^2 + y^2 - 9 = 0$  - уравнение окружности с центром в  $(0; 0)$  и радиусом 3.

$x^2 + 14x + y^2 + 45 = (x+7)^2 + y^2 - 4 = 0$  - уравнение окружности с центром в  $(-7; 0)$  и радиусом 2.



Таким образом, 2-е уравнение в исходной системе - это две окружности, изображенные на рисунке.

Заметим, что параметр  $a$  определяет наклон прямой  $x + 3ay - 3b = 0$ ,  $b$  - ее сдвигение.

$$y = \frac{3b - x}{3a} = \frac{b}{a} - \frac{x}{3a}$$

Заметим, что ответом на задачу являются  $d \in (-d_0; d_0)$ , где  $d_0$  - крайний случай, когда прямая является общей касательной 2-х окружностей.

Рассмотрим этот случай.  $\alpha$  - угол, наклон прямой ( $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ).

$\alpha$  максимален, если  $x + 3ay - 7b = 0$  - общее внешнее

касательная (при внешнем касательном угле будет меньше).

Пусть  $O_1$  - центр окружности меньшего радиуса,  $A$  и  $B$  - точки касания прямой и окружностей.

$C$  - точка пересечения  $AB$  с осью абсцисс.

По свойству касательных  $O_1A \perp AB$ ,  $AB \perp BO$ . Тогда  $\triangle CAO \sim \triangle CBO$ ,

поскольку  $\angle O_1CA = \angle BCO$ .

Тогда  $\frac{O_1A}{BO} = \frac{2}{3} = \frac{O_1C}{CO}$ . Поскольку  $O_1C + CO = 7$ , то  $O_1C = \frac{14}{5}$ ,  $CO = \frac{21}{5}$

По теореме Пифагора в  $\triangle BOC$  получаем  $CB = \sqrt{CO^2 - BO^2} = \frac{6}{5}\sqrt{6}$

$\tan(\alpha_0) = \frac{BO}{BC} = \frac{3 \cdot 5}{6\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$  Итого:  $\alpha = -\frac{1}{3a} \in (-\frac{5}{216}; \frac{5}{216})$ ,  $a \neq 0$ .

Ответ:  $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2}(343) - 4 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_y(7) = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

Пусть  $a = 6x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$(\log_7(a))^4 - 2 \log_a(7) = \log_{a^2}(7^3) - 4$$

$$(\log_7(a))^4 - \frac{2}{\log_7(a)} = \frac{3}{2} \log_a(7) - 4 \Leftrightarrow (\log_7(a))^4 - \frac{2}{\log_7(a)} = \frac{3}{2 \log_7(a)} - 4$$

Пусть  $b = \log_7(a)$ .

$$b^4 - \frac{2}{b} = \frac{3}{2b} - 4 \Leftrightarrow 2b^5 + 8b - 7 = 0$$

Пусть  $c = \log_7(y)$  Тогда  $c^4 + \frac{6}{c} = \frac{5}{2} \frac{1}{c} - 4$

$$\Leftrightarrow 2c^3 + 8c + 7 = 0$$

Заметим, что искоме  $xy = \frac{7^b \cdot 7^c}{6} = \frac{7^{b+c}}{6}$

✶,  $b, c$  - корни  $(2b^5 + 8b - 7)(2b^5 + 8b + 7) = 0$ . Получаем

$$4b^{10} + 64b^2 + 32b^6 - 49 = 0$$

По теореме Виета сумма корней  $b+c=0$

Тогда  $xy = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

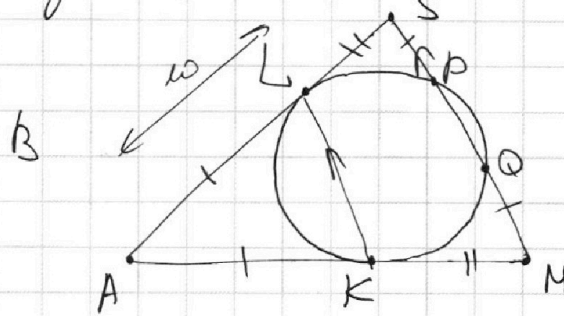
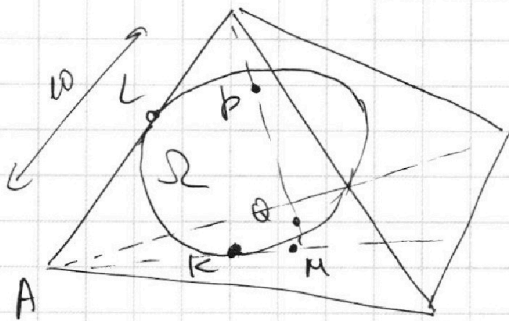
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 7 а) Рассмотрим **вращение** **плоскости**  $(SAM)$ .



Поскольку  $\Omega \cap (ABC) = \{K\}$ , то окружность  $\omega = \Omega \cap (SAM)$  ~~касается~~ касается  $AM$  в точке  $K$ .

По свойству касательной:  $MK^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ + PQ)$

$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP + PQ)$  (будем считать, что точки  $P, Q$

расположены так, как на рисунке). Поскольку  $SP = QM$ , то  $SL = MQ$ , верев  $PQ$  — общий.

По свойству касательной  $AK = AL$

Итого:  $\frac{AL}{LS} = \frac{AK}{KM} \Rightarrow \triangle ALK \sim \triangle ASM \Rightarrow LK \parallel SM$ .

По условию  $AS = 10 \Rightarrow AM = 10$ . Тогда радиус окружности, вписанной из точки  $A$ , равен  $15$ . Пусть  $AH \perp BC$ ,  $H \in (BC)$ .

Рассмотрим  $\triangle AHA_1$ :  $AH \cdot BC = 120$  (площадь  $\triangle ABC$ ),  $BC = 10 \Rightarrow AH = 12$ .

$AA_1 = 15$ . По теореме Пифагора  $HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9$ .

$\sin(\angle AA_1B) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{AH}{AA_1} \Rightarrow \cos(\angle AA_1B) = \sqrt{1 - (\sin(\angle AA_1B))^2} = \frac{3}{5}$

По теореме косинусов  $\triangle ABA_1$ : (не угадали облик, считаем) косинус положительный.

$$\frac{3}{5} = \frac{AA_1^2 + A_1B^2 - AB^2}{2 \cdot AA_1 \cdot A_1B} = \frac{15^2 + 5^2 - AB^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Rightarrow 150 - AB^2 = 90 \Leftrightarrow AB = \sqrt{60}$$

Аналогично по  $\triangle AA_1C$

$$-\frac{3}{5} = \frac{15^2 + 5^2 - AC^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Leftrightarrow 150 - AC^2 = -90 \Leftrightarrow AC = \sqrt{240}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По формуле Гини меридиан ( $\triangle ABC$ )

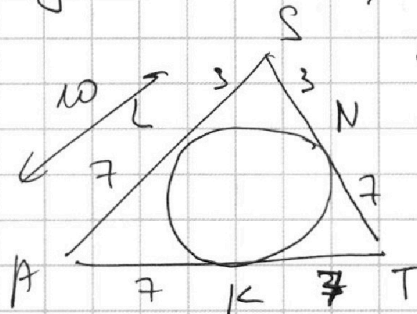
$$BB_{\perp} = \sqrt{\frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{60}{2} + \frac{100}{2} - \frac{240}{4}} = \sqrt{20}$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{BC^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{100}{2} + \frac{240}{2} - \frac{60}{4}} = \sqrt{155}$$

$$\text{Искомая величина } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15\sqrt{20} \cdot 155 = 150\sqrt{31}$$

б) Определим величину угла:

Пусть  $ST \perp BC$ , где  $T \in (BC)$ , рассмотрим  $\triangle AST$ .



Поскольку  $SN = 3$ , то  $SL = 3$  (касательные)

Тогда  $AL = 7 = AK$ ,  $KT = 3$

$$MT = \frac{AA_1}{3} = 4 \Rightarrow AT = 14$$

Тогда  $\triangle AST$  равнобедренный  $\Rightarrow \angle STA = 60^\circ$ .

Это и есть величина искомых углов.

Ответ: а)  $150\sqrt{31}$   
б)  $60^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^7 3^{12} 5^{15}$$

$$bc = 2^{13} 3^{15} 5^{18} \quad ac = 2^{14} 3^{17} 5^{23}$$

$$34 - 14 = 20$$

$$a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + a_1 + c_1 = 2(a_1 + b_1 + c_1) = 34$$

$$a = 2^3 3^4 5$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 17$$

$$a_1 = 17 - (b_1 + c_1) = 17 - 14 = 3$$

$$a_2 = 21 - 17 = 4$$

$$a_3 = 37 -$$

$$\frac{441}{225} = \frac{316}{316}$$

$$\sqrt{\left(\frac{2x^2}{5}\right) - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

$$\left| \frac{1}{3a} \right| < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad | \cdot 6\sqrt{6}a$$

$$2\sqrt{6}a < 5 \cdot \sqrt{6}a$$

$$2\sqrt{6} < 15a \quad a \geq \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$\frac{1.5}{2\sqrt{6}} \quad b^4 - \frac{2}{b} = \frac{3}{2b} - 4 \quad | \cdot 2b$$

$$2b^5 - 4 = 3 - 8b$$

$$b = \log_7(6x) \quad 7 \log_7 b = 6x = 7$$

$$2b^5 + 8b - 7 = 0$$

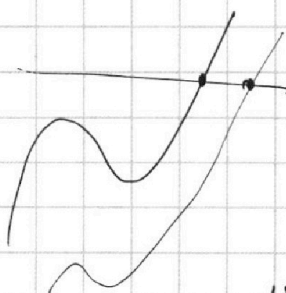
$$\log_7^4(y) + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

$$y = 7^c$$

$$c^4 + \frac{6}{c} = \frac{5}{2c} - 4 \quad | \cdot 2c \Leftrightarrow 2c^5 + 12 = 5 - 8c$$

$$2c^5 + 8c + 7 = 0$$

$$xy = \frac{7^b \cdot 7^c}{6} = \frac{7^{bc}}{6}$$



$$4p^{10} + 64p^2 + 32c^6 - 4q = 0$$

$$4q^5 + 64q + 32p^3 - 4q = 0 \quad 150\sqrt{31}$$

$$15\sqrt{20.155} = 15\sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 21} = 15 \cdot 2 \cdot 5 \sqrt{21}$$

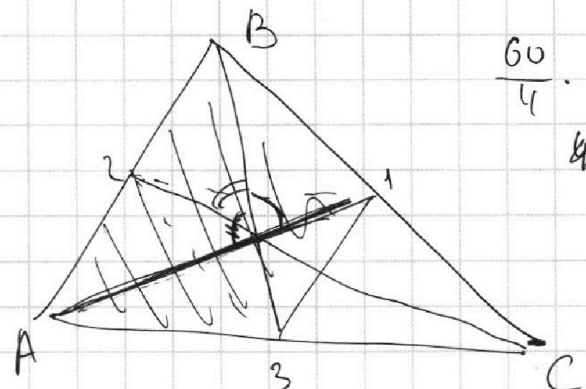
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{60}{4} \cdot 3 = 45$$

$$m_1 = 15$$

$$90 = m_1 m_2 \sin(\alpha)$$

$$90 = m_2 m_3 \sin(\beta)$$

$$90 = m_1 m_3 \sin(\gamma)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$m_1 = 15$$

$$\sin(\gamma) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$S = \frac{m_1 m_2 m_3}{4R}$$

$$S = 2R^2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$$

$$2R = \frac{m_1}{\sin(\beta)} \quad \sin(\varphi) = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{15^2 + 5^2 - AB^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Rightarrow 3 = \frac{125 + 25 - AB^2}{2 \cdot 5 \cdot 3}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \cdot 10 \\ \hline 150 \\ - 72 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$90 = 150 - AB^2 \Rightarrow AB^2 = \sqrt{60}$$

$$-\frac{3}{5} = \frac{125 + 25 - AC^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} \Rightarrow -90 = 150 - AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{240}$$

$$\angle BAC: \cos = \frac{60 + 240 - 100}{2 \cdot \sqrt{60} \cdot 60 \cdot 4} = \frac{200}{2 \cdot 2 \cdot 60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$$

$$\sin = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{36 - 25}{36}} = \frac{5}{6}$$

Wow:  $m_1 m_2 m_3$

$$m_2 = \sqrt{\frac{60}{2} + \frac{240}{2} - 25} = \sqrt{30 + 120 - 25} = 15$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{60}{2} + \frac{100}{2} + \frac{240}{4}} = \sqrt{30 + 50 + 60} = \sqrt{140} \sqrt{20}$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{240}{2} + \frac{100}{2} - \frac{60}{4}} = \sqrt{120 + 50 - 15} = \sqrt{155}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

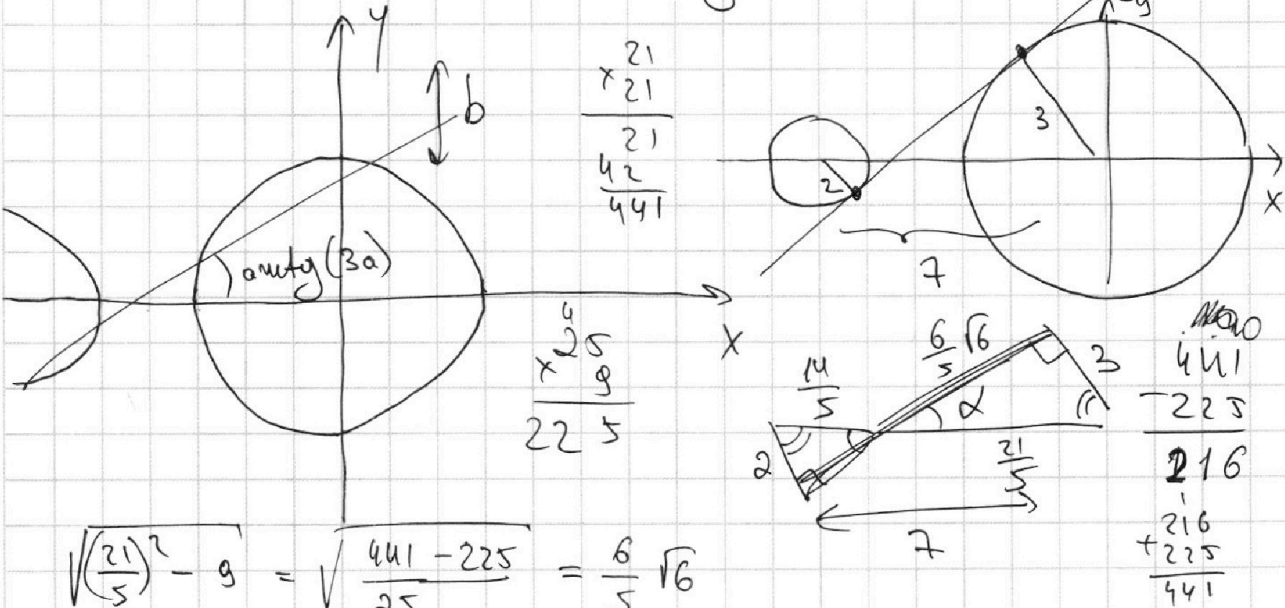
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

уч  $\left. \begin{aligned} x+3ay-7b &= 0 && - \text{прямая} \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9) &= 0 && \leftarrow \text{окружности} \end{aligned} \right\}$

$$x^2+14x+y^2+45=0$$

$$(x+7)^2 = x^2+14x+49 \Rightarrow (x+7)^2+y^2-4=0 \Leftrightarrow (x+7)^2+y^2=2^2$$



$$\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{6}$$

$$3a_0 = \frac{3}{\frac{6}{5}\sqrt{6}} = \frac{15}{6\sqrt{6}} = \frac{15\sqrt{6}}{36} \Rightarrow a_0 = \frac{5\sqrt{6}}{36}$$

$$a \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{36}; \frac{5\sqrt{6}}{36}\right) - \text{оба.}$$

$$NS) \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2}(343) - 4$$

$$t = 6x$$

$$\log_7^4(y) + 6 \log_y(7) = \log_{y^2}(7^3) - 4$$

$$t > 0$$

$$t \neq 1$$

$$\log_7^4 t - 2 \log_t 7 = \log_{t^2}(7^3) - 4$$

$$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3}{2} \log_7(t) - 4$$

$$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3/2}{\log_7(t)} + 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3/2}{\log_7(4)} + 4 \quad k_2 = \log_7(t)$$

$$k_2 - \frac{2}{k_2} = \frac{3/2}{k_2} + 4 \rightarrow \text{получить } k$$

$$\log_7^4(y) + 6\log_7(y) = \frac{5}{2}\log_7(7) - 4$$

$$\log_7^4(y) + \frac{6}{\log_7(y)} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_7(y)} - 4 \rightarrow \text{получить } \log_7 y$$

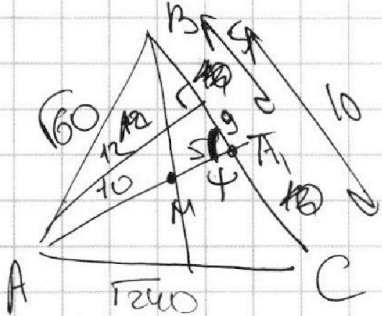
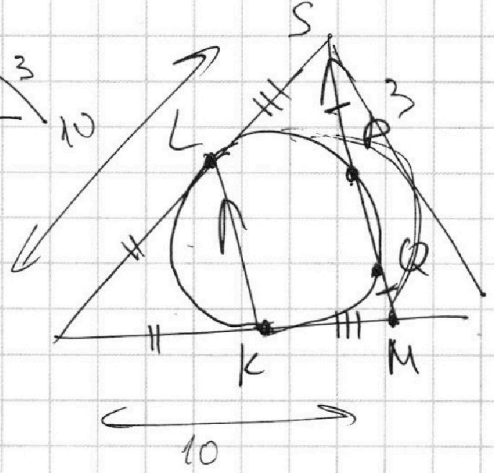
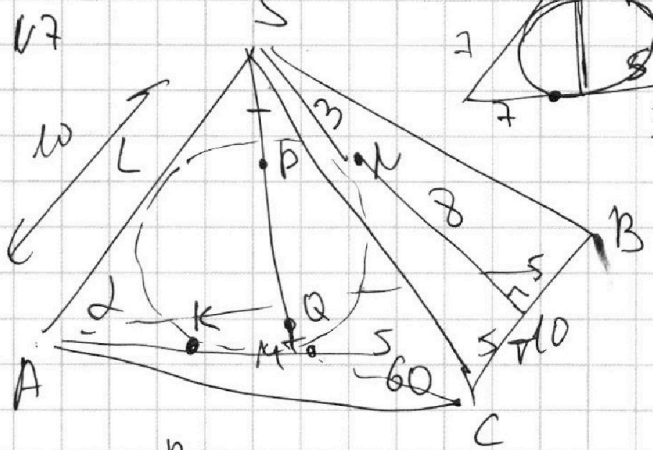
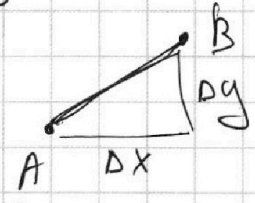
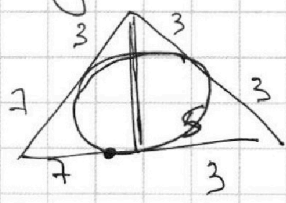
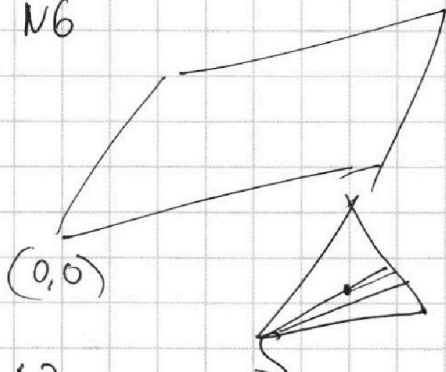
N6

$$4x_2^2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

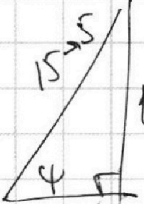
$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$4\Delta x + \Delta y = 40$$

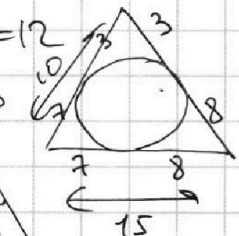
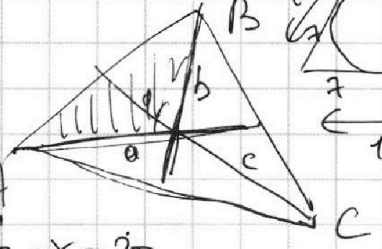
$$\Delta y = 40 - 4\Delta x$$



$$60 = \frac{1}{2}h \cdot 10 \Rightarrow h = 12$$



$$12 \rightarrow 4$$



$$S = \frac{ab \sin \alpha + bc \sin \beta + ca \sin \gamma}{2} = 60$$

$$2\sqrt{2} + 8 = 2\pi$$

$$\text{Угол } \arccos\left(\frac{5}{11}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

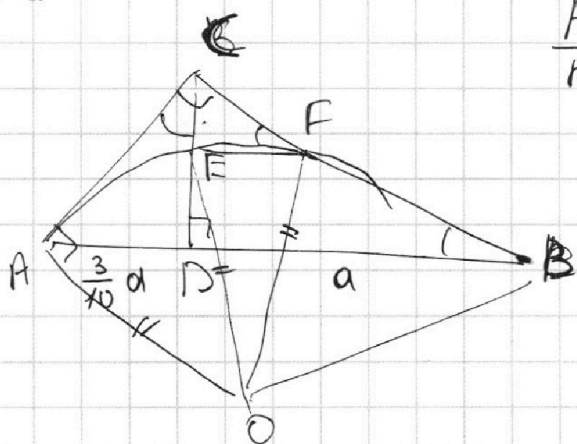
N1  $ab = 2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc = 2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac = 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 \Rightarrow abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} =$

$= \sqrt{2^{34} 3^{43} 5^{75}} = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$  - ответ.  
 $a=1$ ,  $b=2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $c=2^6 3^4 5^4$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 26 \\ \hline 17 \\ \hline 43 \\ + 14 \\ \hline 57 \\ + 18 \\ \hline 75 \end{array}$$

N2



$\frac{AB}{BC} = 1,3$

$cb = \sqrt{\frac{3}{10} a \cdot a} = a \sqrt{\frac{3}{10}}$

$a = 2^{20} \cdot 3^{28} \cdot 5$

N3

$\text{arccos}(\sin(x)) = \frac{3\pi}{2} + x$   
 $x \in [-\pi; \pi]$

$\text{arccos}(\sin(x)) + \text{arcsin}(\sin(x)) = \frac{\pi}{2}$   
 $x + 2\pi k$

$5 \text{arccos}(\sin(x)) = \left(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x'\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x' = \frac{3\pi}{2} + x$

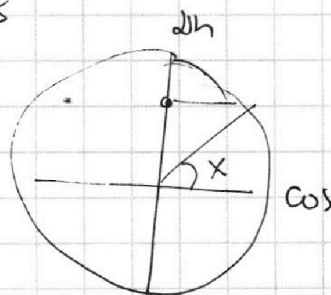
$x + 5x' = \pi$

Если  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , то  $x' = x \Rightarrow 6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Если  $x < -\frac{\pi}{2}$ , то  $x' > x \Rightarrow x + 5x' > 6x \Rightarrow 6x > \pi \Rightarrow x > \frac{\pi}{6}$

Если  $x > \frac{\pi}{2}$ , то  $x' < x \Rightarrow x + 5x' = \pi < 6x \Rightarrow$

$5\frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$        $x = \frac{\pi}{6}$  - ответ.



Пусть:

$\frac{3\pi}{2} + x \leq 5$

$x \leq 5 - \frac{3\pi}{2}$

и

$\frac{3\pi}{2} + x \geq -5$

$x \geq -5 - \frac{3\pi}{2}$

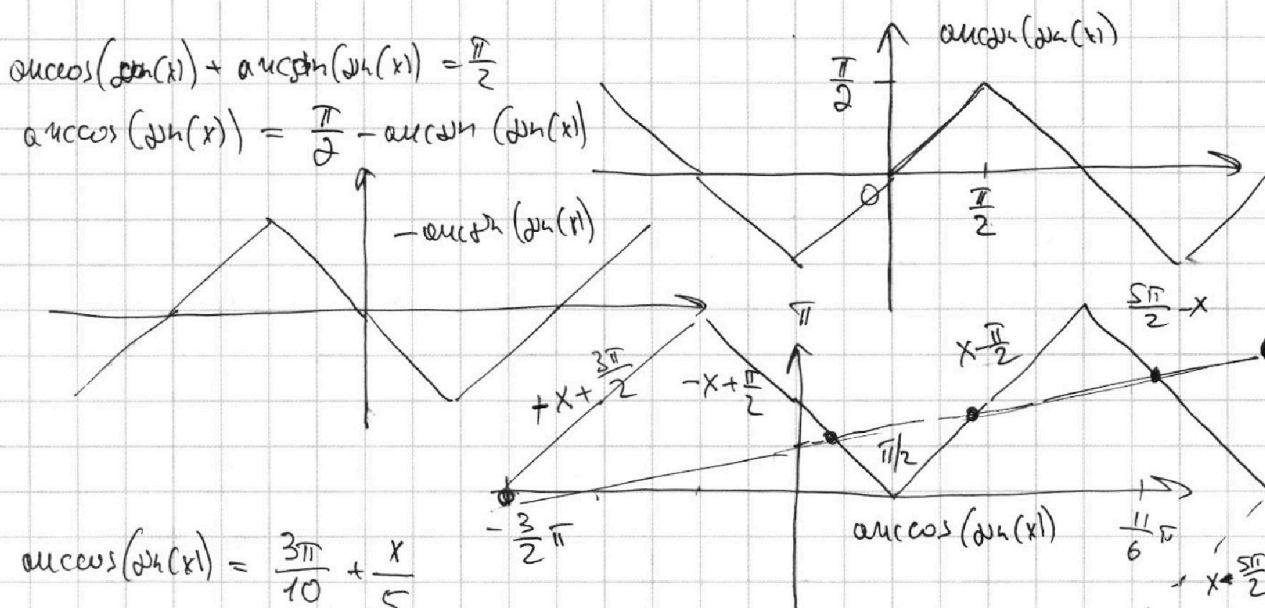
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow x = \pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} = \frac{22\pi}{10} = \frac{11\pi}{5}$$

$$x = \frac{11\pi}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$-x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi - 3\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$x + \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi + 25\pi}{10} = \frac{14\pi}{5}$$

$$x = \frac{14\pi}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7\pi}{2} \quad \text{— некорректное решение}$$

$$+x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi - 15\pi}{10} = -\frac{6\pi}{5}$$

$$\frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{6\pi}{5} \Rightarrow x = -\frac{6\pi}{5} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

всего 5 решений.