



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BSC в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ $ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$. а, в, с камм. - ?

$\{a, b, c\} \in \mathbb{N}$.

а, в, с камм., когда а, в и с ~~не~~ не содержат в себе др-х множителей, кроме 2, 3 и 5. Тогда представим эти числа в таком виде:

$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$; $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$; $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$,

где степени a_2, a_3, \dots, c_5 — целые неотрицательные числа.

I. Пусть кол-во двоек ^{степенях} в разложениях а, в, с равно 9, 14 и 19 _{соотв.}

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ a_2 + c_2 = 19 \\ b_2 + c_2 = 14 \end{cases}; \quad a_2 + b_2 + c_2 = \frac{42}{2} = 21. \quad \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 12 \end{cases} \begin{matrix} \text{(это камм.} \\ \text{возм.} \\ \text{степени)} \end{matrix}$$

II. Пусть кол-во троек в простых разложениях а, в, с равно 10, 13 и 18 _{соотв.}

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 13 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{41}{2}$$
 — степени целые, и их сумма тоже должна быть целой. Противоречие множеству.

Тогда пусть кол-во троек ^{степенях} в разложениях а, в, с больше на 1 (для минимальности), т.е. $b_3 + c_3 = (13+1) = 14$.

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 = 18 \\ b_3 + c_3 = 14 \end{cases}; \quad a_3 + b_3 + c_3 = \frac{42}{2} = 21; \quad \begin{cases} a_3 = 7 \\ b_3 = 3 \\ c_3 = 11 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пр Пусть количество метров в пр. дем. a_5, b_5 и c_5 равно соотв. 10, 13 и 30:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 + c_5 = 13 \end{cases} \quad a_5 + b_5 + c_5 = \frac{53}{2} = 26,5.$$

Условно неучетное, и, более того, оно меньше, чем $a_5 + c_5 = 30$, то есть b_5 окажется отрицательным.

Чтобы b_5 было наименьшим отрицательным, суммируем $a_5 + b_5 + c_5$ дважды, чтобы получилось 30 (тогда $b_5 = 0$).

Итак, пусть $a_5 + b_5 + c_5 = 30$; тогда $b_5 + c_5 = 20$:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 + c_5 = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 = 10 \\ b_5 = 0 \\ c_5 = 20 \end{cases}$$

Итого:

$$a \cdot b \cdot c = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 11 & 20 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}.$$

$\sqrt{3}$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}; \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; 6x = 2\pi; x = \frac{\pi}{3}. \text{ Ответ: } \frac{\pi}{3}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

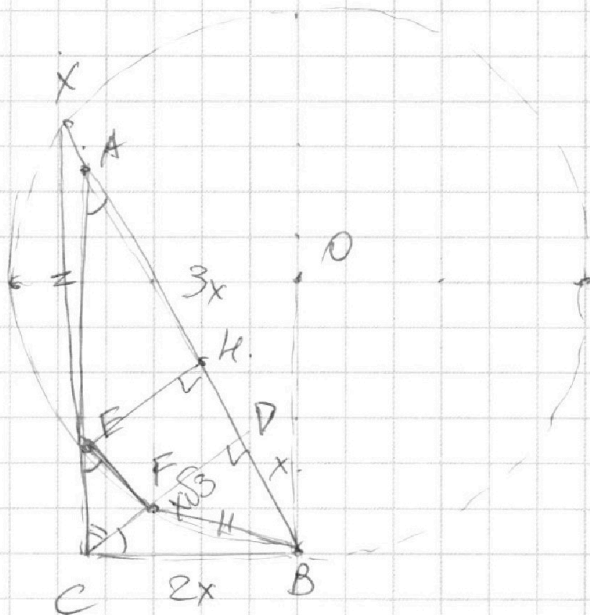
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.

$EF \parallel AB$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$$



Пусть AB — диаметр AB же $A \cap O_{\text{кр}} = X$.

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EXC = \angle BFC$ и $EX = BF$.

$BFEX$ — равнобедренный трапеция.

Пусть $AD = 3x \rightarrow BD = x$. $CD^2 = 3x^2$; $CD = x\sqrt{3}$.

$BC^2 = BD^2 + CD^2$ (Пиф.), $BC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2$; $BC = 2x$.

Тогда $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CEF = 30^\circ$, $\angle DCB = 30^\circ$.

Проведем $EK \perp AB$. $KX = BD = x$, т.к. равнобедренный трапеция.

$EK = DF$ как высоты, $FE \parallel AB$. $EKDF$ — параллелограмм, $EF = DK$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{3}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

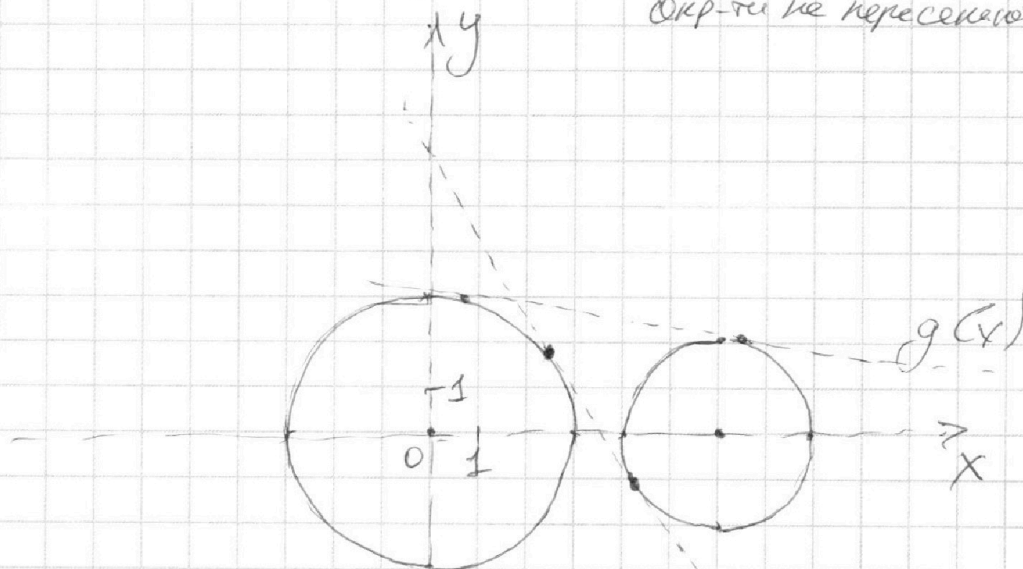


№4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (I) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (II) \end{cases} \quad 4 \text{ реш.}$$

$$II). \begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ x^2+y^2-12x+32=0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ (x-6)^2+y^2=4 & (2) \end{cases}$$

Графики окр-тей этих уравнений см. на рисунке ниже; окр-ти не пересекаются



$$I). ax+2y-3b=0.$$

Ур-е прямой; имеет с двумя окр. максимум 4 решения.

"Каждётся значение b " значит, что b может быть любым, т.е. св. пере ур-я прямой — любой.

Рассмотрим, когда прямая касается двух окр. внутр. образом (на рис. $g(x)$). Никаким параллельным перемещением вверх/вниз (изменяем b) нельзя добиться 4-х решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем ур-е этой прямой.

Рассм. произвольную прямую $a_1x + 2y + c_1 = 0$, где
 $a_1 = a$, $c_1 = -3b$.

Условие касания: (1/3 ^{центр окр.} ^{расст. от $r_{окр.}$ до прямой, равное R).}

$$1) \frac{|a_1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 3;$$

$$\frac{|c_1|}{3} = \sqrt{a_1^2 + 4}. \quad \text{В случае } h(x): \begin{cases} c_1 > 0 \\ a_1 < 0 \end{cases}$$
$$c_1^2 = 9a_1^2 + 36.$$

$$2) \frac{|a_1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + 4}} = 2; \quad \frac{|6a_1 + c_1|}{2} = \sqrt{a_1^2 + 4}$$

$$\text{Имеем: } \frac{|c_1|}{3} = \frac{|6a_1 + c_1|}{2}; \quad 2|c_1| = 3|6a_1 + c_1|.$$

$c_1 > 0$. Пусть $6a_1 + c_1 > 0$:

$$2c_1 = 3c_1 + 18a_1; \quad a_1 = -\frac{c_1}{18}.$$

При $6a_1 + c_1 < 0$:

$$2c_1 = -18a_1 - 3c_1; \quad a_1 = -\frac{5c_1}{18}.$$

$$\text{Получим } \begin{cases} a_1 = -\frac{c_1}{18} \\ a_1 = -\frac{5c_1}{18} \end{cases}$$

Это коэф. a_1 , для соотв. прям
прямых, к-е касаются окр.
внутр. и внешн. образом, придем

т.к. как с (1) выше от Ox . Др. словами, для a_1 соотв.
прямых $h(x)$ и $g(x)$ (см. график)

Из графика видно, что $a_h(x) < a_g(x)$. (коэф. $\neq 0$ уже
как)

$$\text{Т.к. } c_1 > 0, \text{ то } -\frac{5c_1}{18} < -\frac{c_1}{18}, \text{ т.е. } \frac{1}{2} a_h(x) = -\frac{5c_1}{18}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Представляем в упр. кас. с (P):

$$\left| -\frac{5c_1}{18} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \right| = 3, \quad |c_1| = 3 \sqrt{\left(-\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}$$

$$c_1^2 = \frac{25c_1^2}{36} + 36, \quad \frac{11c_1^2}{36} = 36, \quad c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Тогда } a_1 = -\frac{5}{18} \cdot \frac{36}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

Итого ~~коэф.~~ коэф. а прямой $l(x): -\frac{10}{\sqrt{11}}$

Если увеличивать коэф. этой прямой до $-\infty$, то $l(x)$ пересекет l_0 только один раз (при $l_0 \neq l$).

Если тут же увеличивать коэф. этой прямой (рассм. ~~а~~ коэф. < 0), то возможно будет пересечение с l_0 дважды, т.е. 4 решения, и так вплоть до коэф., равного 0.

Если $a = 0$, 4 решения.

График l_0 симметричен относительно Ox , тогда ~~в~~ поведение $l(x)$ симметрично относительно Ox . $a = 0$ (при $a = 0$ прямая $l(x)$).

Тогда при $a \in \left[-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right]$ при $a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}]$ 4-х решений нет, тогда и при $a \in \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$ 4-х решений нет.

Итого при $a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}] \cup \left[\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$ решений нет, тем 4 при $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

Тогда при $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$ $\exists b$, что есть 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases}
 \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 & (I) \\
 \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 & (II)
 \end{cases}$$

* Опр. $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

I) $\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$; $|\cdot \log_3 x$ ($\log_3 x \neq 0$, т.к. $x \neq 1$)

$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0$. (III)

II) Пусть $5y = z$. $\begin{cases} z > 0 \\ z \neq 1 \end{cases}$

$\log_3^4 z + \frac{2}{\log_3 z} = \frac{11}{2 \log_3 z} - 8$; $|\cdot \log_3 z$ ($\neq 0$, т.к. $z \neq 1$)

$\log_3^5 z + 8 \log_3 z - \frac{7}{2} = 0$. (IV)

(III) + (IV):

$\log_3^5 x + \log_3^5 z + 8(\log_3 x + \log_3 z) = 0$. Пусть $\log_3 x = a$
 $\log_3 z = b$.

$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$;

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$;

при этом $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$.

$(a+b)(a^4 - a^3b + \dots + b^4 + 8) = 0$;

$a+b=0$; $\log_3 x + \log_3 z = 0$; $\log_3 xz = 0$; $xz = 1$;

$5xy = 1$; $xy = \frac{1}{5}$. достигается только при $x = \frac{1}{5}$, $y = 1$. Ответ: $\frac{1}{5}$.

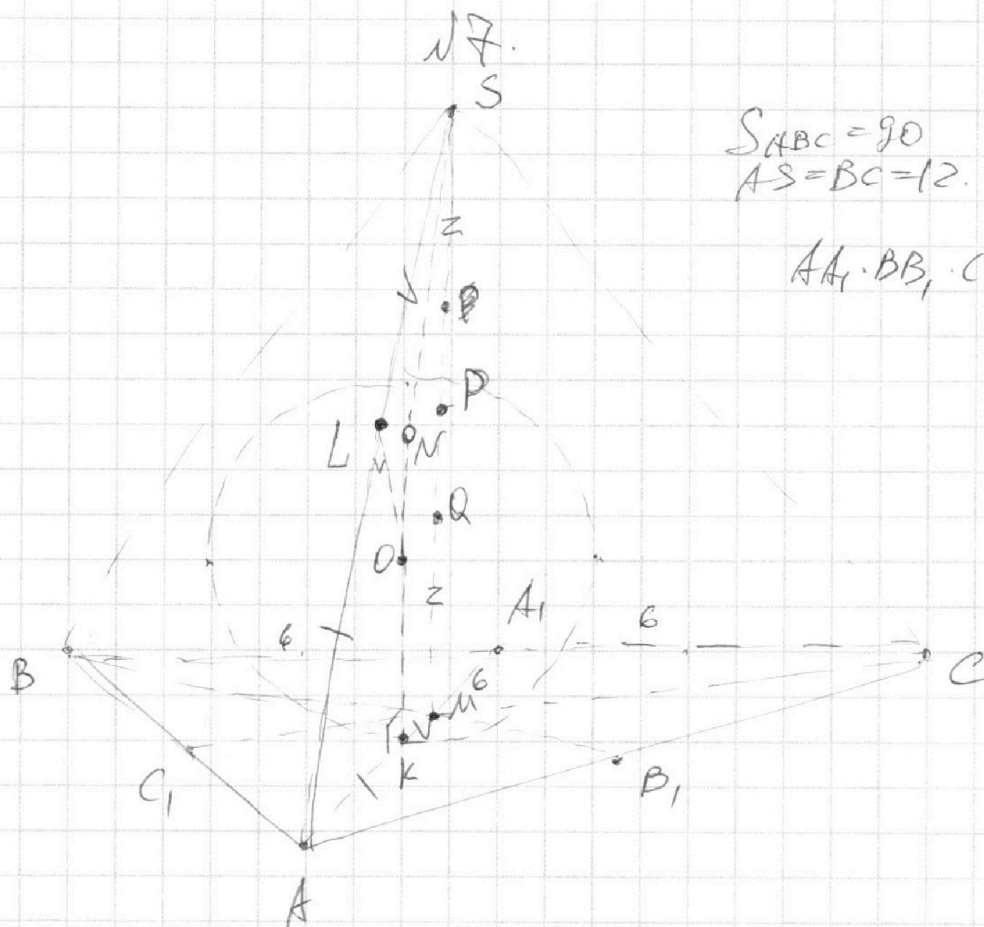
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 90$$

$$AS = BC = 12.$$

$AA_1, BB_1, CC_1 - ?$

O — центр сферы. $Ak = AL$ как ка отрезки кас.

$$\begin{cases} SL^2 = SP \cdot SQ \text{ (св-во кас. и хорды)} \\ MK^2 = MQ \cdot MP \end{cases}$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ(SP + PQ) = MQ(PQ + MQ) = MQ \cdot MP = MK^2$$

$$SL = MK$$

$$AS = AL + SL = Ak + MK = AM = 12.$$

$$\frac{AM}{Ak} = \frac{2}{1} \text{ (св-во угл.)} \Rightarrow AM = \frac{2}{3} AA_1 = 12, AA_1 = 18, Ak = 6.$$

$$Ak = 6; BA_1 = AC = \frac{12}{2} = 6.$$

$\triangle BMC$ — уг (по медиан.); $\angle BMC = 90^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BB_1 = 3a$, $CC_1 = 3b$. Тогда $BM = 2a$, $CM = 2b$
(из подобия).

$$\text{Тогда } S_{BMC} = \frac{2a \cdot 2b}{2} = ab.$$

Медианы AA_1 и BB_1 пересечения делят S на 3 равные,
значит, $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30 = ab$.

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 3b \cdot 3a = \underline{4860}.$$

б) $ON \perp (BSC) \Rightarrow ON \perp SN$;

$$\text{по т. Пиф.: } OS^2 = ON^2 + SN^2; OS^2 = 4^2 + 5^2 = 41;$$

$$OS = \sqrt{41}. \quad SL = SN = 4 \text{ (как кас.)}$$

$$\text{тогда } AL = 12 - 4 = 8 = AK; \quad KM = 12 - 8 = 4.$$

$$S_{ABC} = 90, \quad BC = 12, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h \rightarrow h = 15$$

(h — высота $\triangle ABC$ из $\text{т.т. } A$).

Ответ: а) 4860



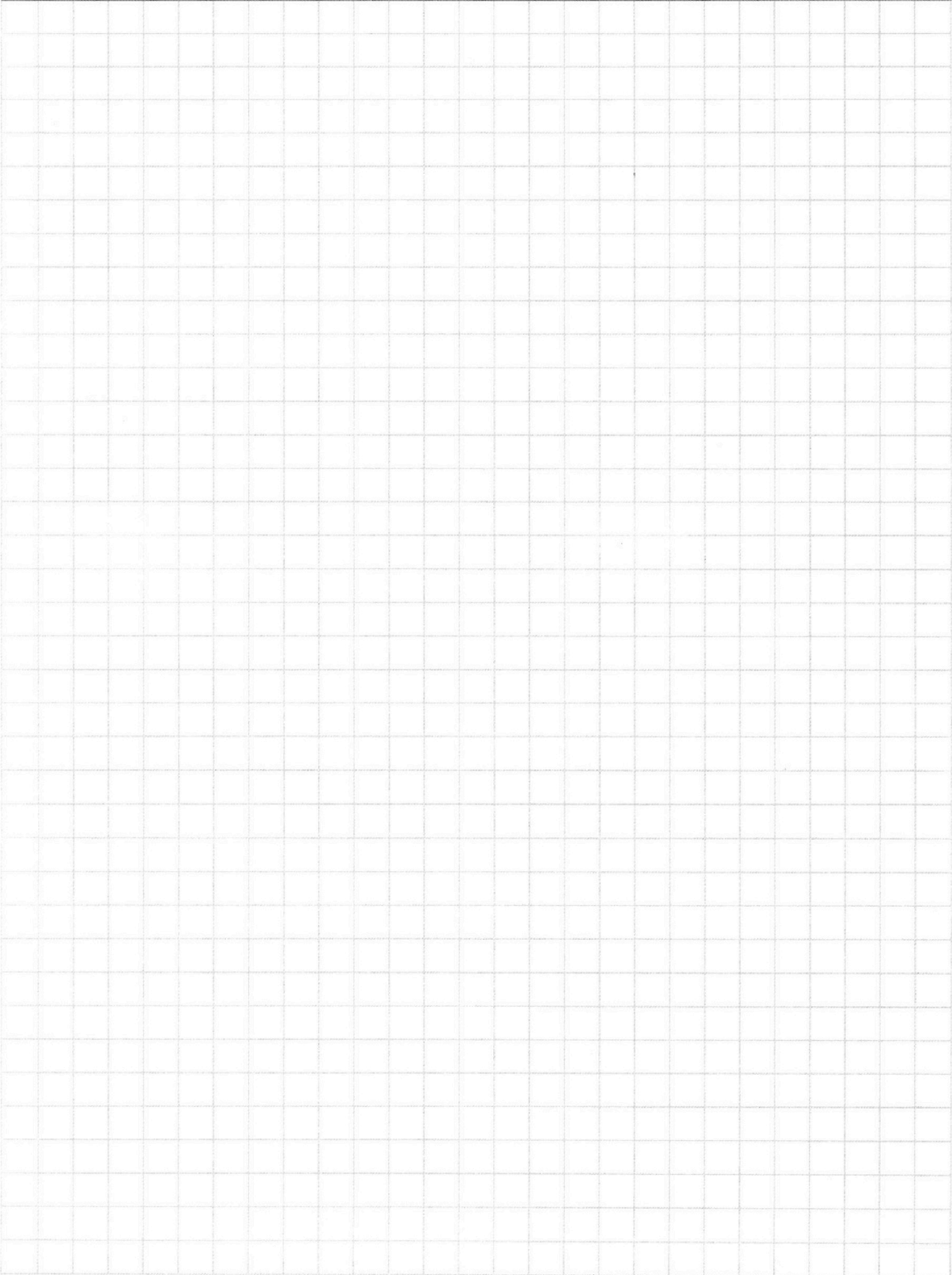
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





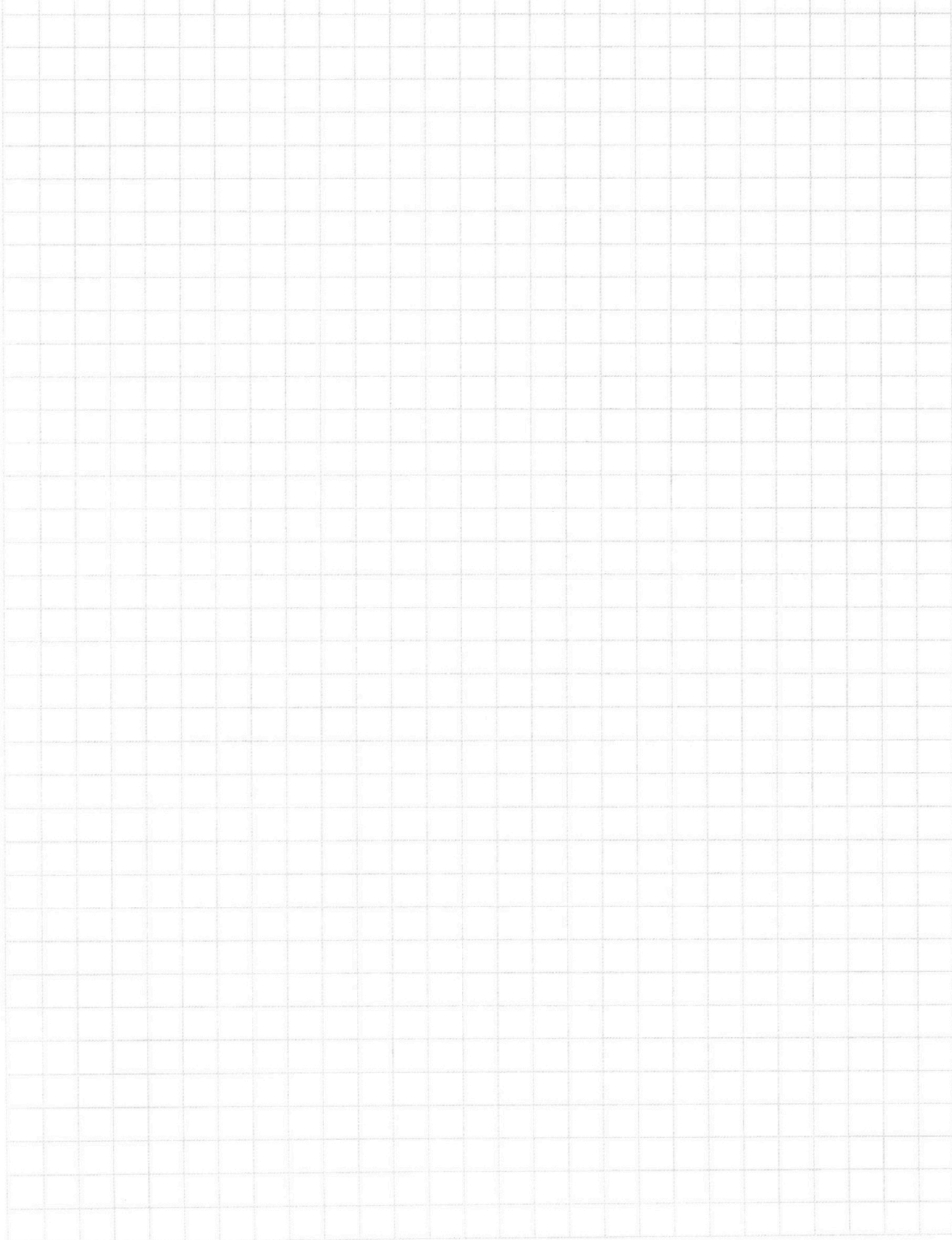
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



* Условие касаний:

$$ax + 2y - 3b = 0$$

1) $x_0, y_0 = (0, 0)$ $R = 3$

$$\rho = \frac{|a \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 3;$$

$$|3b| = 3\sqrt{a^2 + 4};$$

$$9b^2 = 9a^2 + 36.$$

2) $x_0, y_0 = (6, 0)$

$$\rho = \frac{|6a - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 2;$$

$$36a^2 + 9b^2 - 36ab = 4a^2 + 16.$$

$$9b^2 = -32a^2 + 36ab + 16.$$

$$\Downarrow$$
$$9a^2 + 3b = -32a^2 + 36ab + 16;$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

1) $(0, 0)$ $R = 3$ $\rho = \frac{|a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 3; C^2 = 9a_1^2 + 9b_1^2.$

2) $(6, 0)$ $R = 2$

$$\rho = \frac{|a_1 \cdot 6 + b_1 \cdot 0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 2;$$

$$2|c_1| = 3|6a_1 + c_1|.$$

$$\begin{cases} c_1 > 0 \\ a_1 < 0 \end{cases} \text{ при } 6a_1 + c_1 > 0.$$

$$2c_1 = 18a_1 + 3c_1;$$

$$c_1 = -18a_1.$$

$$\text{при } 6a_1 + c_1 < 0:$$

$$2c_1 = -18a_1 - 3c_1;$$

$$4c_1^2 = 9(36a_1^2 + 12a_1c_1 + c_1^2); \sum c_1 = 18a_1.$$

$$4c_1^2 = 324a_1^2 + 108a_1c_1 + 9c_1^2;$$

$$324a_1^2 + 108a_1c_1 + 5c_1^2 = 0. \text{ Зеро?}$$

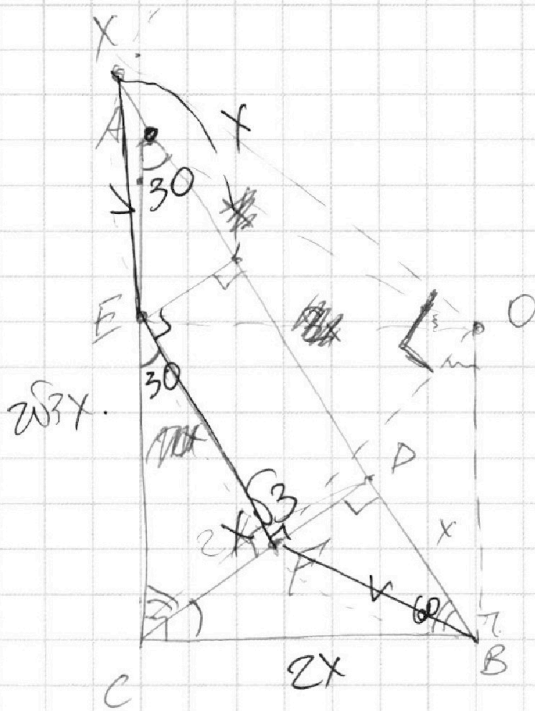
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EF \parallel AB \Rightarrow \angle A E = \angle B F$
 AE не годя!

$$CD^2 = 4x^2; CD = 2x.$$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$\triangle ABC \sim \triangle CDB$:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{CB}$$

$$AC^2 = 9x^2 + 4 = 13x^2. AC = x\sqrt{13}.$$

$$CB^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2, BC = x\sqrt{5}.$$

$$AB = 4x. CD = 2x. AC^2 = 9x^2 + 4x^2 = 13x^2. AC = x\sqrt{13}.$$

$$BC^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2. BC = x\sqrt{5}.$$

$$AC^2 + BC^2 = 13x^2 + 5x^2 = 18x^2$$

$$AC^2 = 16x^2 - 5x^2 = 11x^2. BC^2 = 5x^2. BC = x\sqrt{5}.$$

$$\text{Тогда } \frac{11x^2}{4x^2} = \frac{5x^2}{4x^2} \Rightarrow \frac{11}{4} = \frac{5}{4}$$

$$AC = \frac{8x\sqrt{5}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^5 z + 8 \log_3 z - 7 = 0 \\ \log_3^5 x + 8 \log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 0,9 \cdot 8 \cdot 4 \\ \hline 9,6 \\ 9 \cdot 7 \\ \hline 12,6 \\ \hline 22,2 \\ \hline 8,7 = \end{array}$$

(+) =

$$a^5 + a^5 + 8(a+b) = 0; \quad = 0,9 \cdot 8 \cdot 8$$

$$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$a = -b?$

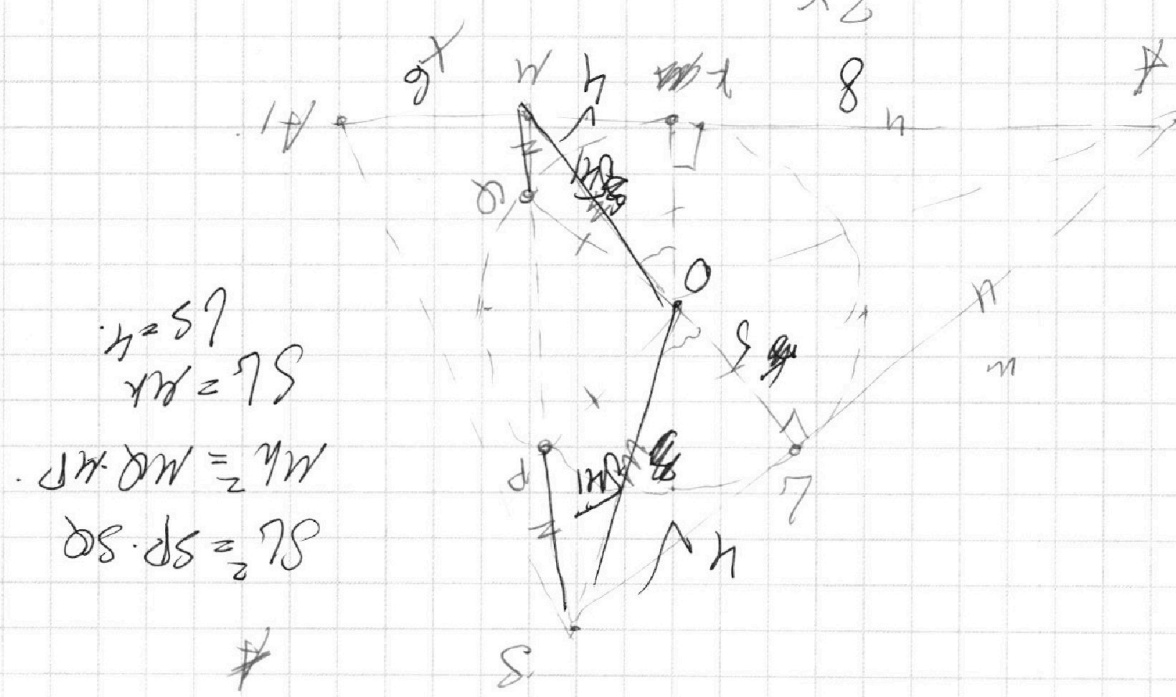
$$\log_3 x = -\log_3 5y;$$

$$\log_3 5xy = 0; \quad 5xy = 1; \quad (x,y) \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

$xy = \frac{1}{5}$. едется?

$$AS = \frac{3}{2} AA_1 \rightarrow AA_1 = 18$$

$$AM: m + V = \frac{3}{2} AA_1$$



$SL = PK$
 $ML = MQ$
 $SL = SP \cdot SQ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$N \neq 4$

$$ax + by \left\{ \begin{array}{l} ax + by - 36 = 0 \quad (I) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0 \quad (II) \end{array} \right.$$

$\frac{a}{b} \leq \frac{10}{8}$
4 рееш.

Все a : $\exists b$: 4 решения

$$II) 1) x^2 + y^2 = 9$$

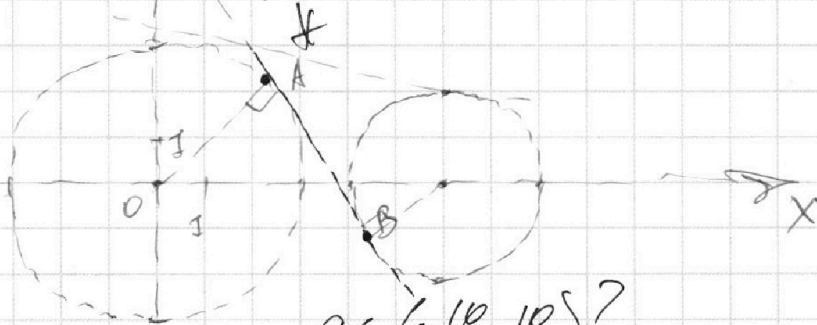
$$2) x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4; (x-6)^2 + y^2 = 4.$$

y

При $a \leq \frac{10}{8}$; 4 рееш.
нет.

При $a > \frac{10}{8}$; 4 рееш. нет

$a = -\frac{10}{8}$



$a \in (-\frac{10}{8}; \frac{10}{8})$?

$$I) \begin{cases} y = 36 - ax + 36 \\ y = -\frac{a}{2}x + 36 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8 & (1) \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y}^2 (3^{11}) - 8 & (2) \end{cases}$$

OD3: $x > 0$
 $x \neq 1$
 $y > 0$
 $y \neq 1$

$$\frac{12}{2 \log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} = \frac{7}{2 \log_3 x}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{3^5} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{2 \log_3 x} - 8 = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8; \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0; \quad 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{2}{32} - 8 + 7 \neq 0 \quad \text{не}$$

$$2) \quad 5y = 2. \quad \log_3^4 2 + \frac{2}{2 \log_3 2} = \frac{11}{2 \log_3 2} - 8$$

$$\log_3^4 2 - \frac{7}{2 \log_3 2} = -8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \cos x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = x + 5 \cos x \quad 2\pi = 6x; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

№1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$.

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, \quad ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

какие?

~~$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$~~ ; ? $a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$ ✓

~~$(abc)^2: 2^{21} 3^{22} 5^{33}$~~ ;

~~$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$~~ ;

~~$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{44} 5^{53}$~~ ;

$c^2: 2^{24} 3^{21} 5^{33}$?
 $b^2: 2^4 3^5 5^7$?
 $a^2: 2^{14} 3^{15} 5^{30}$

По 5: $\pi/2$ $\pi\pi/\pi\pi$
 $ab \rightarrow 5^{10}$
 $bc \rightarrow 5^{13}$ $\pi/\pi\pi$
 $ac \rightarrow 5^{30}$ $\pi/2$ $\pi\pi/\pi\pi$

$b^2 \rightarrow c \rightarrow \pi\pi \rightarrow a\pi\pi$ ✓
 $b-\pi\pi \rightarrow c \rightarrow \pi \rightarrow a \rightarrow \pi$ ✓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



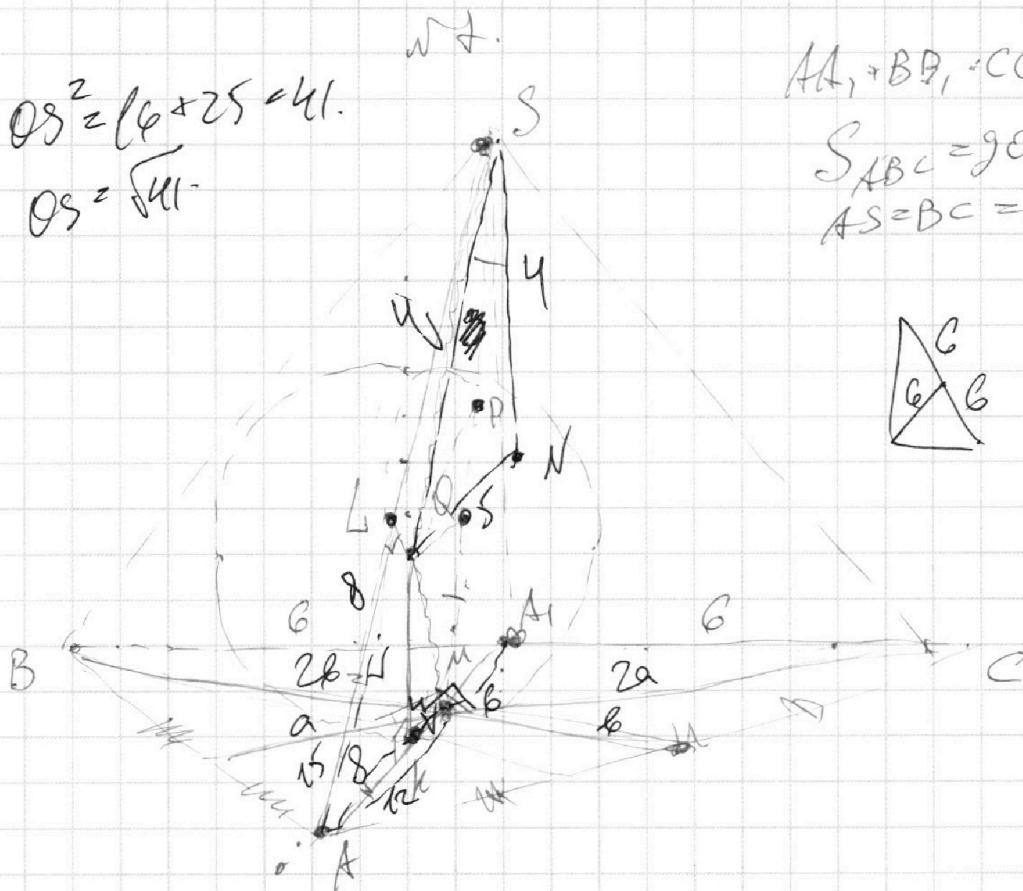
$$OS^2 = 16 + 25 = 41.$$

$$OS = \sqrt{41}.$$

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = ?$$

$$S_{ABC} = 90$$

$$AS = BC = 12.$$



$$Ak = Al$$

$$S_{ABC} = S_{BMC} + S_{AMC} + S_{ABM} =$$

$$= ab +$$



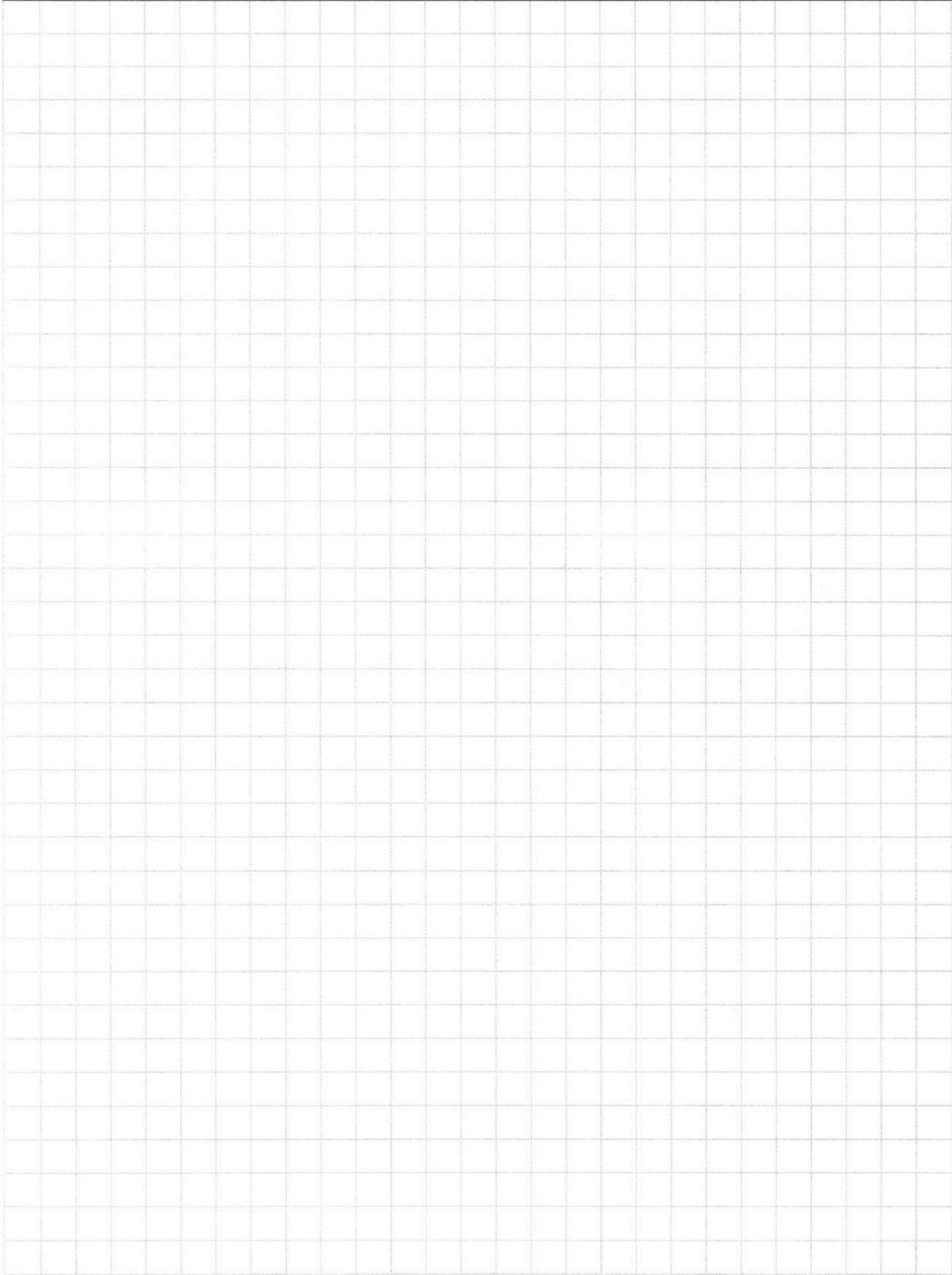
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



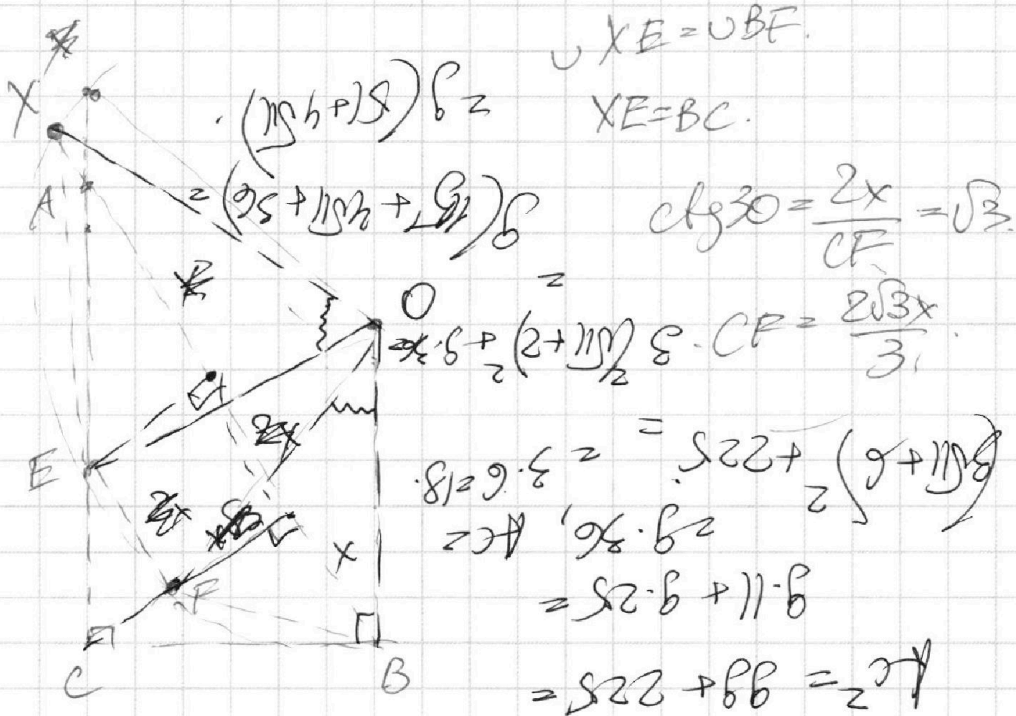
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

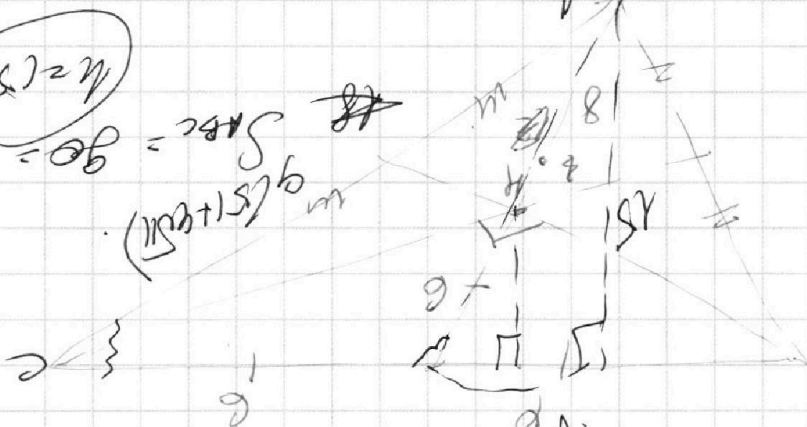


$18 \cdot 3 = 54 = 30 \cdot 9 = 18 \cdot 3 = 54$

$ab = 30$

$ab = \frac{30}{3} = 10$

$12 \cdot h = 24$
 $h = 2$
 $S_{ABC} = 90 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 6 \cdot h = 12$
 $h = 2$



$18 = 15^2 = 3 \cdot 33 = 12^2$
 $18 = 15^2 = 3 \cdot 33 = 12^2$
 $18 = 15^2 = 3 \cdot 33 = 12^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



кас. сверху и снизу.

$$\text{Ищем: } \begin{cases} a_1x + b_1y - 18a_1 = 0 \\ a_1x + b_1y - \frac{18a_1}{5} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{c}{18} \\ a_2 = -\frac{5c}{18} \end{cases}$$

$a_1 \neq a_{\text{вск}} < a_{\text{д}}$

$$a_1 = -\frac{5c}{18}$$

$$-\frac{c}{18} < -\frac{5c}{18}; \text{ что}$$

$$c < 5c \Rightarrow a_1 > a_2. \quad a_2 - \text{вск.}$$

$$-\frac{5c}{18}x + b_1y + c_1 = 0.$$

$$\text{кас. } ax + 2y - 36 = 0.$$

$$b_1 = 2$$

$$D = \left| -\frac{5c}{18} \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \right| = \frac{5c}{18}$$

$$\left| \frac{5c}{18} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \right| = 3 \cdot \sqrt{\left(\frac{5c}{18}\right)^2 + 4}$$

$$c_1^2 = 9 \cdot \left(\frac{5c}{18}\right)^2 + 36;$$

$$c_1^2 = \frac{25}{36} c^2 + 36?$$

$$\frac{11}{36} c^2 = 36? \quad c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}?$$

$$\text{Тогда } a = -\frac{5}{18} \cdot \frac{36}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

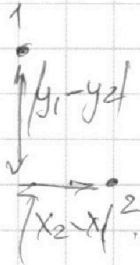
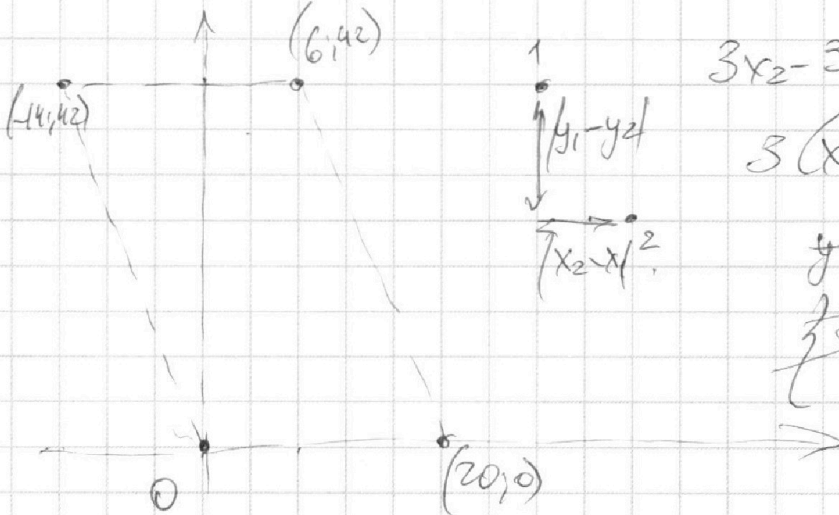
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш. №6



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

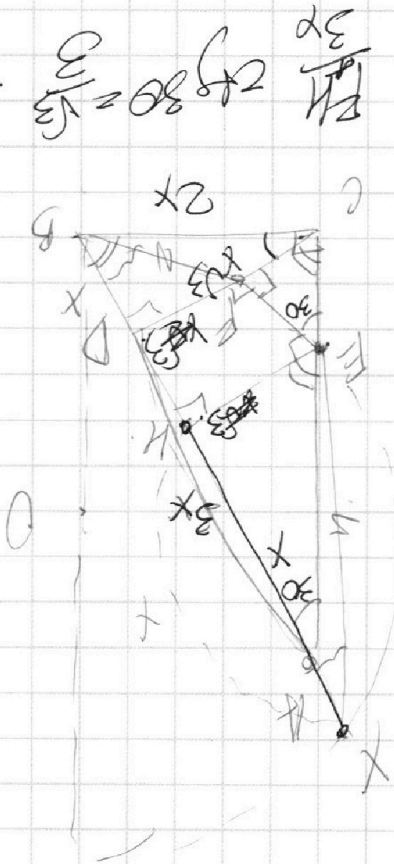
$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$y = kx + b$$

$$3y_1 + kx_1 + b$$

$$\begin{array}{r}
 3 \cdot 20 + k \cdot 0 + b = 33 \\
 3 \cdot 42 + k \cdot 6 + b = 33 \\
 \hline
 3 \cdot 42 + k \cdot 6 + b - (3 \cdot 20 + k \cdot 0 + b) = 33 - 33 \\
 3 \cdot 42 - 3 \cdot 20 + k \cdot 6 - k \cdot 0 + b - b = 0 \\
 3 \cdot (42 - 20) + k \cdot 6 = 0 \\
 3 \cdot 22 + k \cdot 6 = 0 \\
 66 + 6k = 0 \\
 6k = -66 \\
 k = -11
 \end{array}$$

$3x - 3x + y_2 - y_1 = 33$
 $y_2 - y_1 = 33$
 $42 - 20 = 22$
 $22 = 33$ (Incorrect)



$$ab = 30 \cdot 30 \cdot 8 = 7200$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

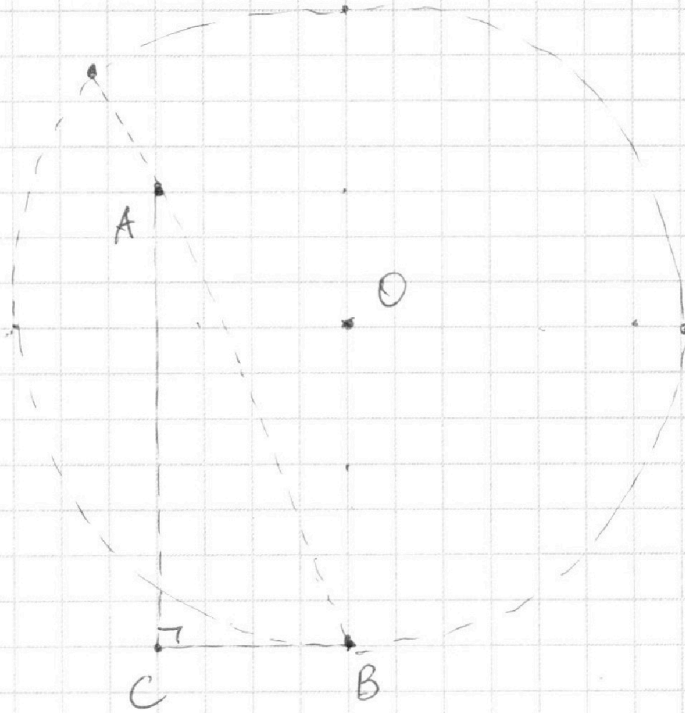
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N



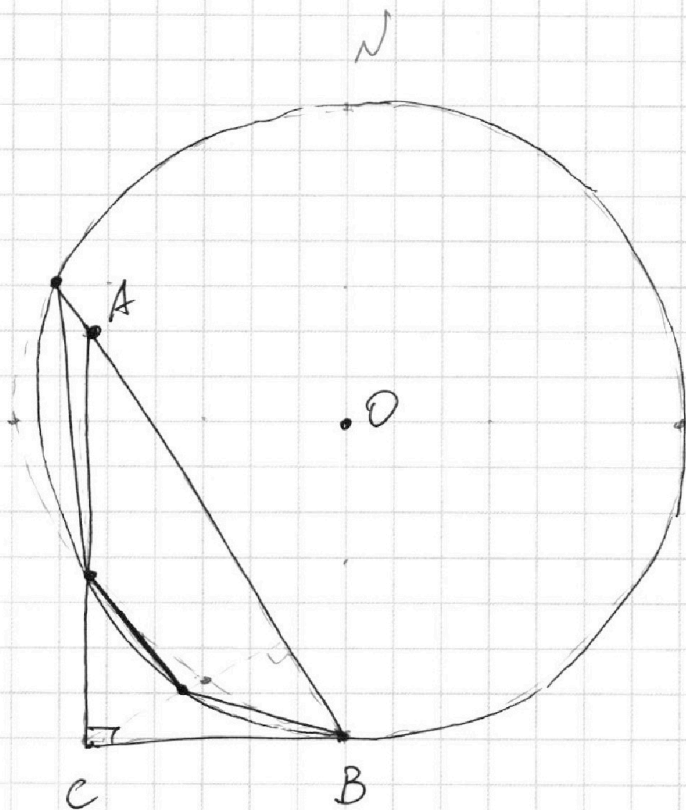
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№1~~ ~~№1~~ №1.

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$\neq \text{сн} \rightarrow \text{deg}(uvd)$$

подсчитать про кажи.

$$(abc)^2: 2^{42} 3^{41} 5^{53} \quad ?$$

$$:(ab)^2: c^2 = 2^{24} \cdot 3$$

$$a=2^8, \quad ab: 2^9 \quad bc: 2^{14} \quad ac: 2^{19}$$

Пусть все \mathbb{N} .

$$a, b, c \in \left(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \begin{cases} a+b=9 \\ b+c=14 \\ a+c=19 \end{cases}$$

$$abc = 21.$$

$$c = 12.$$

$$b = 2.$$

$$a = 7.$$

Для 3:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a+c=18 \\ b+c=14 \end{cases}$$

$$abc = \frac{41}{2} = 20.5 \rightarrow \frac{42}{2} = 21.$$

$$c=11 \quad b=2 \quad a=8.$$

Пусть с км.ка + 3 км.г.

$$abc = \frac{43}{2} = 21.5$$

$$2a + 2b + 2c = 41.$$

$$3 км.г., \quad b+c=14.$$

$$c=11$$

$$b=3$$

$$a=7.$$

$$a+b=10$$

$$a+c=19$$

$$b+c=14$$

Для 5:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=14 \rightarrow 14 \\ a+c=30 \end{cases}$$

$$abc = 27.$$

$$c=17$$

$$2(a+b+c) = 54.$$

$$abc = 27?$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=20 \\ a+c=30 \end{cases}$$

$$\rightarrow abc = 20 \cdot b = b+c=20.$$

каже бр 60. кадо +3.2.

$$\begin{cases} b=20 \\ c=20 \\ a=40 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{3} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 2.$$

$$\frac{2}{3}c_1 = 2\sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1}{3} = \sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1^2}{9} = \frac{25c_1^2}{18^2} + 16;$$

$$-16 = \frac{25c_1^2}{18^2} - \frac{36c_1^2}{18^2};$$

$$\frac{11c_1^2}{18^2} = 16;$$

$$c_1^2 = \frac{16 \cdot 18^2}{11}; \quad c_1 = \frac{4 \cdot 18}{\sqrt{11}};$$

$$c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}?$$

$$\text{Таким образом } c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}} \rightarrow a_1 = \frac{-10}{\sqrt{11}}.$$

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{18} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 3.$$

$$c_1^2 = 9 \left(\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4 \right);$$

$$c_1^2 = \frac{25c_1^2}{36} + 36$$

$$\frac{11c_1^2}{36} = 36 \quad c_1^2 = \frac{4 \cdot 36}{11} \quad c_1 = \frac{12}{\sqrt{11}}$$

$$c_1 = \frac{36}{\sqrt{11}}.$$

$$\frac{\left| -\frac{5c_1}{3} + c_1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{5c_1}{18}\right)^2 + 4}} = 2.$$

$$\frac{2}{3}c_1 = 2\sqrt{\quad};$$

$$\frac{c_1}{3} = \sqrt{\quad}; \quad \frac{c_1^2}{9} = 9(\quad).$$

$$\frac{c_1^2}{9} = \frac{25c_1^2}{18^2} + 4;$$

①



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

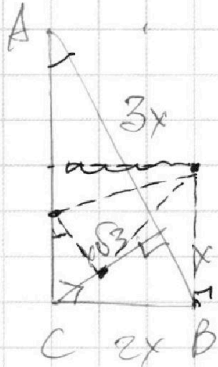
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$CX^2 = 3x \cdot x = 3x^2$$



$AB \parallel EF$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEFF}} = ?$

$$CX = x\sqrt{3}$$

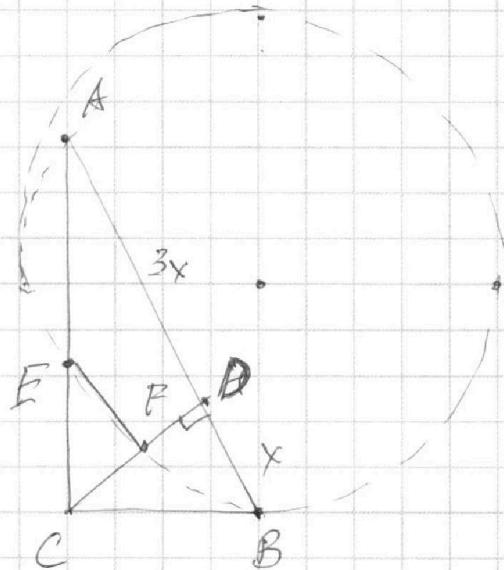
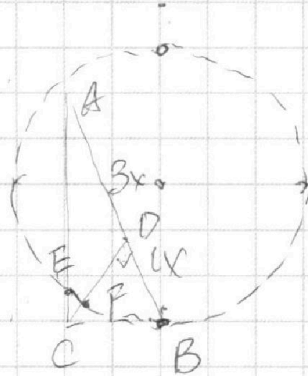
$$BC^2 = x \cdot 4x = 4x^2;$$

$$BC = 2x.$$

$$AC^2 = 3x \cdot 4x = 12x^2;$$

$$AC = 2\sqrt{3}x.$$

$$AC^2 + BC^2 = 16x^2 \quad (\checkmark)$$



$\triangle ABC \sim \triangle ECF$:

$$\frac{AB}{EC} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF}$$