МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

a, b, c - нат: $ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$

$bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$

$ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

Рассмотрим степень вхождения 3-ки в a, b и c

пусть в b она входит в 0 степени => в a хотя бы в 10 (из $ab \vdots 3^{10}$)

в c хотя бы в 13 ($bc \vdots 3^{13}$)

=> min степ вхождения 3 $0+10+13=23$

пусть в 1 степ => в a хотя бы в 9 ($10-1=9$ из $ab \vdots 3^{10}$)

в c хотя бы в 12 ($13-1=12$ из $bc \vdots 3^{13}$)

=> min степ вхождения 3 $1+9+12=22$

пусть во 2 степ => в a хотя бы в 8 ($10-2=8$ из $ab \vdots 3^{10}$)

в c хотя бы в 11 ($13-2=11$ из $bc \vdots 3^{13}$)

=> min степ вхожд 3 $2+8+11=21$

пусть в ≥ 3 степ => в a и c хотя бы в 18 (из $ac \vdots 3^{18}$)

=> степ вхожд $\geq 3+18=21$

=> min степень вхожд. 3 - 21

Рассмотрим степень вхождения 2

пусть в b она входит в 0 степени => в a хотя бы в 9 (из $ab \vdots 2^9$)

=> min степень вхожд 2: $0+9+14=23$ в c хотя бы в 14 (из $ac \vdots 2^{14}$)

пусть в 1 степени => в a хотя бы в 8 ($9-1=8$ из $ab \vdots 2^9$)

в c хотя бы в 13 ($14-1=13$ из $bc \vdots 2^{14}$)

=> min степень вхожд 2: $1+8+13=22$

пусть во 2 степени => в a хотя бы в 7 ($9-2=7$ из $ab \vdots 2^9$)

в c хотя бы в 12 ($14-2=12$ из $bc \vdots 2^{14}$)

=> min степень вхожд 2: $2+7+12=21$

пусть в ≥ 3 степени => в a и c хотя бы в 19 (из $ac \vdots 2^{19}$)

=> min степень вхожд $\geq 3+19=22$

=> min степень вхожд 2 - 21

min степень вхождения 5 в ac = 30 т.к $ac \vdots 5^{30}$ =>

для abc min ст. вхожд для 2 = 21 => $abc = 2^{21} 3^{21} \cdot 5^{30}$

для 3 = 21

для 5 = 30

Пример: $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$ $b = 2^2 \cdot 3^2$ $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$

=> $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$ac = 2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{30} \vdots 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

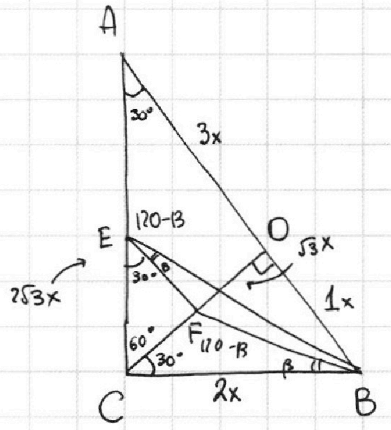
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 Чистовик



$AD:DB = 3:1$

CD - высота в пр.тр $\Rightarrow CD = \sqrt{AD\cdot DB} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$

в пр $\triangle DBC$ $CB^2 = DB^2 + DC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CB = 2x$

в пр $\triangle ADC$ $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 9x^2 + 3x^2 = 12x^2 = AC = 2\sqrt{3}x$

$\angle BAC = \angle FEC$ ($AB \parallel EF$)

$\angle BAC = \angle DCB$ ($\angle BAC + \angle ACD = 90°$ в $\triangle ADC$
$\Rightarrow$ $\angle DCB + \angle ACD = 90°$ в $\triangle ACB$)

$\angle BAC = \angle FEC = \angle DCB = \alpha$

в $\triangle DBC$ $\sin\alpha = \dfrac{DB}{CB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

CB - касат $\Rightarrow \angle FBC = \beta$ - угол между хордой FB и касат CB

$\angle FBC = \angle FEB$ ($\angle FEB$ опирается на хорду FB)

$\Rightarrow \angle FEB = \beta \Rightarrow$

$\angle AEB = 180 - \angle CEB = 180 - (30+\beta) = 120 - \beta$)

$\triangle CFB$: $\angle CFB = 180 - \angle FCB - \angle FBC = 180 - 30 - \beta = 120 - \beta$

$\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle AEB$ по 3ем углам: $\angle FCB = \angle EAB = 30°$
$\angle AEB = \angle CFB = 120-\beta$
$\Downarrow$
$\angle ABE = \angle FBC$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{4x}{2x} = 2$

пусть $EC = y \Rightarrow AE = AC - EC = 2\sqrt{3}x - y$

в $\triangle CEF$ $\cos 60 = \dfrac{CF}{EC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CF = \dfrac{EC}{2} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow$

$\dfrac{AE}{CF} = \dfrac{2\sqrt{3}x - y}{y/2} = 2 \Rightarrow$

$2\sqrt{3}x - y = y \Rightarrow 2\sqrt{3}x = 2y \Rightarrow y = \sqrt{3}x$ $\Rightarrow$

$EC = \sqrt{3}x \Rightarrow$
в $\triangle ECF$ $CF = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$
$EF = \dfrac{3}{2}x$

$S_{ABC} = \dfrac{CB\cdot AC}{2} = \dfrac{2x\cdot 2\sqrt{3}x}{2} = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{CEF} = \dfrac{CF\cdot EF}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}x^2$

$\Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \dfrac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2}$

$= \dfrac{16}{3}$

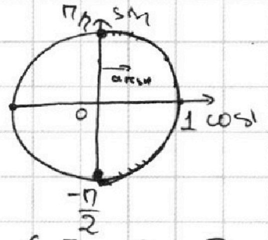
Ответ $\dfrac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3



$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

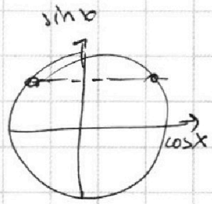
$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \quad | \sin$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

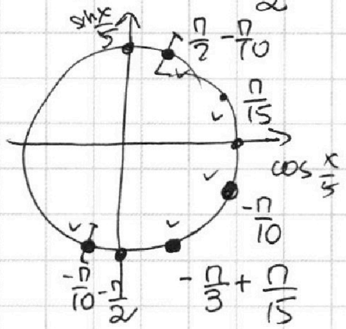
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$$



$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{6x}{5} = \frac{4}{10}\pi + 2\pi k \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4}{10}\pi + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \cancel{}\frac{5}{3}\pi k \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{5} = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{3} \\ \frac{x}{5} = -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{2} \end{array}\right.$$



$$x = -\frac{6\pi}{10} = -\frac{3\pi}{5}$$

$$x = -\frac{4\pi}{15}$$

$$x = -\frac{\pi}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{15}$$

$$x = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

~~$-\frac{\pi}{10}$~~ Проверка:

$$\frac{\pi}{15} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{10} - \frac{5}{10}$$

$$-\frac{9}{15} = -\frac{6}{10}$$

$$-90 = -90$$

$$\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{15} = \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$$

Ответ: $-\frac{3}{5}\pi$; $-\frac{4\pi}{15}$; $-\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{15}$; $\frac{2\pi}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

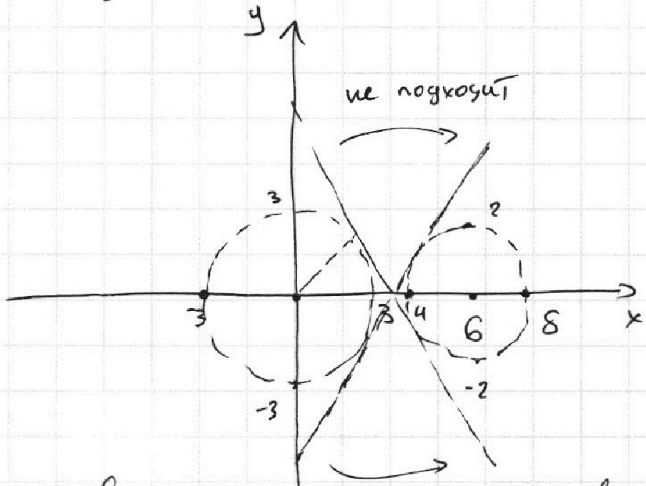
№4

1ая страница

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$x^2+y^2-9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=9=3^2$ ур-ие окружности

$x^2+y^2-12x+32=0 \Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2=4 \Leftrightarrow (x-6)^2+y^2=2^2$ ур-ие окр.

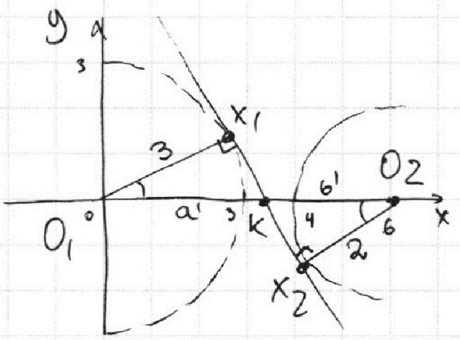


$ax+2y-3b=0$ ← прямая

$y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b$

↑ наклон

уравнение может иметь ровно 4 решения, когда прямая пересекает две окружности в 4 точках $\Rightarrow$ каждую окружность в 2ух точках



треугольники подобны $\Rightarrow$ ($\triangle O_1X_1K$ и $\triangle KO_2X_2$)

по 2 углам $\angle X_1KO_1=\angle O_2KX_2$ ↓ $\angle O_1X_1K=\angle KX_2O_2=90°$

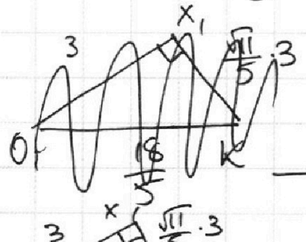
$\frac{O_1X_1}{O_2X_2}=\frac{a'}{b'}=\frac{3}{2} \Rightarrow a'=\frac{3}{2}b'$

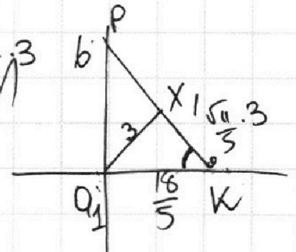
$a'+b'=6$

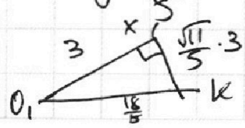
$\frac{5}{2}b'=6 \Rightarrow b'=\frac{12}{5} \Rightarrow a'=\frac{18}{5}$

$\Rightarrow$ прямая проходит через точку $(\frac{18}{5},0) \Rightarrow$

$0=-\frac{a}{2}\cdot\frac{18}{5}+\frac{3}{2}b \Rightarrow \frac{18}{10}a=\frac{3}{2}b \Rightarrow a=\frac{15}{18}b$







по 2ум углам

$\angle PO_1K=\angle O_1X_1K=90°$, $\angle PKO_1$ - общ

$\triangle PKO_1 \sim \triangle X_1KO_1 \Rightarrow$

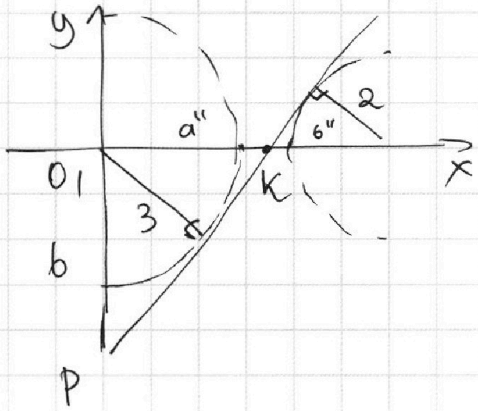
$\frac{PO_1}{O_1K}=\frac{X_1K}{X_1O_1} \Rightarrow$

$\frac{\cancel{5b}}{\cancel{18}}=\cancel{\frac{\sqrt{11}\cdot 3}{5 \cdot 3}}=\frac{\sqrt{11}}{5}$

$\cancel{b=\frac{18\sqrt{11}}{25}} \Rightarrow a=\frac{15}{18}\cdot\frac{18}{25}\sqrt{11}=\frac{3\sqrt{11}}{5}$

№4

2ая страница

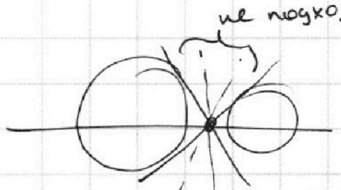


аналогично $a'' = \frac{18}{5}$ $b'' = \frac{12}{5}$
(картинка симметрична относительно оси OX)

$\Rightarrow$ $b = \frac{-18}{\sqrt{11}} \Rightarrow$

$a = -\frac{15}{\sqrt{11}}$

$\Rightarrow$ не подходят прямые между касательными
т.к могут пересечь max одну окружность



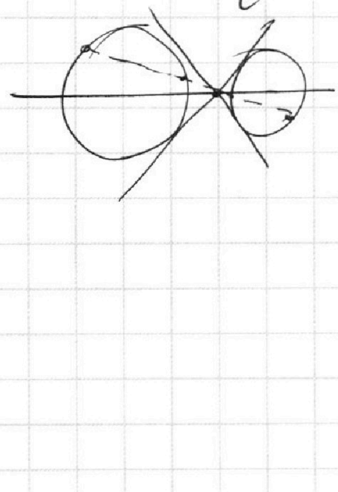
для них $a \in \left(-\frac{15}{\sqrt{11}}; \frac{15}{\sqrt{11}}\right)$ $a \in \left[\frac{15}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$ $a \in \left(-\infty; -\frac{15}{\sqrt{11}}\right]$

Ответ: $\left(-\frac{18}{\sqrt{11}}; \frac{18}{\sqrt{11}}\right)$

все оставшиеся подходят

$* \quad \frac{5b}{18} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow b = \frac{18}{\sqrt{11}}$

$a = \frac{15}{18} b = \frac{15}{18} \cdot \frac{18}{\sqrt{11}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2ая страница

$\cancel{(a^2+b^2)(a-b)ab}$

$\cancel{a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4} \quad \cancel{| : b^5}$

$\cancel{\frac{a^4}{b^4} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = t^4 - t^3 + t^2 - t = t^3(t-1) + t(t-1)}$

$\cancel{= t(t^2+1)(t-1)}$

рассмотрим уравнение $t^4 + 8 + \frac{7}{2}\frac{1}{t} = 0$

для него $\log_3 x$ и $-\log_3 5y$ являются корнями

$\Rightarrow$ т.к. $\cancel{\log_3 x \text{ и } \log_3 5y \neq 0 \ (8 \neq 0)} \Leftrightarrow$

$\log_3 x$ и $-\log_3 5y$ являются корнями $t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$

заметим, что при $t \geq 0$ $t^5 \geq 0$, $8t \geq 0$, $\frac{7}{2} > 0 \Rightarrow$

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} > 0 \Rightarrow$ не является корнем $\Rightarrow$

$\begin{cases} \log_3 x < 0 \\ -\log_3 5y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 5y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} \log_3 x < \log_3 1 \\ \log_3 5y > \log \end{cases}}$

пусть $\log_3 5y = a$ $\log_3 x = b \Rightarrow$

$b < 0$, $a > 0$

перепишем ~~второе~~ II вар через a и b

$2(a^2+b^2)(a-b)\cdot a\cdot b - 7 = 0 \Rightarrow$

$(a^2+b^2)(a-b)\cdot a \cdot b = \frac{7}{2}$, но

$a^2+b^2 > 0$ т.к. $\begin{cases} a^2 > 0 \\ b^2 > 0 \end{cases}$

$a - b > 0$ т.к. $\begin{cases} a > 0 \\ -b > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $(a^2+b^2)(a-b)\cdot a \cdot b < 0 \Rightarrow$

$a > 0$
$b < 0$

не может быть равно $\frac{7}{2} \Rightarrow$

этот вариант не имеет решений $\Rightarrow$

только I вар

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5 1ая страница

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 = 0 \\ \log_3^4 (5y) + 8 + 2\log_{(5y)} 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2}\log_x 3 = 0 \quad (1) \\ \log_3^4 (5y) + 8 - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \cancel{\log_3}$$

~~для уравнения~~ $\cancel{t^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{t} + 8 = 0}$ ~~$\log_3 x$ и $-\log_3 5y$ - являются корнями~~

$\cancel{\begin{cases} t \neq 0 \\ t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}}$ ~~по теореме Виета произведение корней = $-\frac{7}{2}$~~

(2-1)

$$\log_3^4(5y) - \log_3^4 x - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{\log_3 5y} + \frac{1}{\log_3 x}\right) = 0$$

$$(\log_3^2(5y) + \log_3^2 x)(\log_3(5y) + \log_3 x)(\log_3(5y) - \log_3 x) - \frac{7}{2}\cdot\frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 5y \cdot \log_3 x}$$

$$(\log_3 5y + \log_3 x)\left((\log_3^2(5y) + \log_3^2 x)(\log_3 5y - \log_3 x) - \frac{7}{2(\log_3 5y \cdot \log_3 x)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 5y \cdot x = 0 = \log_3 1 \\ 2(\log_3^2 5y + \log_3^2 x)(\log_3 5y - \log_3 x)\log_3 5y \cdot \log_3 x - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \\ \log_3 5y \neq 0 \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases}$$

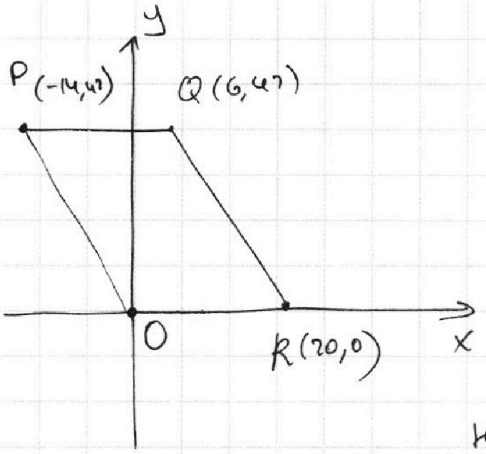
I вар:

$5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$

II вар $\log_3 5y = a$ $\log_3 x = b \Rightarrow (a^2 + b^2)(a-b)ab - \frac{7}{2} = 0$

$a \neq 0$ $b \neq 0$

№6



для точек $A(x_1 y_1)$ $B(x_2 y_2)$:

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

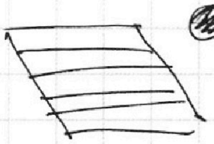
① пусть $y_1 = y_2 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) = 33 \Rightarrow$
$x_2 - x_1 = 11$ x_1 11 x_2 $\Rightarrow$
на отрезке OR найдется 10 таких пар (0,0) и (11,0) ... (9,0) и (20,0)

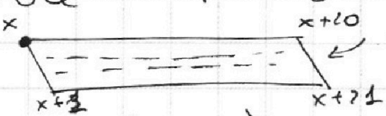
Прямая PO пересекает 15 целочисленных точек

и y-целое

для прямой PO: $y = -3x \Rightarrow$ если x-целое $\Rightarrow y \,\vdots\, 3 \Rightarrow$
от 0 до 42 15 чисел $\vdots\, 3 \Rightarrow$ для каждой из таких точек можно построить прямую // OX для которой будет 10 подходящих пар $\Rightarrow$ всех $15 \cdot 10 = 150$ пар.

$\Rightarrow$ все секторы идентичны (всего 14)





для двух прямых // OX еще по 9 пар $\Rightarrow$ всего $2 \cdot 9 \cdot 14 = 252$ пары

пусть $y_2 - y_1 \neq 0 \Rightarrow \underset{\vdots 3}{3(x_2 - x_1)} + y_2 - y_1 = \underset{\vdots 3}{33} \Rightarrow y_2 - y_1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow$
$y_2 - y_1$ может быть $\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \ldots \pm 39, \pm 42$ (max $y_2 - y_1 = 42$)

~~$\Rightarrow$ если y_2 находится на одной из прямых // OX из ① $\Rightarrow$ y_1 тоже находится на одной из таких прямых~~

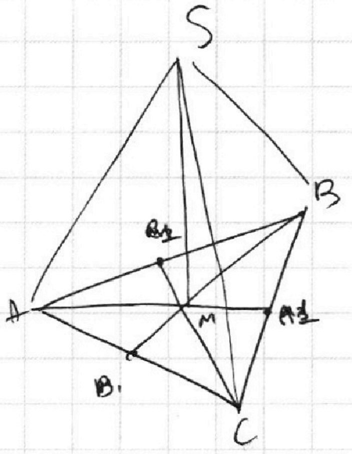
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

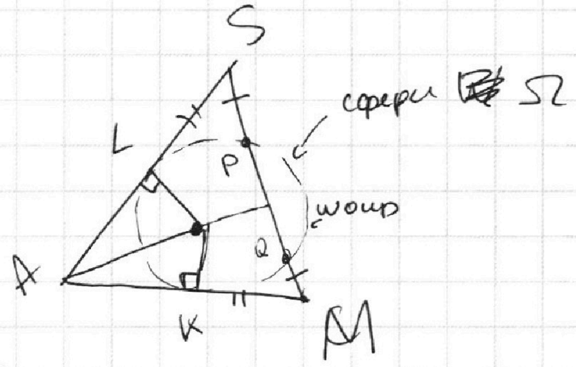
1 2 3 4 5 6 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N7





$S_{ABC}=90$

$SA=BC=12$

степень точки M отн окр W : $MQ\cdot MP=MK^2$

степень точки S отн окр W : $SP\cdot SQ=SL^2$

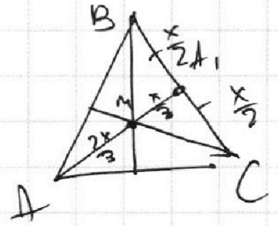
$SP=MQ \Rightarrow SP+PQ=MQ+PQ \Rightarrow SQ=MP \Rightarrow$

$MQ\cdot MP=SP\cdot SQ \Rightarrow MK^2=SL^2 \Rightarrow MK=SL$

$AK=AL$ (отр. касат) $\Rightarrow AK+KM=AL+LS \Rightarrow$

$AM=AS \Rightarrow$

$AM=BC=x$



медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1

$\Rightarrow MA_1=\frac{x}{3}$, $A_1C=\frac{x}{2} \Rightarrow$

$AC=6$, $MA_1=4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c

Черновик

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$

$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$

$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

abc   ac $\boxed{b}$

$3^{18} 5^{30} 2^{19}$ ac

3^{13} 3^{13} 3^{10}

$3^4 \cdot 3^9$

$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$ $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$

$3^{18} 5^{30} 2^{19} \cdot 3^3 2^2$

$3^6 3^4$ ac 3^{18} 26 18

$3^{21} 5^{30} 2^{21}$

8

$3^8 3^2$ $3^3 3^{10}$

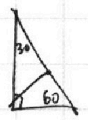
$a\ 5^{20\ 10\ 1}$

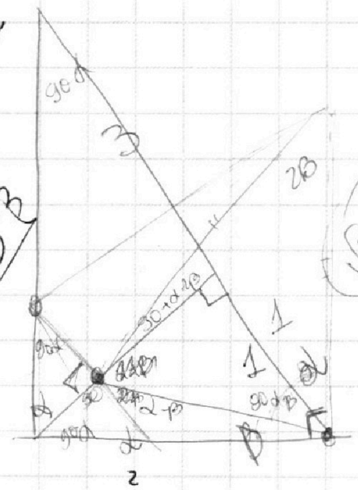
$c\ 5^{19}$

$3^2 3^8$ $3^2 3^{11}$ 3^3 2^2

2^2 2^7

2^2 2^{12}

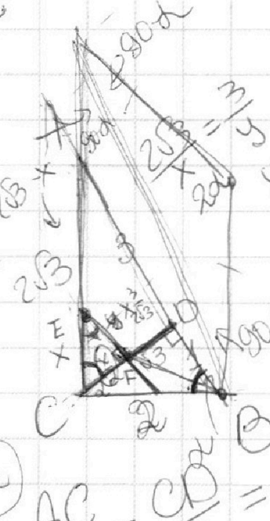




$2\sqrt{3}$

81

$3^3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$



$\sqrt{3} - \frac{x}{2}$

$\frac{2\sqrt{3}}{x} = \frac{3}{y}$ $y = x \frac{3}{2\sqrt{3}}$ $\frac{x \frac{3}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2}$

360

$3 + \frac{x^2}{4} - \sqrt{3}x + 1$ $4 + \frac{x^2}{4} - \sqrt{3}x$

$\frac{x^2}{4} + 4 - \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

1 3

3 9 12 4·3

$\frac{x}{2}$ 2

$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{x} = \frac{3x}{CD} = \frac{EF}{CF}$

$CD = \sqrt{3}x$

$x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{3}{4}$

$\frac{x \frac{3}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2}$

$\frac{x^2}{2\sqrt{3}x} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{3} - \frac{x}{2}}$

x^2 $1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$1 \cdot \frac{3}{4}$

$\frac{x}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

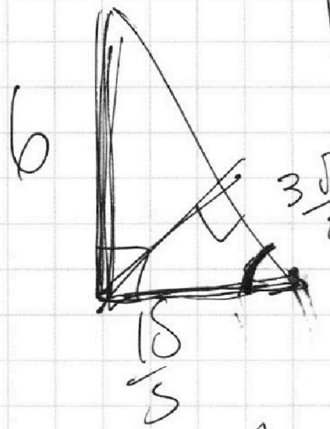
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{86}{18}=\frac{3\cdot 5}{3\sqrt{11}}$$

$$b=\frac{18}{5\sqrt{11}}$$



$\frac{6}{3:2}$

$a:6=3:2$

$\frac{3}{2}$

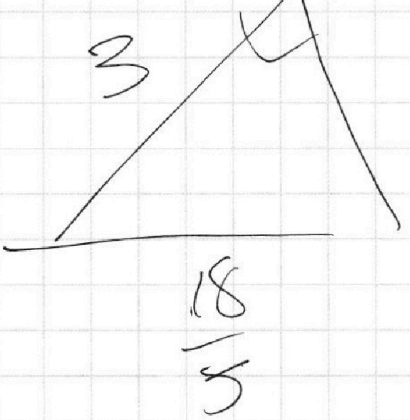
$a=\frac{3}{2}b$

$\frac{3}{2}b=6$

$b=\frac{12}{5}$

$a=\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{5}$

$\frac{18}{5}$



$\frac{374}{25}$

$\frac{9\cdot 25}{50}$

$\frac{275}{99}$

$11\cdot 9$

$\frac{3\sqrt{11}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2(a^7+b^7)(a-b)ab-7=0$

$a^7+b^7(a-b)ab=\frac{7}{2}$

$t^4+8+\frac{7}{t}=0$

$t^5+8t+7=0$

$t<0$

$\log_8 x<0$

$0<x<1$

$\log_3 5y>0$

$5y>1$

$y>\frac{1}{5}$

$9+\frac{11\cdot 9}{25}$

$\cdot 25$

$25\times 9=225$

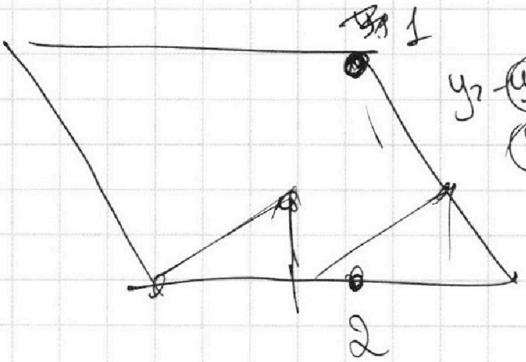
$99+$

$225+99=324$

$18\times 18=144$

$144+18=$

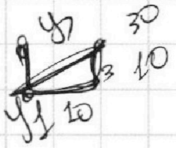
37



$y_7-y_1=-42$

42

y_7-y_1 3



42

$33+42$

75

25

39

72

24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2}\log_{x} 7^3 = 0$

$\log_3^4(5y) + 8 - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 = 0$

$t^5 + 8t - \frac{7}{2} = 0$ $\quad \log_3(5y)$ $\quad \boxed{-\log_3 x}$

$\cancel{t^4 + 8 - \frac{7}{2t}}$

$2t^5 + 16t - 7 = 0$

попоп

$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

$x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = \frac{7}{2}$

$x_1 x_2 x_3 x_4 + \ldots\ldots = 16$

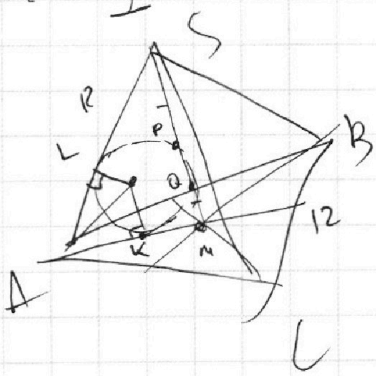
$\cancel{x_1 x_2}$ $\quad +4$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$\log_3 \frac{5y_1}{x_1 x_2} = 0 = \log_3 1$

$y_1 \ldots = x_1 \ldots x_2$

$5y_1 y_2 \ldots 5x_1 x_2 = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

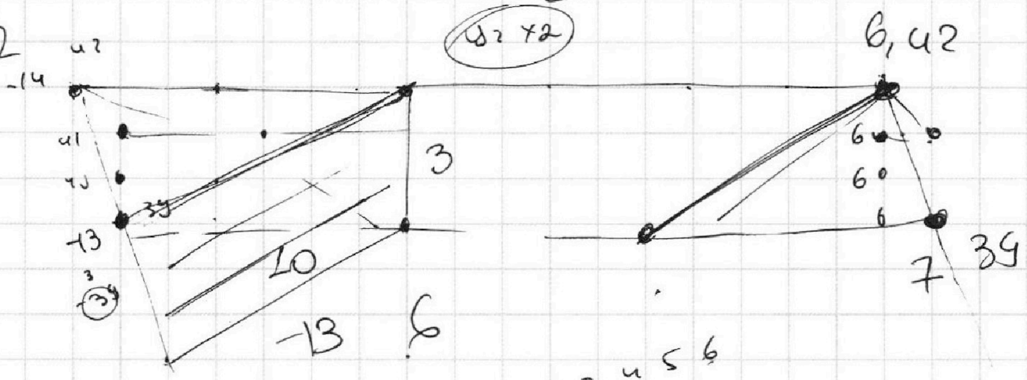
0 9 11 20

0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39 40

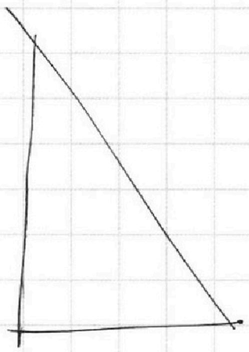
280 -28
260
252

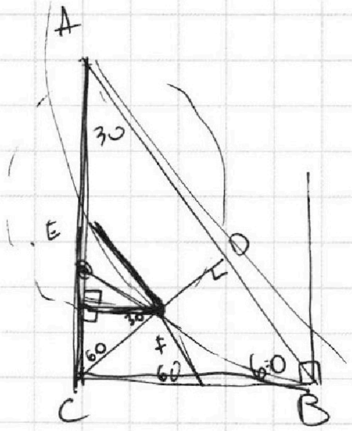
30
-10

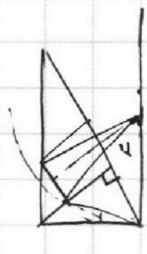
42 42

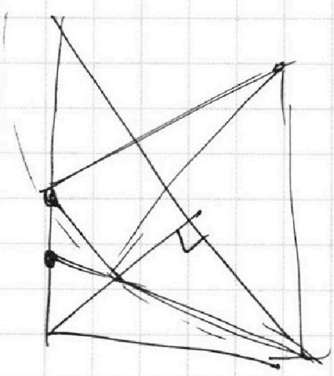


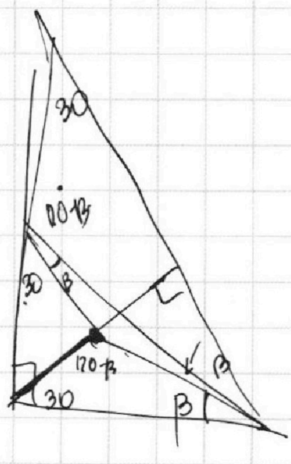
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6
-2











На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

a, b, c - нат : $ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$
$bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$ $\Rightarrow$ $ac \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30}$ $\Rightarrow$ $abc \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$
$ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$\Rightarrow$ min степень вхождения 2ки в abc это 19, 3ки это 18, 5ки это 30

пусть степень вхождения 3 в b ≤ 2 $\Rightarrow$ в a она должна быть хотя бы $10 - 2 = 8$ (из $ab \vdots 3^{10}$) в c она должна быть хотя бы $13 - 2 = 11$ (из $bc \vdots 2^{14}$) $\Rightarrow$ в ac хотя бы $11 + 8 = 19 > 18$ $\Rightarrow$

пусть степень вхождения 3 в b > 2 $\Rightarrow$

abc

$\boxed{2^{19} 3^{18} 5^{30}}$

3^{10} 3^{13}

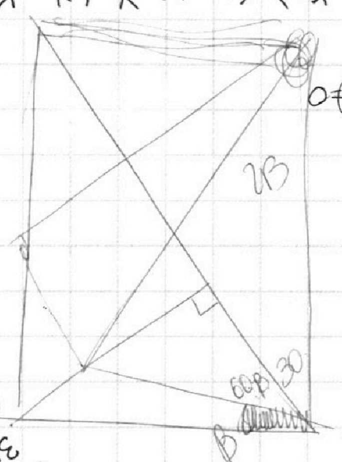
0 $10 + 13$ 25

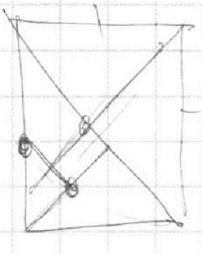
1 $\boxed{9 + 12} = \boxed{22} > 18$

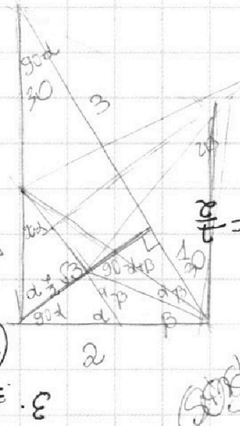
2 $\boxed{8 + 11}$ $\boxed{21}$

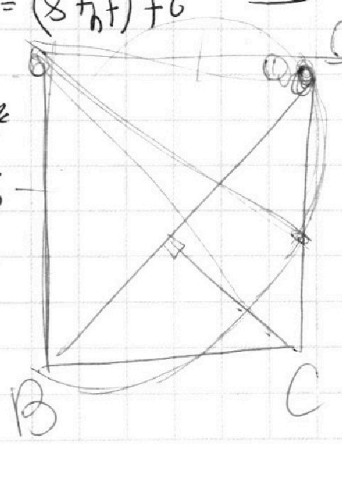
3 7 10 17 $\boxed{21}$

18









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ax+2y-36=0$

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$

$x^2+y^2=9 \qquad x^2-12x+36+y^2-4$

$(x-6)^2+y^2=4$

$2(a^2+b^2)(a-b)ab-7=0$

$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)ab$

$a^4b-a^3b^2+a^2b^3-ab^4=\frac{7}{2}$

$a^4b-a^3b^2+a^2b^3-ab^4-\frac{7}{2}$

$\log_3^2(54)+\log_3^2 x\,(\ldots)-\frac{7}{2}\cdot\frac{\log_3 x+\log_3 54}{\log_3 \ldots}=0$

$\log_3^4(54)-\log_3^4 x-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{\log_3 54}+\frac{1}{\log_3 x}\right)$

$\log_3^5 m+8\log_3 m+\frac{7}{2}=0$

$\log_3 x\cdot\log_3 54=\frac{7}{2}$

$-\log_3 x\cdot\log_3 54=-\frac{7}{2}$

$\sin(30+60)=$

$2\sin 30\cdot\cos 60$

$-\log_3 54 \qquad 54>1$

$\log_3 x$

$x<1$

$\sin(\alpha+\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin(\alpha+b)=$

$2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin\alpha+\sin b$

$\cos(\alpha-\beta)$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha$

$\cos x=\sin(90-x)$

$\cos x=$

$\frac{\pi}{2}-\alpha$