



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BSC$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$      $bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$      $ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ . а, в, с камм. - ?

$\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$ .

а, в, с камм., когда а, в и с ~~не~~ не содержат в себе др-х множителей, кроме 2, 3 и 5. Тогда представим эти числа в таком виде:

$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$ ;     $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$ ;     $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$ ,

где степени  $a_2, a_3, \dots, c_5$  — целые неотрицательные числа.

I. Пусть кол-во двоек в <sup>степенях</sup> простых делителях а, в, с равно 9, 14 и 19 <sub>соотв.</sub>

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ a_2 + c_2 = 19 \\ b_2 + c_2 = 14 \end{cases}; \quad a_2 + b_2 + c_2 = \frac{42}{2} = 21. \quad \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 12 \end{cases} \begin{matrix} \text{(это камм.} \\ \text{возм.} \\ \text{степени)} \end{matrix}$$

II. Пусть кол-во троек в простых делителях а, в, с равно 10, 13 и 18 <sub>соотв.</sub>

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 13 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{41}{2} \text{ — степени целые, и их сумма тоже должна быть целой. Противоречие множеству.}$$

Тогда пусть кол-во троек в <sup>степенях</sup> простых делителях а, в, с больше на 1 (для минимальности), т.е.  $b_3 + c_3 = (13+1) = 14$ .

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 14 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{42}{2} = 21; \quad \begin{cases} a_3 = 7 \\ b_3 = 3 \\ c_3 = 11 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пр Пусть количество метров в пр. дем.  $a_5, b_5$  и  $c_5$  равно соотв. 10, 13 и 30:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 + c_5 = 13 \end{cases} \quad a_5 + b_5 + c_5 = \frac{53}{2} = 26,5.$$

Условно неучетное, и, более того, оно меньше, чем  $a_5 + c_5 = 30$ , то есть  $b_5$  окажется отрицательным.

Чтобы  $b_5$  было наименьшим отрицательным, суммируем  $a_5 + b_5 + c_5$  дважды, чтобы получилось 30 (тогда  $b_5 = 0$ ).

Итак, пусть  $a_5 + b_5 + c_5 = 30$ ; тогда  $b_5 + c_5 = 20$ :

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 + c_5 = 20 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_5 = 10 \\ b_5 = 0 \\ c_5 = 20 \end{cases}$$

Итого:

$$a \cdot b \cdot c = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 11 & 20 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$\sqrt[3]{3}$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

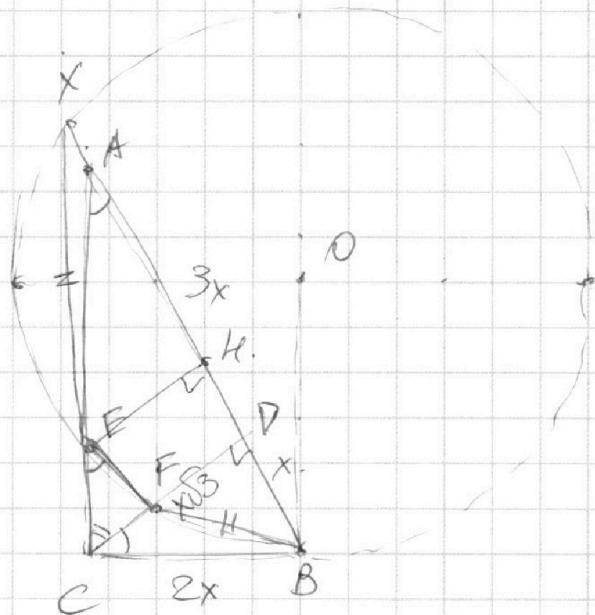
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2.

$EF \parallel AB$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$$



Пусть  $AB$  — диаметр.  $AB$  — хорда  $AB$  из  $A \cap O_{\text{кр}} = X$ .

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EX = \angle BF$  и  $EX = BF$ .

$BFEK$  —  $\text{р/б}$  трап.

Пусть  $AD = 3x \rightarrow BD = x$ .  $CD^2 = 3x^2$ ;  $CD = x\sqrt{3}$ .

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 \text{ (Пит)}, \quad BC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2, \\ BC = 2x.$$

Тогда  $\angle CAB = 30^\circ$ ,  $\angle CEF = 30^\circ$ ,  $\angle DCB = 30^\circ$ .

Проведем  $EK \perp AB$ .  $KX = BD = x$ , т.к.  $\text{р/б}$  трап.

$EK = DF$  как высоты,  $FE \parallel AB$ .  $EKDF$  —  $\text{кр/к}$ ,  $EF = DK$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

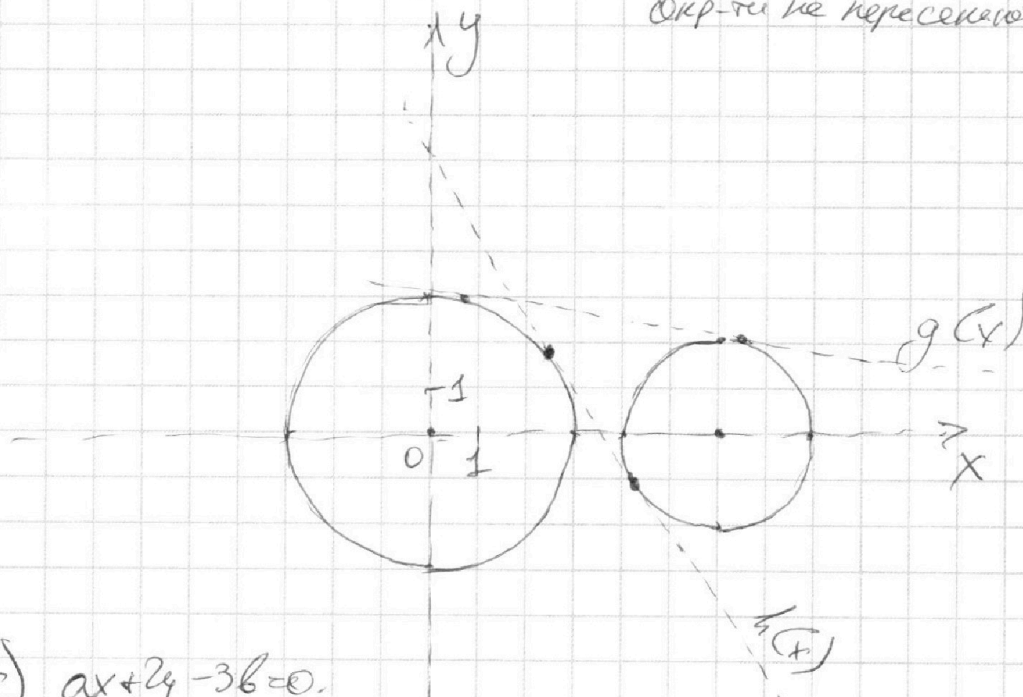


№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (I) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (II) \end{cases} \quad 4 \text{ реш.}$$

$$II). \begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ x^2+y^2-12x+32=0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ (x-6)^2+y^2=4 & (2) \end{cases}$$

Графики окр-тей этих уравнений см. на рисунке ниже; окр-ти не пересекаются



$$I). ax+2y-3b=0.$$

Ур-е прямой; имеет с двумя не пересекающимися окр. максимум 4 решения.

"Каждётся значение  $b$ " значит, что  $b$  может быть любым, т.е. св. переменной  $ax+2y-3b=0$  — любой.

Рассмотрим, когда прямая касается двух окр. внутр. образом (как рис.  $g(x)$ ). Никакими параллельными прямыми вверх/вниз (изменяем  $b$ ) нельзя добиться 4-х решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем ур-е этой прямой.

Рассм. произвольную прямую  $a_1x + 2y + c_1 = 0$ , где  
 $a_1 = a$ ,  $c_1 = -3b$ .

Условие касания: (1/3 раст. от  $r_{\text{вн}}$  до центра окр. =  $R$ ).

$$1) \frac{|a_1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 3;$$

$$\frac{|c_1|}{3} = \sqrt{a_1^2 + 4}. \quad \text{В случае } h(x): \begin{cases} c_1 > 0 \\ a_1 < 0 \end{cases}$$
$$c_1^2 = 9a_1^2 + 36.$$

$$2) \frac{|a_1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 2; \quad \frac{|6a_1 + c_1|}{2} = \sqrt{a_1^2 + 4}$$

$$\text{Имеем: } \frac{|c_1|}{3} = \frac{|6a_1 + c_1|}{2}; \quad 2|c_1| = 3|6a_1 + c_1|.$$

$c_1 > 0$ . Пусть  $6a_1 + c_1 > 0$ :

$$2c_1 = 3c_1 + 18a_1; \quad a_1 = -\frac{c_1}{18}.$$

При  $6a_1 + c_1 < 0$ :

$$2c_1 = -18a_1 - 3c_1; \quad a_1 = -\frac{5c_1}{18}.$$

$$\text{Получим } \begin{cases} a_1 = -\frac{c_1}{18} \\ a_1 = -\frac{5c_1}{18} \end{cases}$$

Это коэф.  $a_1$ , где соотв. двум  
прямым, к-е касаются окр. <sup>вдвух</sup>  
внутр. и внешн. образом, придем

т.к. как с (1) выше от  $Ox$ . Др. условие, где  $a_1$  соотв.  
прямой  $h(x)$  и  $g(x)$  (см. график)

Из графика видно, что  $a_h(x) < a_g(x)$ . (коэф.  $\neq 0$  уже как)

$$\text{Т.к. } c_1 > 0, \text{ то } -\frac{5c_1}{18} < -\frac{c_1}{18}, \text{ т.е. } \frac{1}{2} a_h(x) = -\frac{5c_1}{18}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Представляем в упр. кас. с (P):

$$\left| -\frac{5c_1}{18} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \right| = 3, \quad |c_1| = 3 \sqrt{\left(-\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}$$
$$\sqrt{\left(-\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}$$

$$c_1^2 = \frac{25c_1^2}{36} + 36, \quad \frac{11c_1^2}{36} = 36, \quad c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}$$

Тогда  $a_1 = -\frac{5}{18} \cdot \frac{36}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}$ .

Итого ~~коэф.~~ коэф. а прямой  $l(x): -\frac{10}{\sqrt{11}}$ .

Если увеличивать коэф. этой прямой до  $-\infty$ , то  $l$ -х пересечений точек никак не получится (при  $l \neq 0$ ).

Если тут же увеличивать коэф. этой прямой (рассм. ~~а~~ коэф.  $< 0$ ), то возможно будет пересечение с обоими оар, т.е. 4 решения, и так вплоть до коэф., равного 0.

Если  $a = 0$ , 4 решения.

График оар-тей симметрично отн. Ox, тогда ~~в~~ поведение пр-х симметрично отн.  $a = 0$  (при  $a = 0$  прямая  $\parallel Ox$ ). ~~§~~

Тогда при  $a \in \left[-\frac{10}{\sqrt{11}}; 0\right)$  при  $a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}]$   $l$ -х решений нет, тогда и при  $a \in \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$   $l$ -х решений нет.

Итого при  $a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$  решений нет, тем  $l$  при любом  $b$ .

Тогда при  $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$   $\exists b$ , что есть 4 решения.

Ответ:  $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases}
 \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 & \text{I} \\
 \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 & \text{II}
 \end{cases}$$

\* Опр.  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\text{I) } \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8; \quad | \cdot \log_3 x \quad (\log_3 x \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1)$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0. \quad \text{III}$$

$$\text{II) Пусть } 5y = z. \quad \begin{cases} z > 0 \\ z \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_3^4 z + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{11}{2 \log_3 z} - 8; \quad | \cdot \log_3 z \quad (\neq 0, \text{ т.к. } z \neq 1)$$

$$\log_3^5 z + 8 \log_3 z - \frac{7}{2} = 0. \quad \text{IV}$$

$$\text{III} + \text{IV}$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 z + 8(\log_3 x + \log_3 z) = 0. \quad \text{Пусть } \begin{cases} \log_3 x = a \\ \log_3 z = b \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0;$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0;$$

или тогда  $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$ .

$$(a+b)(a^4 - a^3b + \dots + b^4 + 8) = 0;$$

$$a+b=0; \quad \log_3 x + \log_3 z = 0; \quad \log_3 xz = 0; \quad xz = 1;$$

$$5xy = 1; \quad xy = \frac{1}{5}. \quad \text{достигается только при } \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } \frac{1}{5}.$$

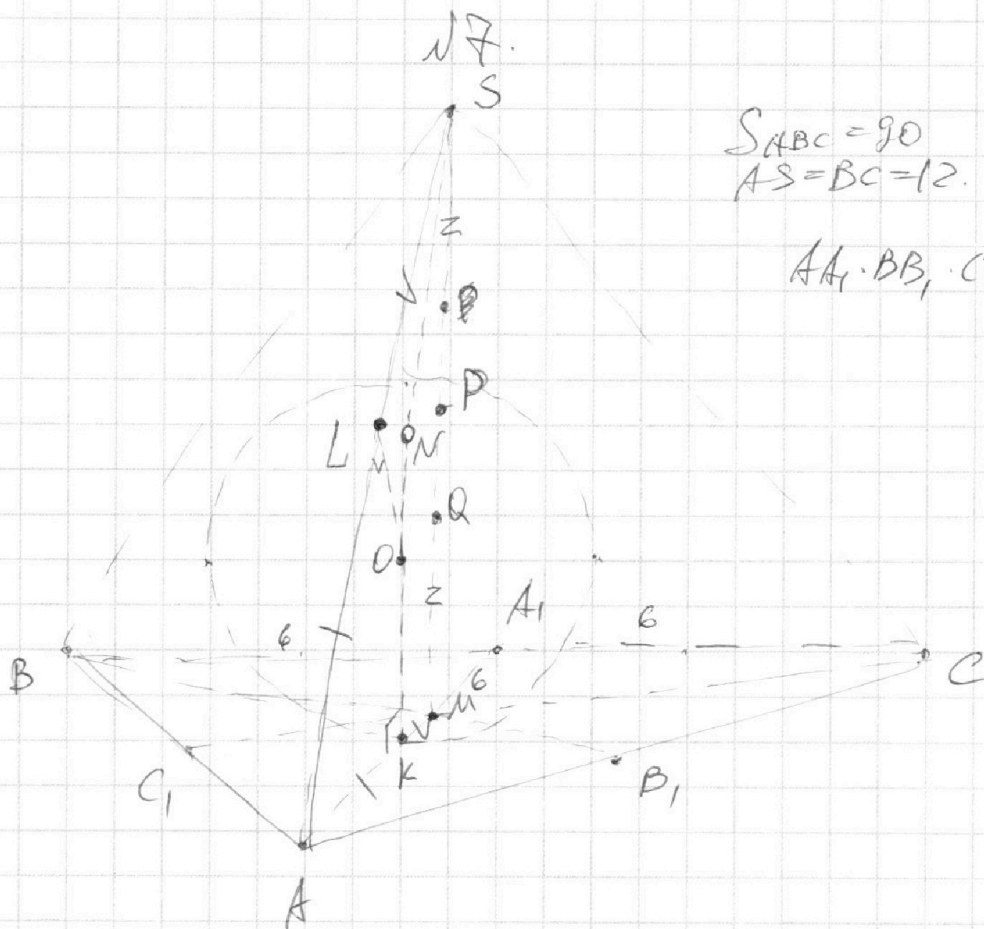
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 90$$

$$AS = BC = 12$$

$AA_1, BB_1, CC_1 - ?$

$O$  — центр сферы.  $Ak = AL$  как кас. и хорды кас.

$$SL^2 = SP \cdot SQ \quad (\text{св-во кас. и хорды})$$

$$MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ(SP + PQ) = MQ(PQ + MQ) = MQ \cdot MP = MK^2$$

$$SL = MK$$

$$AS = AL + SL = Ak + MK = AM = 12$$

$$\frac{AM}{Ak} = \frac{2}{1} \quad (\text{св-во кас.}) \Rightarrow Ak = \frac{2}{3} AM = 12, AM = 18, Ak = 6$$

$$A_1M = 6; BA_1 = AC = \frac{12}{2} = 6$$

$\triangle BMC$  — и/у (по кривизн.);  $\angle BMC = 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $BB_1 = 3a$ ,  $CC_1 = 3b$ . Тогда  $BM = 2a$ ,  $CM = 2b$   
(из подобия).

$$\text{Тогда } S_{BMC} = \frac{2a \cdot 2b}{2} = ab.$$

Медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  пересечения делят  $S$  на 3 равные,  
значит,  $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30 = ab$ .

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3b \cdot 3a = \underline{4860}.$$

б)  $ON \perp (BSC) \Rightarrow ON \perp SN$ ;

$$\text{по т. Пиф.: } OS^2 = ON^2 + SN^2; OS^2 = 4^2 + 5^2 = 41;$$

$$OS = \sqrt{41}. \quad SL = SN = 4 \text{ (как кас.)}$$

$$\text{тогда } AL = 12 - 4 = 8 = AK; KM = 12 - 8 = 4.$$

$$S_{ABC} = 90, BC = 12, S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h \rightarrow h = 15$$

( $h$  — высота  $\triangle ABC$  из  $\text{т.т. } A$ ).

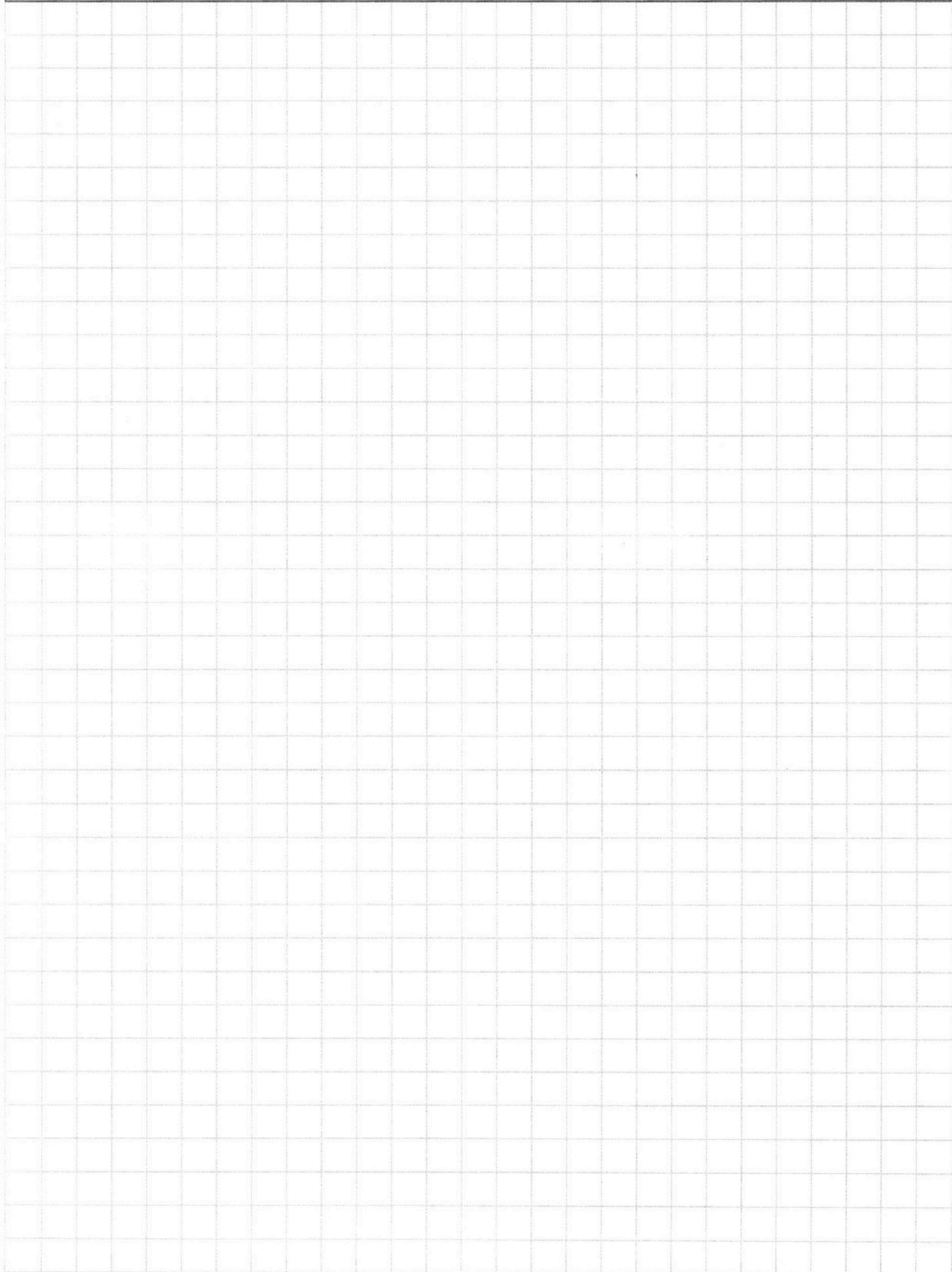
Ответ: а) 4860



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





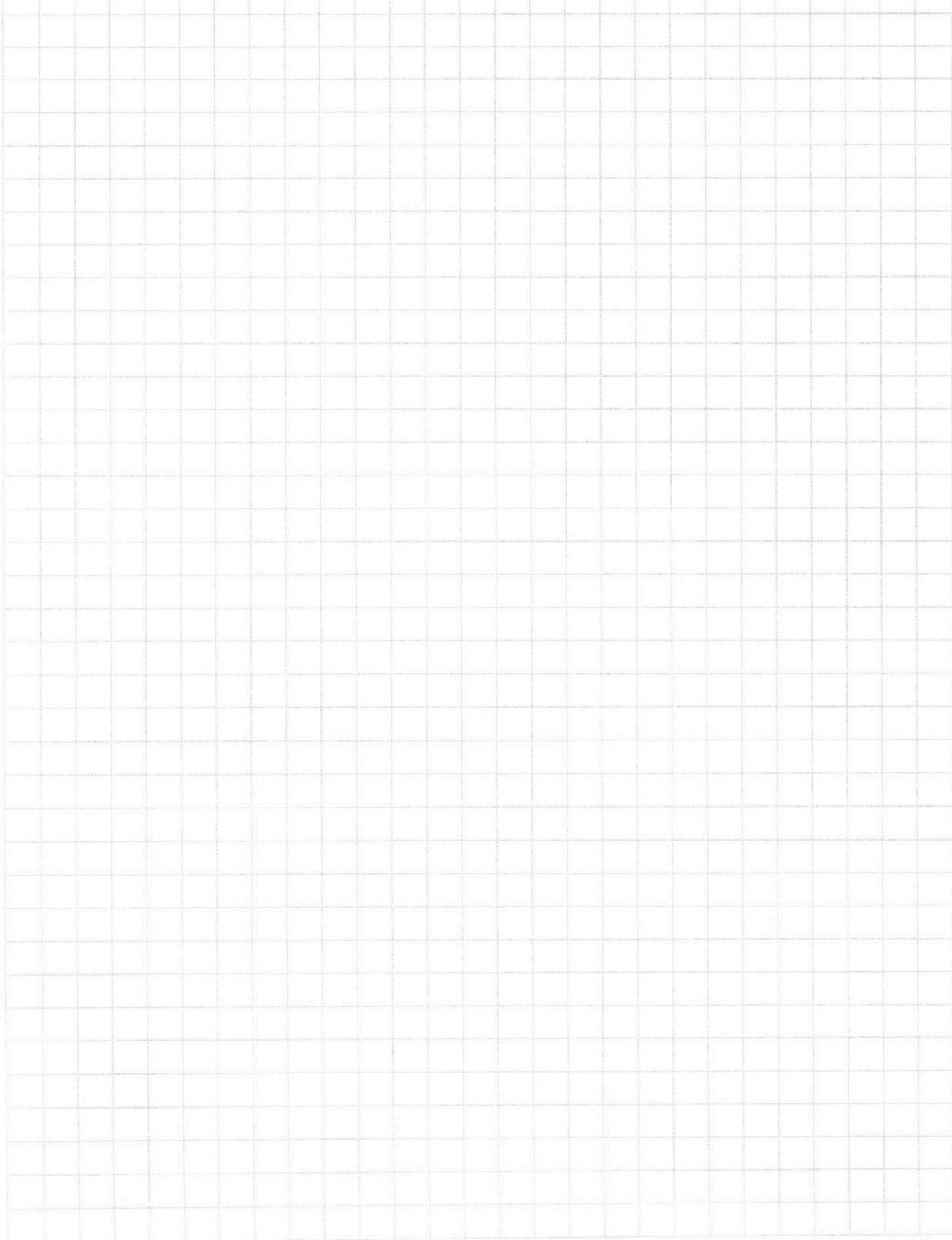
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



\* Условие касаний:

$$ax + 2y - 3b = 0$$

1)  $x_0, y_0 = (0, 0)$   $R = 3$

$$\rho = \frac{|a \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 3;$$

$$|3b| = 3\sqrt{a^2 + 4};$$

$$9b^2 = 9a^2 + 36.$$

2)  $x_0, y_0 = (6, 0)$

$$\rho = \frac{|6a - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 2;$$

$$36a^2 + 9b^2 - 36ab = 4a^2 + 16.$$

$$9b^2 = -32a^2 + 36ab + 16.$$

$$\Downarrow$$
$$9a^2 + 3b = -32a^2 + 36ab + 16;$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

1)  $(0, 0)$   $R = 3$   $\rho = \frac{|a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 3; C^2 = 9a_1^2 + 9b_1^2.$

2)  $(6, 0)$   $R = 2$

$$\rho = \frac{|a_1 \cdot 6 + b_1 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 2;$$

$$2|c_1| = 3|6a_1 + c_1|.$$

$$\begin{cases} c_1 > 0 \\ a_1 < 0 \end{cases} \text{ при } 6a_1 + c_1 > 0.$$

$$2c_1 = 18a_1 + 3c_1;$$

$$c_1 = -18a_1.$$

$$\text{при } 6a_1 + c_1 < 0:$$

$$2c_1 = -18a_1 - 3c_1;$$

$$4c_1^2 = 9(36a_1^2 + 12a_1c_1 + c_1^2); \sum c_1 = 18a_1.$$

$$4c_1^2 = 324a_1^2 + 108a_1c_1 + 9c_1^2;$$

$$324a_1^2 + 108a_1c_1 + 5c_1^2 = 0. \text{ Зеро?}$$

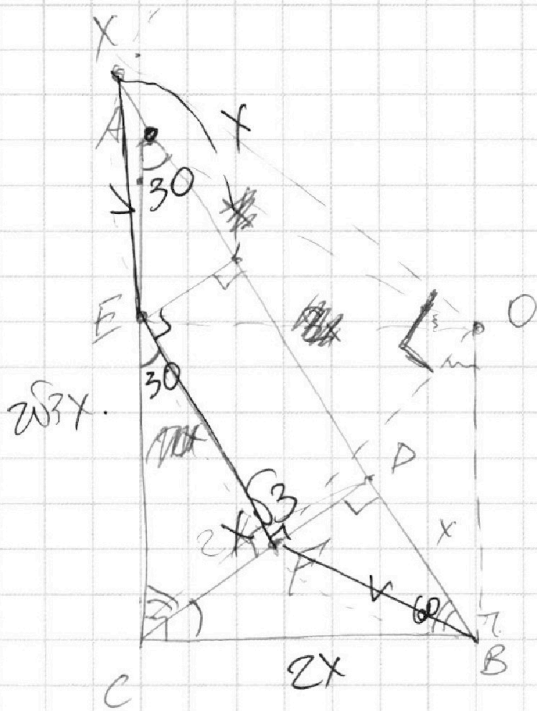
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AB \Rightarrow \angle A E = \angle B F$   
 $AE$  не годя!

$$CD^2 = 4x^2; \quad CD = 2x.$$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$ :

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$\triangle ABC \sim \triangle CDB$ :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{CB}$$

$$AC^2 = 9x^2 + 4 = 13x^2. \quad AC = x\sqrt{13}.$$

$$CB^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2, \quad BC = x\sqrt{5}.$$

$$AB = 4x. \quad CD = 2x. \quad AC^2 = 9x^2 + 4x^2 = 13x^2. \quad AC = x\sqrt{13}.$$

$$BC^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2. \quad BC = x\sqrt{5}.$$

$$AC^2 + BC^2 = 13x^2 + 5x^2 = 18x^2$$

$$AC^2 = 16x^2 - 5x^2 = 11x^2. \quad BC^2 = 5x^2. \quad BC = x\sqrt{5}.$$

$$\text{Тогда } \frac{BC}{AC} = \frac{x\sqrt{5}}{4x} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

$$AC = \frac{8x\sqrt{5}}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3 5z^a + 8\log_3 z - 7 = 0 \\ \log_3 5x + 8\log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

(+) =

$$a^2 a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0; \quad = 0 \cdot 8 \cdot 8$$

$$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$a = -b?$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y;$$

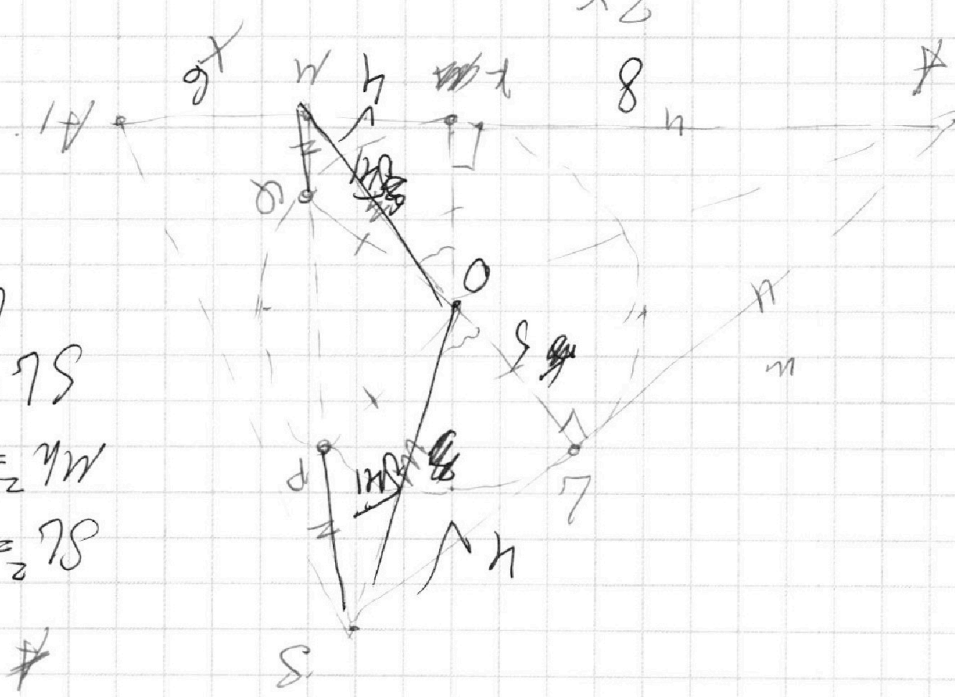
$$\log_3 5xy = 0; \quad 5xy = 1; \quad (x,y) \in \left(\frac{1}{5}, 1\right)$$

$xy = \frac{1}{5}$ . едет ли?

$$AS = \frac{3}{2} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 18$$

$$AA_1 = m + \sqrt{m^2 + n^2} = \frac{3}{2} AA_1$$

$$\begin{aligned} SL_2 &= SP \cdot SQ \\ ML_2 &= MQ \cdot MP \\ SL_1 &= PL \\ LS &= 4 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$N \neq 4$

$$ax + by \begin{cases} ax + by - 36 = 0 & (I) \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0 \quad (II)$$

Все  $a$ :  $\exists b$ : 4 решения

$$II) 1) x^2 + y^2 = 9$$

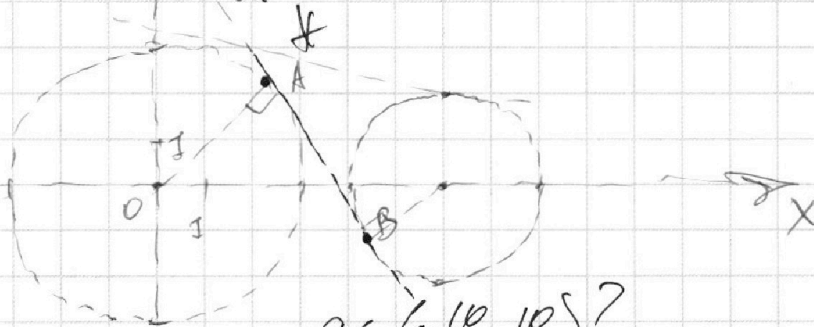
$$2) x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4; (x-6)^2 + y^2 = 4.$$

$y$

При  $a \leq \frac{-10}{\sqrt{11}}$ ; 4 рееш.  
нет.

При  $a \geq \frac{10}{\sqrt{11}}$ ; 4 рееш. нет

$a = \frac{-10}{\sqrt{11}}$



$a \in \left( \frac{-10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$ ?

$$I) \begin{cases} by = 36 - ax + 36 \\ y = -\frac{a}{2}x + 36 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8 & (1) \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y}^2 (3^{11}) - 8 & (2) \end{cases}$$

OD3:  $x > 0$   
 $x \neq 1$   
 $y > 0$   
 $y \neq 1$

$$\frac{12}{2 \log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} = \frac{7}{2 \log_3 x}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{3^5} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2 \log_3 x} - 8 = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8; \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0; \quad 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{2}{32} - 8 + 7 \neq 0 \quad \text{не}$$

$$2) \quad 5y = 2. \quad \log_3^4 2 + \frac{2}{2 \log_3 2} = \frac{11}{2 \log_3 2} - 8$$

$$\log_3^4 2 - \frac{7}{2 \log_3 2} = -8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \cos x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = x + 5 \cos x \quad 2\pi = 6x; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

№1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$ .

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, \quad ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

Какие?

~~$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$~~  ;    ?  $a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$  ✓

~~$(abc)^2: 2^{21} 3^{22} 5^{33}$~~  ;

~~$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$~~  ;

~~$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$~~  ;

$c^2: 2^{24} 3^{21} 5^{33}$  ?  
 $b^2: 2^4 3^5 5^7$  ?  
 $a^2: 2^{14} 3^{15} 5^{30}$

По 5:  $\pi/2$   $\pi\pi/\pi\pi$   
 $ab \rightarrow 5^{10}$   
 $bc \rightarrow 5^{13}$   $\pi/\pi\pi$   
 $ac \rightarrow 5^{30}$   $\pi/2$   $\pi\pi/\pi\pi$

$b^2 \rightarrow c \rightarrow \pi\pi \rightarrow a\pi\pi$  ✓  
 $b-\pi\pi \rightarrow c \rightarrow \pi \rightarrow a \rightarrow \pi$  ✓



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

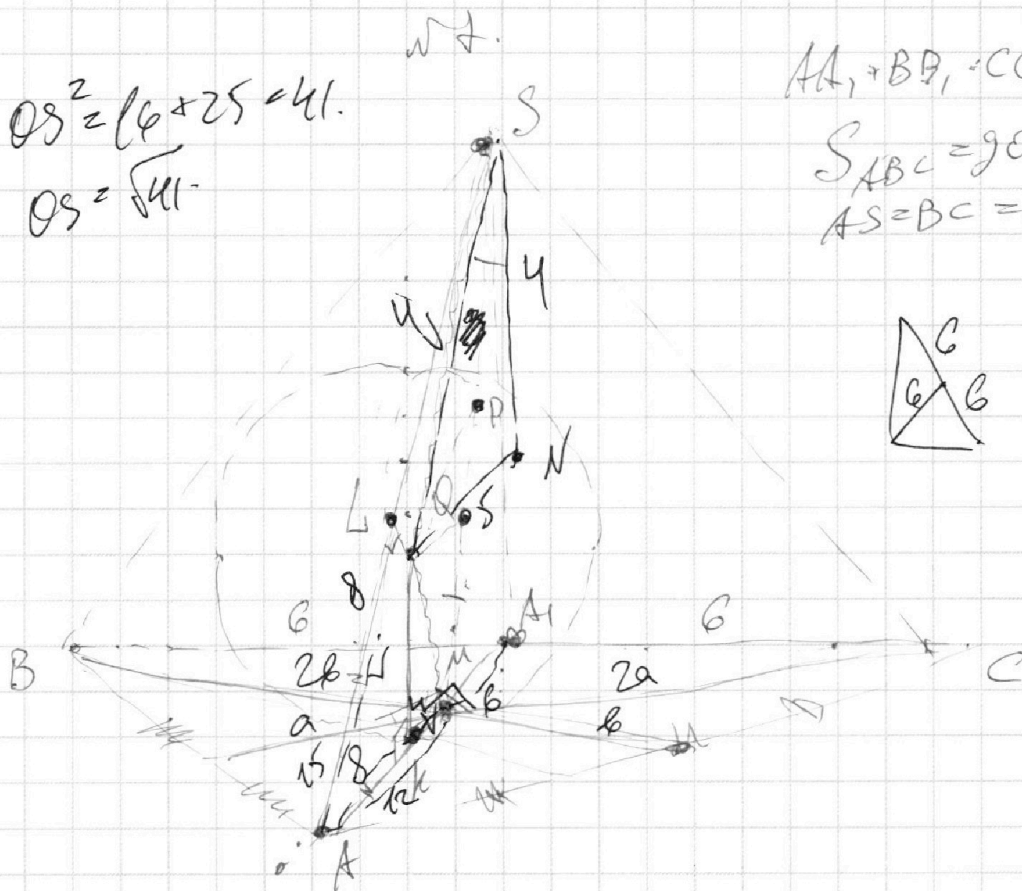
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$OS^2 = 16 + 25 = 41.$$
$$OS = \sqrt{41}$$

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = ?$$

$$S_{ABC} = 90$$
$$AS = BS = CS = 12$$



$$AK = AL$$

$$= ab +$$

$$S_{ABC} = S_{BMC} + S_{AMC} + S_{ABM} =$$



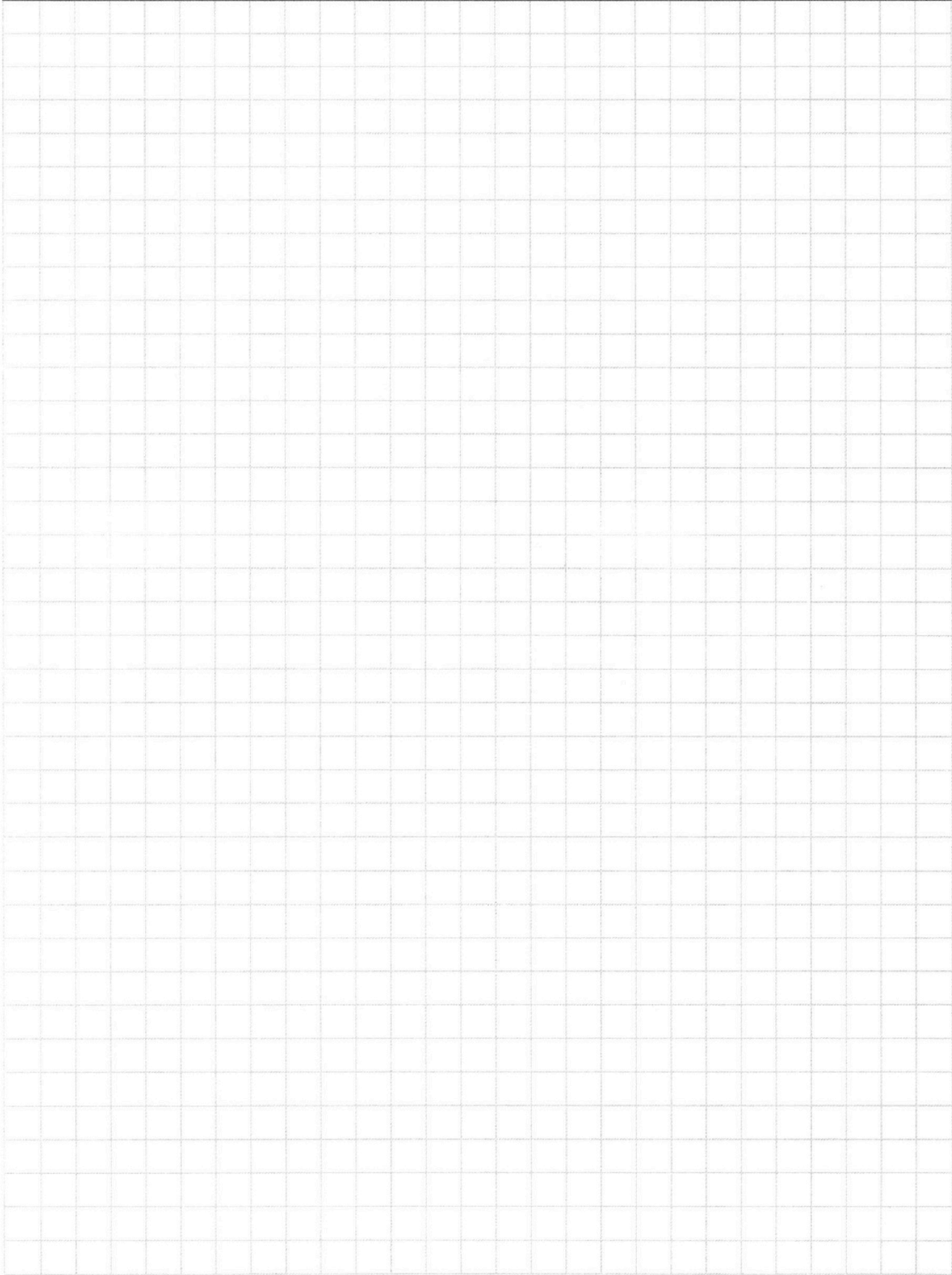
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



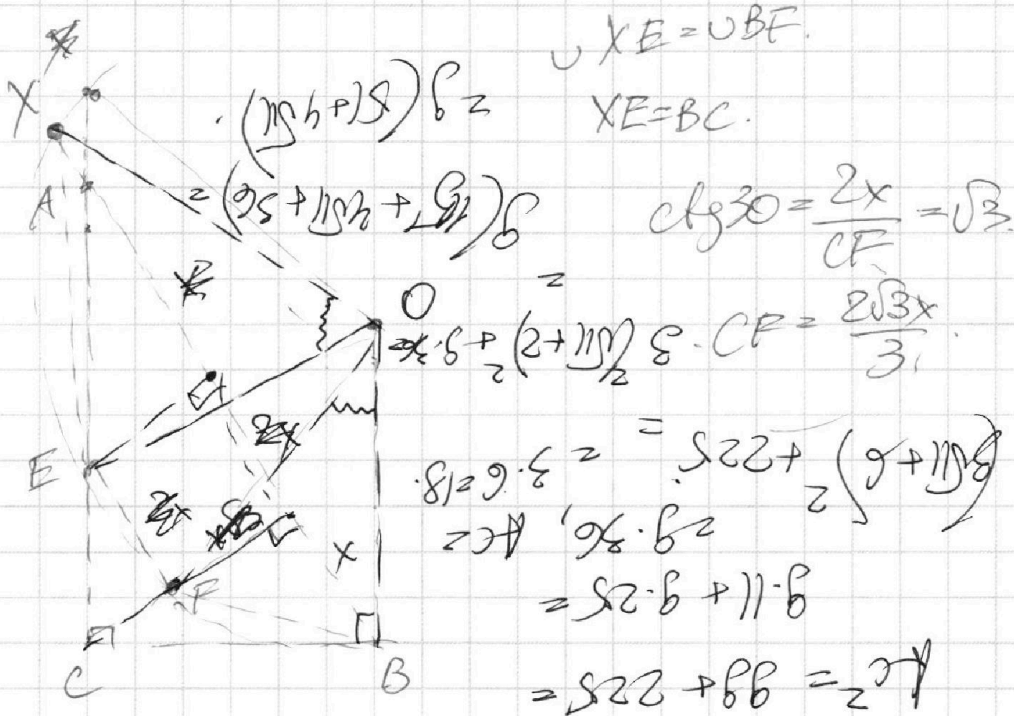
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



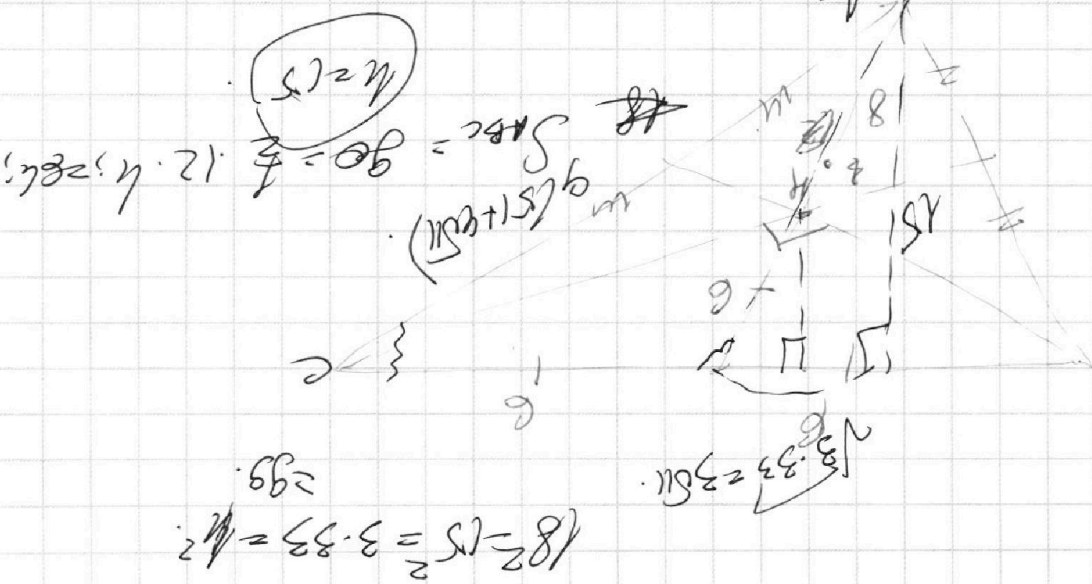
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$18 \cdot 9 = 18 \cdot 3a + 3b = 50 \cdot 9 \cdot 18$

$ab = 30$

$ab = \frac{30}{3} = 30$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



кас. сверху и снизу.

$$\text{Ищем: } \begin{cases} a_1x + b_1y - 18a_1 = 0 \\ a_1x + b_1y - \frac{18a_1}{5} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{c}{18} \\ a_2 = -\frac{5c}{18} \end{cases}$$

$a_1 \neq a_{\text{вск}} < a_{\text{д}}$

$$a_1 = -\frac{5c}{18}$$

$$-\frac{c}{18} < -\frac{5c}{18}; \text{ что}$$

$$c < 5c \Rightarrow a_1 > a_2. \quad a_2 - \text{вск.}$$

$$-\frac{5c}{18}x + b_1y + c_1 = 0.$$

$$\text{кас. } ax + 2y - 36 = 0.$$

$$b_1 = 2$$

$$D = \left| -\frac{5c_1}{18} \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \right| = \frac{5c_1}{18}$$

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{18} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 3.$$

$$c_1^2 = 9 \cdot \left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 36;$$

$$c_1^2 = \frac{25}{36} c_1^2 + 36?$$

$$\frac{11}{36} c_1^2 = 36? \quad c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}?$$

$$\text{Тогда } a = -\frac{5}{18} \cdot \frac{36}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

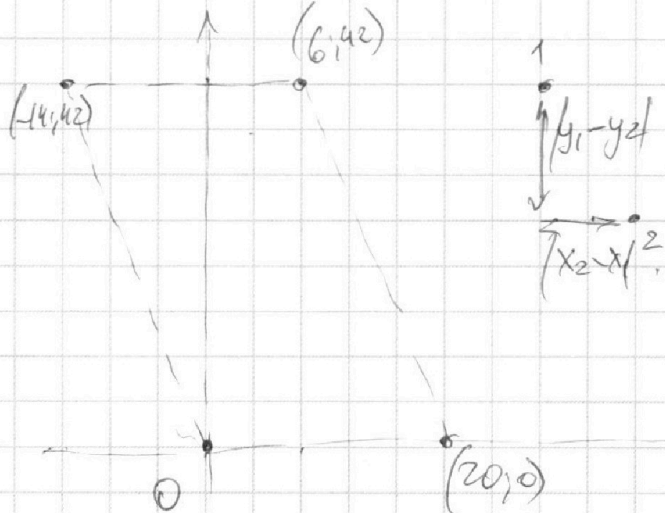
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$kx - kx = DK$$

$$kx + kx = kx$$

$$kx = kx$$

$$kx = kx$$

$$kx + kx = kx$$

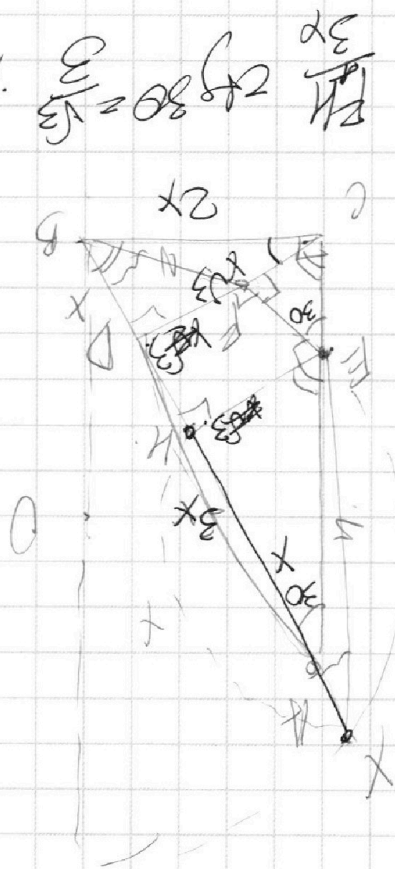
$$kx + kx = kx$$

$$kx + kx = kx$$

$$kx + kx = kx$$

$$= 9.18.30$$

$$abc = 30.30.30.18 =$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

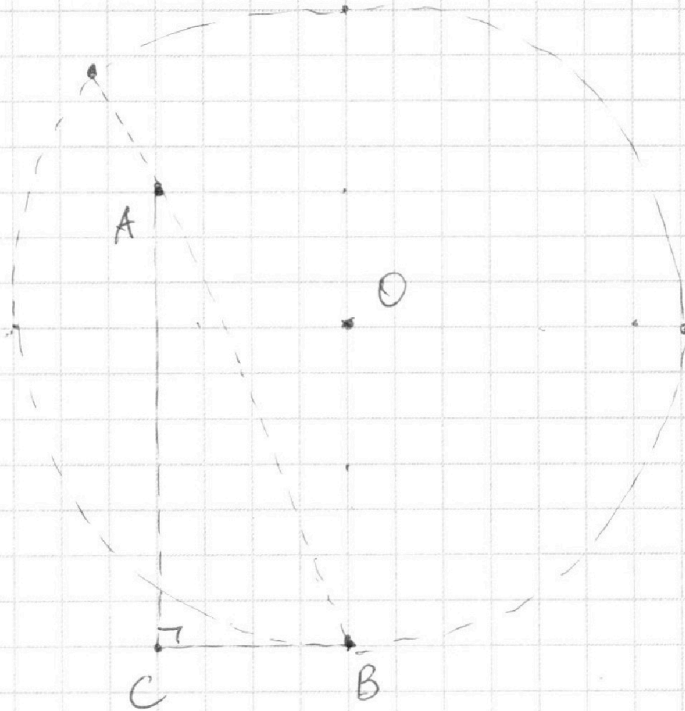
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N



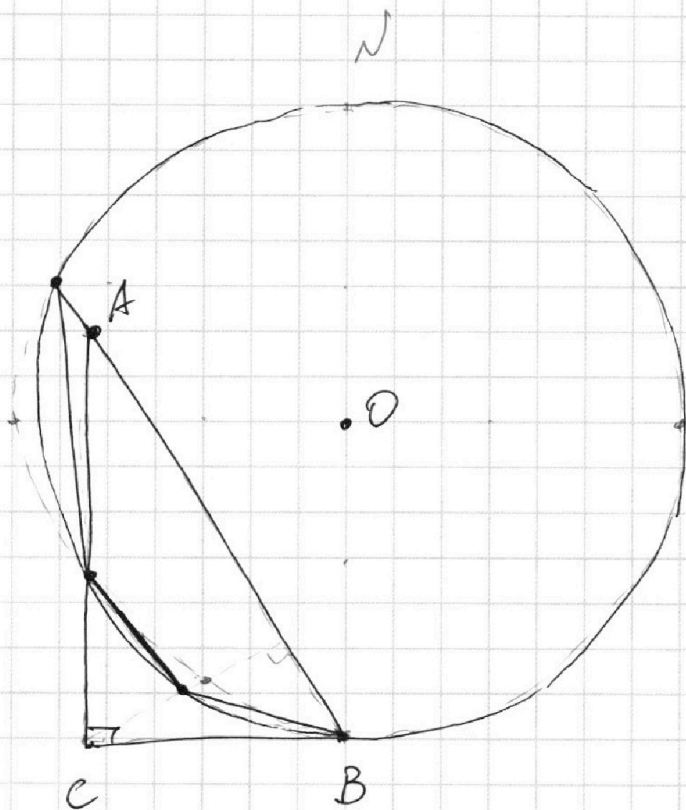
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№1~~ ~~№1~~ №1.

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$\# \text{ в } \mathbb{N} \rightarrow \deg(\pi \cup \nu)$$

подсчитать про кажи.

$$(abc)^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53} \quad ?$$

$$:(ab)^2: c^2 = 2^{24} 3$$

$$a=2^8, \quad ab: 2^9 \quad bc: 2^{14} \quad ac: 2^{19}$$

Пусть все в  $\mathbb{N}$ .

$$a, b, c \in \left(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \begin{cases} a+b=9 \\ b+c=14 \\ a+c=19 \end{cases}$$

$$abc = 21.$$

$$c = 12.$$

$$b = 2.$$

$$a = 7.$$

Для 3:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a+c=18 \\ b+c=14 \end{cases}$$

$$abc = \frac{41}{2} = 20.5 \rightarrow \frac{42}{2} = 21.$$

$$c=11 \quad b=2 \quad a=8.$$

Пусть с км.ка + 3 км.г.

$$abc+c = \frac{43}{2} = 21.$$

$$2a+2b+2c=14.$$

$$3 \text{ км.г.}, \quad b+c=14.$$

$$c=11$$

$$b=3$$

$$a=7.$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a+c=19 \\ b+c=14 \end{cases}$$

Для 5:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=14 \rightarrow 14 \\ a+c=30 \end{cases}$$

$$abc+c=27.$$

$$c=17$$

$$2(a+b+c)=54.$$

$$abc+c=27?$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=20 \\ a+c=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=20 \\ c=20 \\ a=40 \end{cases}$$

$$13$$

каже бр бр. каже +3.2.

$$b+c=20.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{3} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 2.$$

$$\frac{2}{3}c_1 = 2\sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1}{3} = \sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1^2}{9} = \frac{25c_1^2}{18^2} + 16;$$

$$-16 = \frac{25c_1^2}{18^2} - \frac{36c_1^2}{18^2};$$

$$\frac{11c_1^2}{18^2} = 16;$$

$$c_1^2 = \frac{16 \cdot 18^2}{11}; \quad c_1 = \frac{4 \cdot 18}{\sqrt{11}};$$

$$c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}?$$

$$\text{Таким образом } c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}} \rightarrow a_1 = \frac{-10}{\sqrt{11}}.$$

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{18} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 3.$$

$$c_1^2 = 9 \left( \left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4 \right);$$

$$c_1^2 = \frac{25c_1^2}{36} + 36$$

$$\frac{11c_1^2}{36} = 36 \quad c_1^2 = \frac{4 \cdot 36}{11} \quad c_1 = \frac{12}{\sqrt{11}}$$

$$c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}.$$

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{3} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 2.$$

$$\frac{2}{3}c_1 = 2\sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1}{3} = \sqrt{\quad}; \quad \frac{c_1^2}{9} = 9(\quad).$$

$$\frac{c_1^2}{9} = \frac{25c_1^2}{18^2} + 4;$$

Ⓟ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

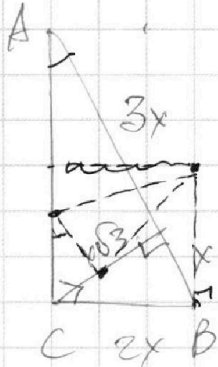
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$CX^2 = 3x \cdot x = 3x^2$$



$AB \parallel EF$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEFF}} = ?$

$$CX = x\sqrt{3}$$

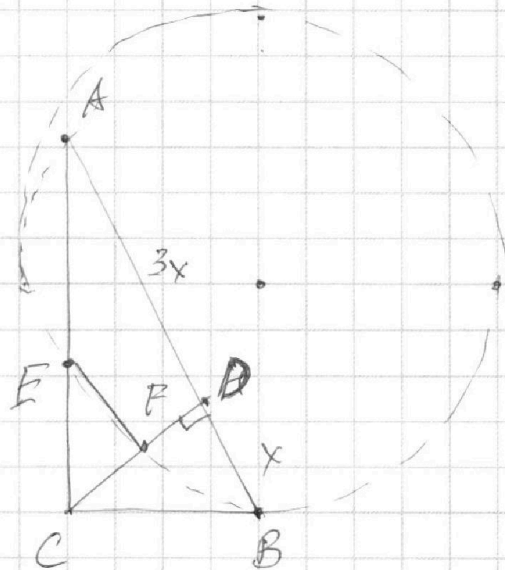
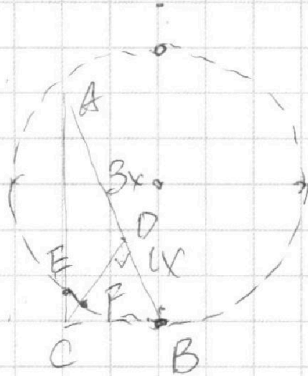
$$BC^2 = x \cdot 4x = 4x^2;$$

$$BC = 2x.$$

$$AC^2 = 3x \cdot 4x = 12x^2;$$

$$AC = 2\sqrt{3}x.$$

$$AC^2 + BC^2 = 16x^2 \quad (\checkmark)$$



$\triangle ABC \sim \triangle ECF$ :

$$\frac{AB}{EC} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF}$$