



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Рассмотрим степени вхождения простых множителей 2, 3, 5 в числа a, b, c .

Об a_2, b_2, c_2 - степени вхождения 2 в a, b, c соответственно.

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 7 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \end{cases} \Leftrightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34 \Leftrightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 17$$
$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 14 \end{cases}$$

Значит abc делится хотя бы на 2^{17}

a_3, b_3, c_3 - степени вхождения 3 в a, b, c соотв.

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \\ a_3 + c_3 \geq 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \Leftrightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 21,5 \end{cases}$$

т.к. a_3, b_3, c_3 - целые, то

на самом деле $a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$.

Значит abc делится хотя бы на 3^{22}

a_5, b_5, c_5 - степени вхождения 5 в a, b, c соотв.

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 43 \end{cases} \Leftrightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \Leftrightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 37,5$$

Так как a_5, b_5, c_5 - целые положительные
то на самом деле $a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$, (т.к. $a_5 + c_5 \geq 43, b_5 \geq 0$)

Значит abc делится хотя бы на 5^{43} .

Значит abc делится хотя бы на $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пример~~ Это и будет min значением abc.

Например: $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{21}$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{11}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}$$

Видно, что все необходимые условия выполняются, а $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

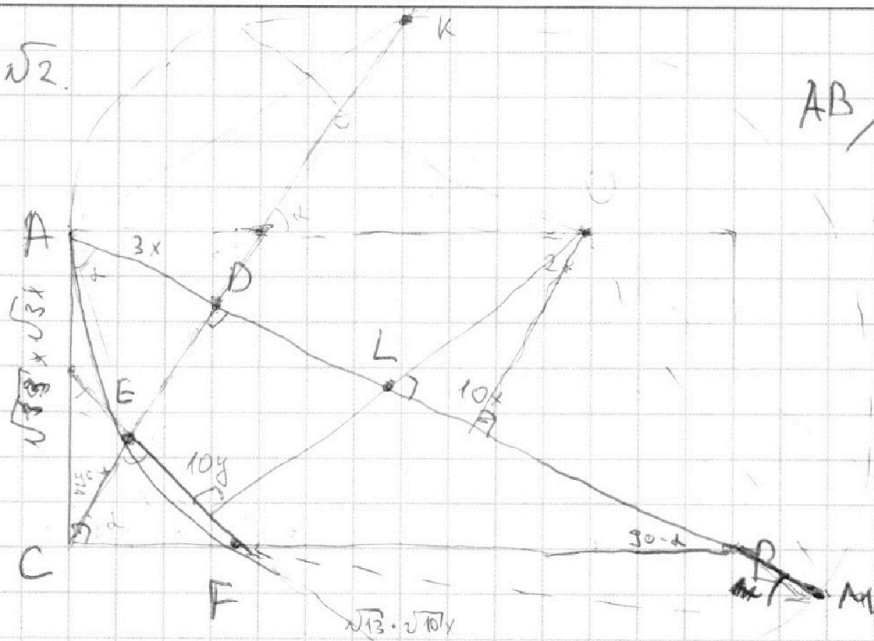
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.



$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$\frac{AD+BD}{BD} = 1,3$$

$$\frac{AD}{BD} = 0,3$$

Пусть $AD=3x$
Тогда $DB=10x$

Т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ$

Пусть $\angle ECF = \alpha$, тогда $\angle ACD = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DAC = \alpha$.

Тогда $\triangle CEF \sim \triangle ACD$ по 2 углам.

$\triangle CDB \sim \triangle CEF$ также по 2 уг.

$\triangle ACD \sim \triangle CDB$ по 2 уг.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow CD^2 = 30x^2$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

т.н. Пифагора: $AC^2 = 9x^2 + 30x^2 = 39x^2$

$$CB^2 = 169x^2 - 39x^2 = 130x^2$$

Высота из центра O пройдет через середину AM
 $OL = 5y = \frac{AM}{2} - 3x$

Ответ: $13/3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\sin \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos x \in [0; \pi]$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\sin \arccos(\cos(\frac{3\pi}{2} + x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{3\pi}{2} + x \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{3\pi}{2} + x + 2\pi k) = \frac{3\pi}{2} + x \\ \sin(2\pi k - \frac{3\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{3\pi}{2} + x + 2\pi k) = \frac{3\pi}{2} + x \\ \sin(2\pi k - \frac{3\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} 4x + 6\pi - 10\pi k = 0 \\ 10\pi k = 6x + 9\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

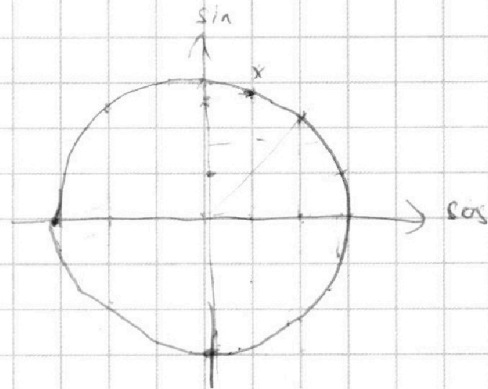
$$\begin{cases} 4x + 6\pi - 10\pi k = 0 \\ 10\pi k = 6x + 9\pi \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi k \\ \frac{5}{3}\pi k - \frac{3}{2}\pi = x \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Получим $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

т.е. $\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\}$

Ответ: $\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы у системы было **4** решения, нужно, чтобы прямая пересекала каждую из 2^x окружностей.

Это будет невозможно, если прямая, заданная ~~ее~~ ^{ее} уравнением не между внутренними обих касательных, т.к. $\sqrt{6}$ не больше не угол между $\sqrt{6}$ ~~в~~ ~~не~~ на этой прямой, а лишь на ее местоположении.

Найдем уравнения этих касательных:

Точки, где касательная пересекает абсциссу - M .

из подобия треугольников ~~следует~~ ^{следует} коэффициент $3/2$

$$Mx + \frac{2}{3}Mx = 7 \Rightarrow Mx = 2\frac{1}{5} \quad (\text{координата } t, M \text{ по } x)$$

K - t касания прямой и большой окруж.

$$MK = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 6}{5^2}} = \frac{6}{5} \sqrt{6}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{MK} = \frac{3}{\frac{6}{5} \sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

Если $3\alpha \geq \frac{5\sqrt{6}}{12}$, то условие не выполняется

Аналогично, если $3\alpha \leq -\frac{5\sqrt{6}}{12}$, то тоже

$$\text{Значит } \alpha \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{36}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$$

$$\text{Ответ: } \alpha \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{36}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

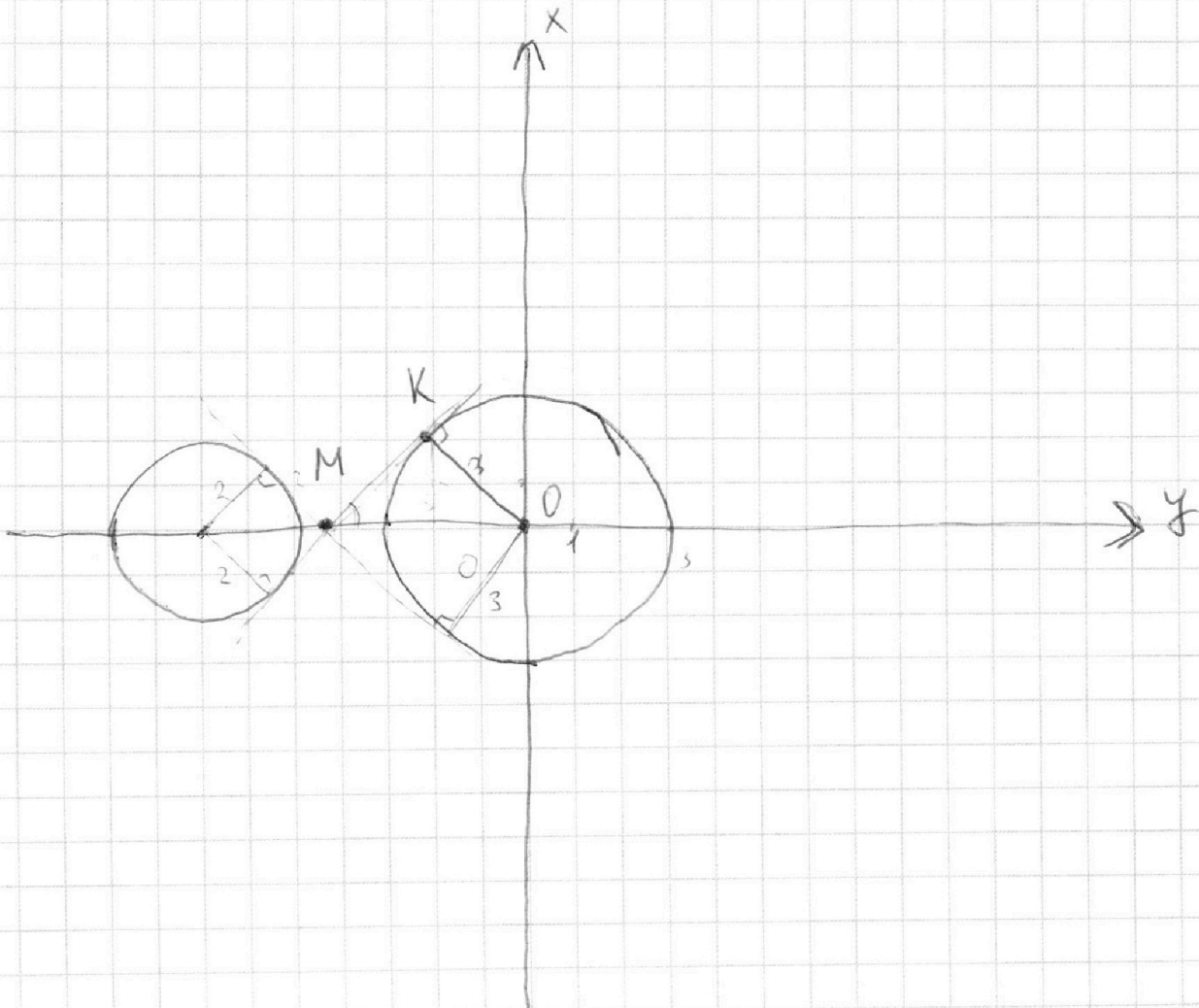
Задача №4

$$\begin{cases} x + 3ay = 7b = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a}$$

$$((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 2343 - 4$$
$$\log_7^4 6x + 2 \log_7 6x = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$
$$\log_7^4 6x + \frac{7}{2} \log_7 6x + 4 = 0$$

ODS
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$
 $x \neq 1/6$
 $y \neq 1$

Задача №5

$$\log_7^4 6x - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 2343 - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2 \log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4 6x + 4 = \frac{7}{2 \log_7 6x}$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_{y^2} 7^5 - 4$$

$$\log_7^4 y + 4 = \left(\frac{5}{2} - 6 \right) \log_{y^2} \frac{1}{\log_7 y}$$

" $-7/2$

$$\log_7^4 6x - \log_7^4 y = \frac{7}{2} \left(\frac{\log_7 y + \log_7 6x}{\log_7 y \cdot \log_7 6x} \right)$$

$\log_7 y = a$
 $\log_7 6x = b$

↙

$$\log_7 y \cdot 6x = 0$$
$$6xy = 1$$
$$xy = 1/6$$

↘

$$(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = \frac{7}{2ab}$$

Ответ: $1/6$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5$$

по ОДЗ $y \geq 0, y \neq 1, x > 0, x \neq 1/6$

$$\log_7^4 6x + 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4 y - 6 \log_7 y = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$

$$\log_7^4 6x = \frac{7}{2} \log_7 6x - 4$$

$$\log_7^4 y = \frac{7}{2} \log_7 y - 4$$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x = \frac{7}{2} \log_7 6xy$$

$$\log_7 6xy \left(\log_7^2 \frac{y}{6x} + (\log_7^2 y + \log_7^2 6x) \right) = \frac{7}{2} \log_7 6xy$$

\checkmark
 $6xy = 1 \Rightarrow xy = 1/6$ в ответ.

~~$\log_7^4 y / \log_7^4 6x$~~

$$(b^2 a - a^2 b)(b^2 + a^2)$$

$$b^4 a - a^2 b^3 + b^2 a^3 - a^4 b = \frac{7}{2}$$

$$a^5 -$$

$$x^5 + 4x - 7/2 = 0$$

$$y^5 + 4y + 7/2 = 0$$

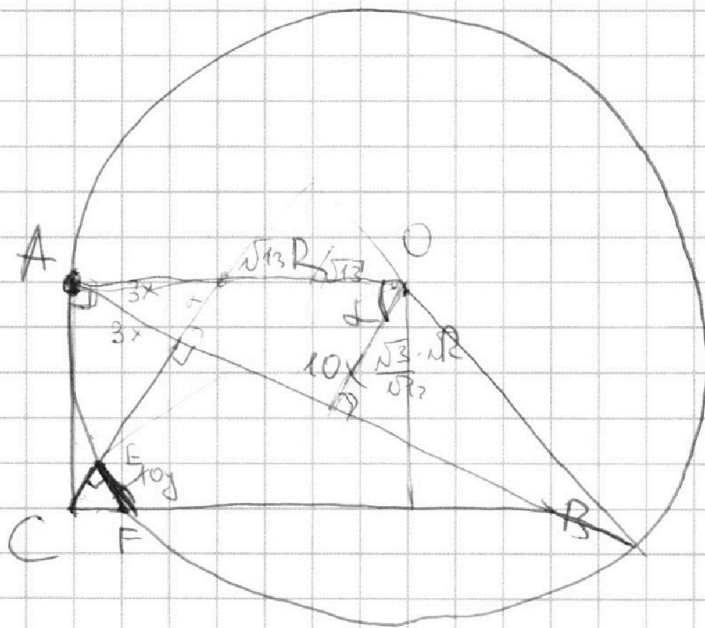
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

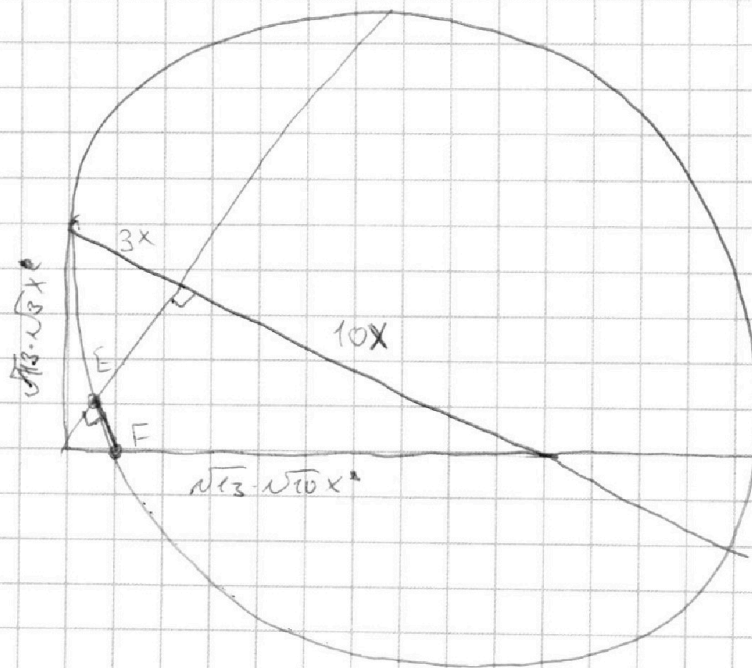
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{10} \quad \sqrt{13} \quad \sqrt{3}$$





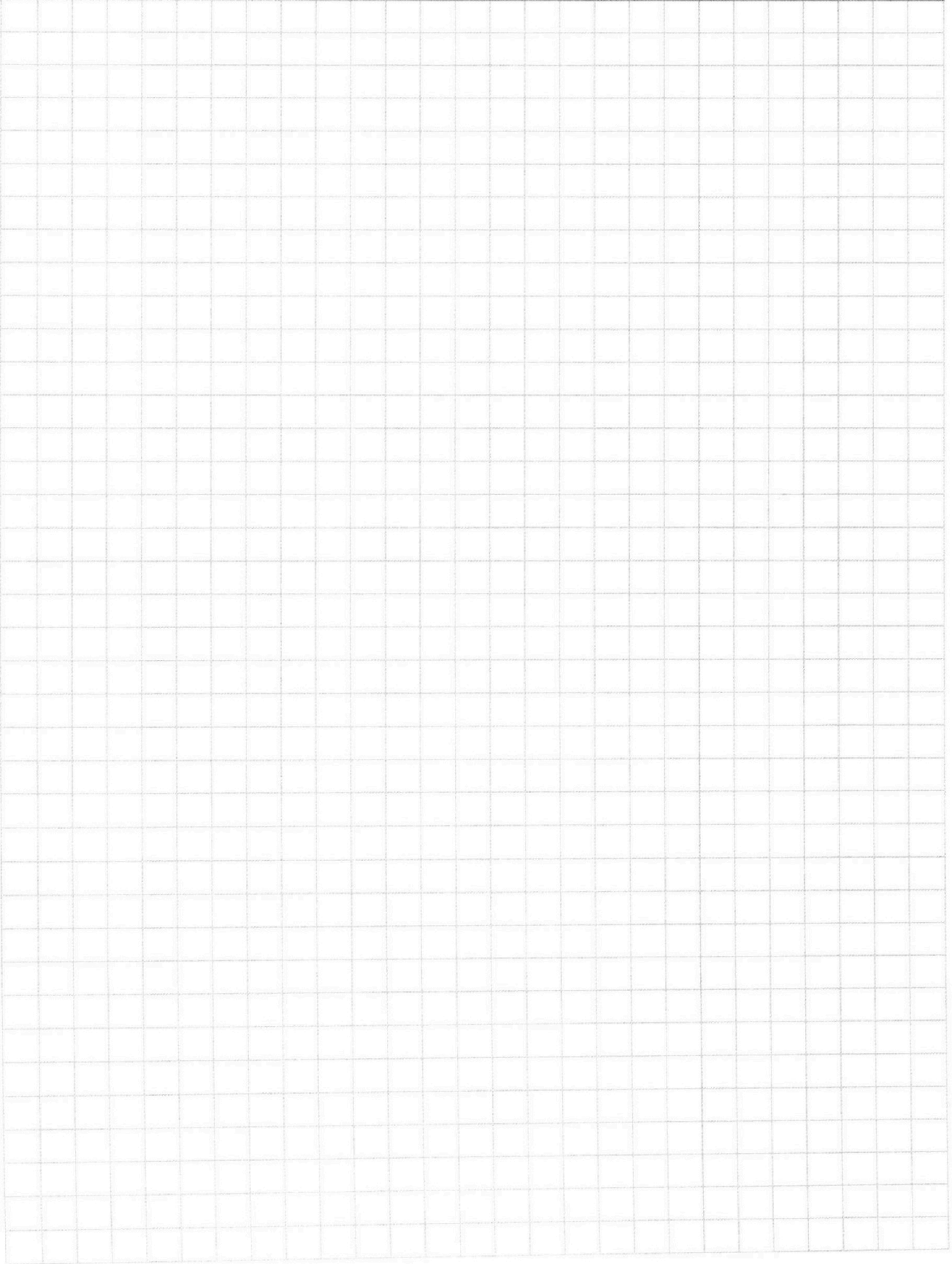
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

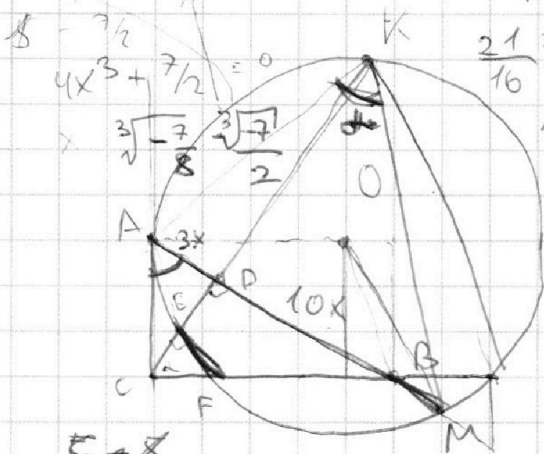
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^4 + 7/2 x + 4 = 0$$



$$-\frac{7 \cdot \sqrt[3]{-7}}{4} + \frac{7 \sqrt[3]{-7}}{16}$$

$$8m = 7$$

$$\frac{21 \sqrt[3]{-7}}{16} AC^2 = CD \cdot CK$$

$$m = 7/5$$

$$AD \cdot DM = ED \cdot DK$$

$$21/5$$

$$\frac{11}{6} + \frac{10}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\sin(\arcsin x)$$

$$\cos(\arcsin x)$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\frac{1}{2}$$

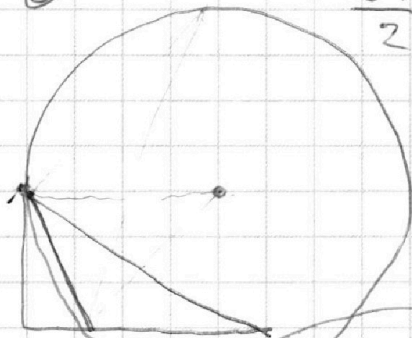
$$\frac{21^2 - 3^2 \cdot 5^2}{3^2(7^2 - 5^2)}$$

$$\frac{5}{2} - 6$$

$$y^4 - 7/2 y + 4 = 0$$

7

$$-3/2 + 5/3 = \frac{10-9}{6} = \frac{1}{6} \quad 49-25=24$$



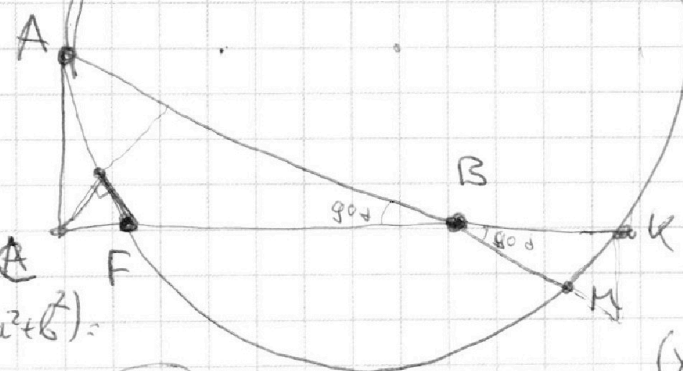
$$1/6 + 5/3 = \frac{1+10}{6} = \frac{11}{6}$$

$$CK = (CB + BK)$$

$$AC^2 = EF \cdot CK$$

$$AB \cdot BM = FB \cdot BK$$

$$CB = CF$$



$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

$$= (a^2 + b^2)(a - b)(a + b)$$

$$a^3 + ab^2 + ab^2 - b^3$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 - 4 = kx + b \\ x^2 + y^2 - 9 = kx + b \end{cases}$$

$$y^2 = *$$



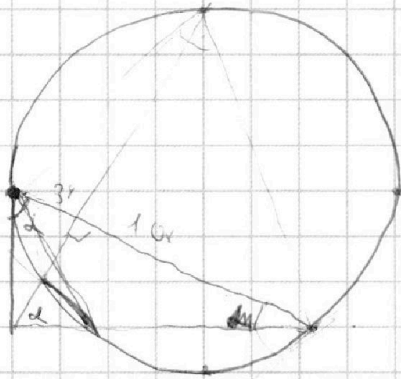
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EF = 10y$$

$$CE = \sqrt{30}y$$

$$CF = \sqrt{130}y$$

$$AC^2 = 39x^2 = CK \cdot (CK - \sqrt{30}y)$$

