



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим максимальные степени двойки, на которые делятся числа a, b, c за x, y, z соответственно (т.е. числа a, b, c можно записать как $2^x \cdot n, 2^y \cdot m, 2^z \cdot k$, где n, m, k — нечётные натуральные числа). Из условия: $x+y \geq 9, y+z \geq 14, x+z \geq 19$, в противном случае одно из условий ^{двойки} выполняться не будет. Пусть наибольшая степень, на которую делится число $a \cdot b \cdot c$ — число S_2 ($S_2 \in \mathbb{N}$). Тогда $S_2 = x+y+z \geq \frac{1}{2}(2x+2y+2z) = \frac{1}{2}((x+y)+(y+z)+(x+z)) \geq \frac{1}{2}(9+14+19) = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$. Поскольку $S_2 \geq 21$, то $(S_2)_{\min} = 21$. Поступим аналогично для чисел 3 и 5: $S_3 \geq \frac{1}{2}(10+13+18) = \frac{1}{2} \cdot 41 = 20,5$. Поскольку $S_3 \geq 20,5$ и $S_3 \in \mathbb{N}$, то $(S_3)_{\min} = 21$. $S_5 \geq \frac{1}{2}(10+13+30) = \frac{1}{2} \cdot 53 = 26,5$. Поскольку $S_5 \geq 26,5$ и $S_5 \in \mathbb{N}$, то $(S_5)_{\min} = 27$. Заметим, что в минимально возможном ²⁰ числе $a \cdot b \cdot c$ нет простых делителей, отличных 2, 3, 5, а иначе их можно было бы отбросить, поскольку они не влияют на делимость из условия. Итак, $(a \cdot b \cdot c)_{\min} = 2^{S_2} \cdot 3^{S_3} \cdot 5^{S_5} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

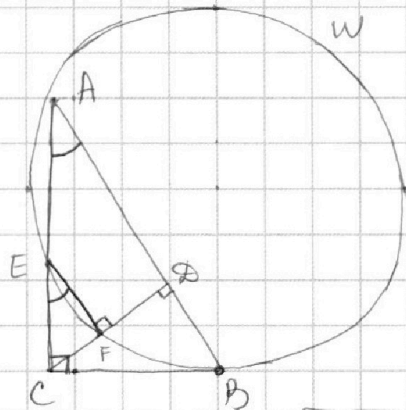
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
ω касается BC в т. B,
CD ⊥ AB, ω ∩ CD = F,
ω ∩ AC = E, AB ∥ EF,
AD : DB = 3 : 1

Найти:
 $S_{ABC} : S_{CEF} = ?$

Решение:



Введём обозначения: $AD = 3x$, $BD = x$. $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{3x \cdot x} = x\sqrt{3}$ (как
высота в прямоугол. тр-ке, проведённая к гипотенузе). По т-ме Пифагора

в $\triangle CDB$: $CB^2 = CD^2 + BD^2 = (x\sqrt{3})^2 + x^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CB = 2x$. Тогда

$\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 60^\circ$; $\angle A = 90^\circ - \angle B = 30^\circ$; $\angle CEF = \angle CAD = 30^\circ$

(как соответственные). По т-ме о квадрате касательной:

$BC^2 = CE \cdot CA$. И.к. $AC = AB \cdot \cos \angle A = AB \cos 30^\circ = 4x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{3}$, то

$CE = \frac{BC^2}{CA} = \frac{(2x)^2}{2x\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}x$. $CF = CE \cdot \sin \angle CEF = CE \cdot \sin 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x$,

$\text{и } EF = CE \cdot \cos \angle CEF = CE \cdot \cos 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$; $S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}x \cdot x = \frac{x^2}{2\sqrt{3}}$.

Тогда $S_{ABC} : S_{CEF} = 2x^2\sqrt{3} : \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}x^2 \cdot 2\sqrt{3}}{x^2} = (2\sqrt{3})^2 = 12$.

Ответ: 12

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что поскольку $E(\arcsin(\cos x)) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то
 $-\frac{5\pi}{2} \leq 5\arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$ или, по условию, $-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{6\pi}{2} \leq x \leq \frac{4\pi}{2} \Leftrightarrow -3\pi \leq x \leq 2\pi$. Рассмотрим 5 случаев.

①. $-3\pi \leq x \leq -2\pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin(x + \frac{5\pi}{2}) =$
 $= \sin x \cos \frac{5\pi}{2} + \cos x \sin \frac{5\pi}{2} = \cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin(\sin(x + \frac{5\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5(x + \frac{5\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = -24\pi \Leftrightarrow x = -3\pi$, $-3\pi \leq -3\pi \leq -2\pi$ — подходит.

②. $-2\pi \leq x \leq -\pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{3\pi}{2} +$
 $+ \cos x \sin \frac{3\pi}{2} = -\cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin(-\sin(x + \frac{3\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -5(x + \frac{3\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 6x = -8\pi \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}\pi$, $-2\pi \leq -\frac{4}{3}\pi \leq -\pi$ — подходит.

③. $-\pi \leq x \leq 0$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} =$
 $= \cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5(x + \frac{\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = -2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$, $-\pi \leq -\frac{\pi}{2} \leq 0$ — подходит.

④. $0 \leq x \leq \pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2} =$
 $= -\cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin(\sin(x - \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -5(x - \frac{\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 6x = 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$, $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi$ — подходит.

⑤. $\pi \leq x \leq 2\pi$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, а т.к. $\sin(x - \frac{3\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{3\pi}{2} - \cos x \sin \frac{3\pi}{2} =$
 $= \cos x$, то $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5\arcsin(\sin(x - \frac{3\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5(x - \frac{3\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = 8\pi \Leftrightarrow x = 2\pi$, $\pi \leq 2\pi \leq 2\pi$ — подходит.

Ответ: $x \in \{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

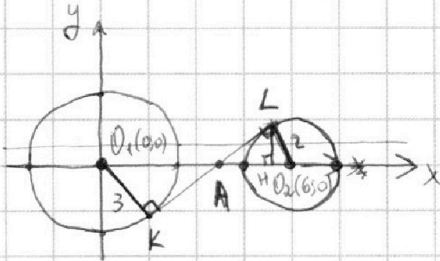
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-2x+3a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \\ (x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b & (1) \\ x^2+y^2=9 & (2) \\ (x-\frac{6}{b})^2+y^2=4 & (3) \end{cases}$$

Заметим, что ур-е (1) - ур-е прямой с угловым коэф-ом $-\frac{a}{2}$;

ур-е (2) - ур-е окружности радиуса 3 с центром в точке $O_1(0;0)$;

ур-е (3) - ур-е окружности радиуса 2 с центром в точке $O_2(6;0)$.



Мысленно представим прямую

$y=t$ и начнём поворачивать её,

увеличивая угловой коэффициент.

Заметим, что какое-то время всегда можно будет подобрать

такое число b , что $y = kx + b$ будет пересекать каждую окр-ть в двух

точках. Крайний случай такого поворота - когда прямая стала

общей внутренней касательной окружностей. Найдём ^{её} угловой

коэффициент. Из подобия $\triangle KO_1A$ и $\triangle LO_2A$: $O_1A : AO_2 = \frac{O_1K}{O_2L} = \frac{3}{2}$, а т.к. $O_1A +$

$AO_2 = 6$, то $O_1A = \frac{18}{5}$, а $AO_2 = \frac{12}{5}$. По т-ме Пифагора в $\triangle ALO_2$:

$$AL^2 = AO_2^2 - LO_2^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 - 2^2 = \frac{144}{25} - 4 = \frac{44}{25} = \frac{4}{25} \cdot 11 \Rightarrow AL = \frac{2\sqrt{11}}{5}. \text{ Опустим}$$

перпендикуляр LH на AO_2 . Тогда $LH = \frac{LO_2 \cdot LA}{AO_2} = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{11}}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$ (как

высота в прямоугольном треугольнике). Тогда ~~HO_2~~ по т-ме Пифагора в

$$\triangle LHO_2: HO_2^2 = LO_2^2 - LH^2 = 2^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2 = 4 - \frac{11}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow HO_2 = \frac{5}{3}, AH = AO_2 -$$

$$- HO_2 = \frac{12}{5} - \frac{5}{3} = \frac{36-25}{15} = \frac{11}{15}. \text{ Угл. коэф-т } k = \tan \angle LAH = \frac{LH}{AH} = \frac{\sqrt{11} \cdot \frac{5}{3}}{\frac{11}{15}} = \frac{5}{\sqrt{11}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

Заметим, что при дальнейшем увеличении k будет получаться не более двух решений, поскольку уже не получится сделать так, чтобы у прямой были общие точки с обеими окружностями.

При $k \rightarrow \infty$; $y = kx + b \rightarrow x = \text{const}$. Значит, $k \geq \frac{5}{\sqrt{11}}$ не подходят.

Аналогично для случая уменьшения k до $-\infty$. Прямая $y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + b_2$ будет касаться обеих окружностей и, как и все остальные прямые с $k < -\frac{5}{\sqrt{11}}$, четырёх решений давать не будет. Значит, $k \leq -\frac{5}{\sqrt{11}}$ также не подходят. Итак, $-\frac{5}{\sqrt{11}} < k < \frac{5}{\sqrt{11}}$. Из уравнения (1) видно,

что $k = -\frac{a}{2}$. Проведём обратную замену k на a :

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}.$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Преобразуем ~~второе~~ первое уравнение

$$\log_3^4 x + 6 \cdot \log_3 x = \log_{3^2} 243 - 8 \Leftrightarrow \log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} - \log_{3^2} 3^5 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0 \Leftrightarrow \log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0. \text{ Введём замену: } \log_3 x = t_1. \text{ Тогда: } \left. \begin{array}{l} \sqrt{2 \log_3 x}, \text{ т.к. } \log_3 x = 0 - \\ \text{не решение} \end{array} \right\}$$

$$2t_1^5 + 16t_1 + 7 = 0. \text{ Рассмотрим функцию } f(t) = 2t^5 + 16t + 7; f'(t) =$$

$$= 10t^4 + 16 > 0 \text{ при } \forall t \Rightarrow f(t) \uparrow \text{ на } \mathbb{R}. \text{ Поскольку } f(-1) = -25, f(1) = 25, \text{ то}$$

есть решение на $(-1, 1)$, а поскольку $f(t) \uparrow \mathbb{R}$, то оно единственное.

Значит, $-1 < t_1 < 1 \Leftrightarrow |t_1| < 1$. Аналогично преобразуем ~~второе~~ второе уравнение:

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 \Leftrightarrow \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11 \cdot \log_3 3}{2 \log_3(5y)} + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^4(5y) - \frac{7}{2 \log_3(5y)} + 8 = 0 \Leftrightarrow 2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3(5y) - 7 = 0. \text{ Введём}$$

замену: $\log_3(5y) = t_2$. Тогда $2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = 2t^5 + 16t - 7. f'(t) = 10t^4 + 16 > 0 \text{ при } \forall t \Rightarrow f(t) \uparrow \text{ на } \mathbb{R}. \text{ Поскольку}$$

$$f(-1) = -25, f(1) = 11, \text{ то есть решение на } (-1, 1), \text{ а поскольку } f(t) \uparrow \text{ на } \mathbb{R},$$

то оно единственное. Значит, $-1 < t_2 < 1 \Leftrightarrow |t_2| < 1$. Итак, t_1 и t_2 -

единственные корни первого и второго ур-я соответственно. Сложим

$$\text{ур-я } 2t_1^5 + 16t_1 + 7 = 0 \text{ и } 2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0: 2(t_1^5 + t_2^5) + 16(t_1 + t_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_1^5 + t_2^5 + 8(t_1 + t_2) = 0 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)(t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 - t_1 t_2^3 + t_2^4 + 8) = 0. (1)$$

Поскольку $|t_1| < 1$ и $|t_2| < 1$, то $|t_1^a \cdot t_2^b| < 1$ при всех a, b . Значит,

$$-5 < t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 - t_1 t_2^3 + t_2^4 < 5, \text{ откуда } 3 < t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 +$$

$+ t_1 t_2^3 + t_2^4 + 13$, т.е. вторая ~~складка~~ скобка ур-я (1) строго положительна.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение).

$$\text{Значит, } (t_1 + t_2)(t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 - t_1 t_2^3 + t_2^4 + \theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0$. Пусть мы найдем такие t_1 и t_2 . Тогда:

$$\begin{cases} \log_3 x = t_1 \\ \log_3(5y) = t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\log_3 x} = 3^{t_1} \\ 3^{\log_3(5y)} = 3^{t_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{t_1} \\ y = \frac{3^{t_2}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Тогда } x \cdot y = 3^{t_1} \cdot \frac{3^{t_2}}{5} = \frac{1}{5} \cdot (3^{t_1} \cdot 3^{t_2}) = \frac{1}{5} \cdot 3^{t_1 + t_2} = \frac{1}{5} \cdot 3^0 = \frac{1}{5}$$

Поскольку $x = 3^{t_1}$ — единственное решение первого уравнения, что следует из единственности t_1 , а $y = \frac{3^{t_2}}{5}$ — единственное решение второго уравнения, что следует из единственности t_2 , то $xy = \frac{1}{5}$ — единственное возможное значение, которое может принять выражение xy .

Ответ: $\left\{ \frac{1}{5} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

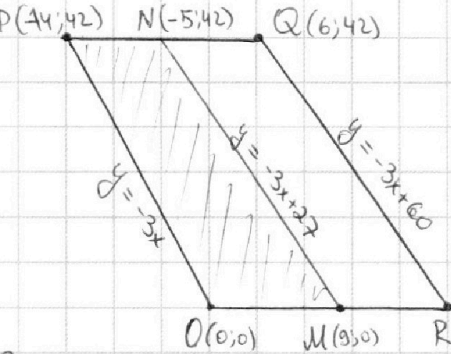
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что параллелограмм образован четырьмя прямыми: $y = 0, y = 42, y = -3x$ и $y = -3x + 60$.

Зафиксируем некоторую точку $(x_1; y_1)$ внутри $OPQR$. Тогда:

~~выполняется условие для всех~~ $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_2 = -3x_2 + (33 + y_1 + 3x_1)$, т.е. все точки $(x_2; y_2)$ лежат

на прямой $y = -3x + (33 + y_1 + 3x_1)$. Заметим, что раз $OPQR$ не

лежит ~~и~~ ниже прямой $y = -3x$, то для точки $(x_1; y_1)$ справедливо

неравенство $y_1 \geq -3x_1$, т.е. $33 + y_1 + 3x_1 \geq 33 - 3x_1 + 3x_1 = 33 > 0$. Значит,

все такие прямые лежат строго выше OP . Но они должны лежать

не выше прямой $y = -3x + 60$, чтобы ~~не~~ пересекать $OPQR$. Значит:

$-3x + (33 + y_1 + 3x_1) \leq -3x + 60 \Leftrightarrow y_1 + 3x_1 \leq 27 \Leftrightarrow y_1 \leq -3x_1 + 27$.

Прямая $y = -3x + 27$ пересекает стороны OR и PQ в точках $M(9; 0)$ и

$N(-5; 42)$ соответственно. Значит, все подходящие точки $(x_1; y_1)$

лежат внутри $OPNM$ или на его границах. Посчитаем кол-во

точек на отрезке PO . Т.к. $\text{НОД}(14; 42) = 14$, то при сдвиге на 1 по

x по прямой PO происходит сдвиг на 3 по y . Т.к. $\text{НОД}(1; 3) = 1$,

то целая точка на отрезке PO будет при $\forall x \in [-14; 0]$, т.е. их будет 15.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

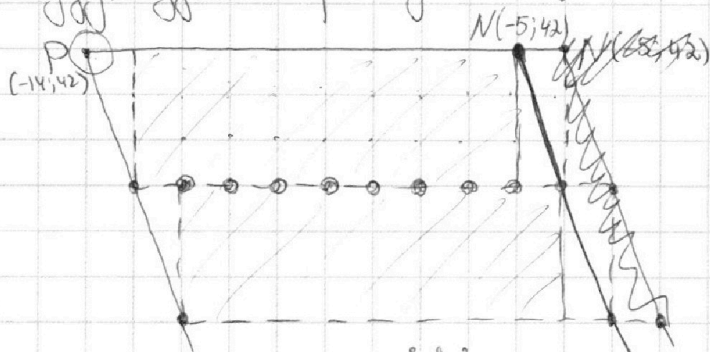
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

Значит, для N точки $(x_1; y_1)$ найдется 15 точек $(x_2; y_2)$, которые будут удовлетворять условию. Посчитаем число целых точек в ОРМ:



Как видно, ОРМ разбивается на $\frac{42}{3} = 14$ прямоугольников, ^{3x8} в каждом из которых $(3+1) \cdot (8+1) = 36$ точек. Каждые 2 соседних прямоугольника имеют по $9-1=8$ общих точек, а также не стоит забывать о точках P и M , которые не принадлежат ни одному прямоугольнику. Как можно заметить, никаких других целых точек в ОРМ нет. Значит, их количество можно вычислить как:

$$n = 36 \cdot 14 - 8 \cdot (14-1) + 2 = 402. \text{ Тогда пар точек } (x_1; y_1) \text{ и } (x_2; y_2) \\ \text{прямоугольники пересечения } P, M$$

будет $N = n \cdot 15 = 402 \cdot 15 = 6030$. Однако так мы также считаем пары $(x_2; y_2); (x_1; y_1)$. Значит, итоговый ответ - $\frac{6030}{2} = 3015$.

Ответ: 3015

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution for a geometry problem involving a pyramid and a rectangular prism. The solution includes a coordinate system, a system of linear inequalities, and various geometric diagrams.

Coordinate System: $O(0;0;0)$, $R(20;0;0)$, $P(-4;42;42)$, $Q(6;42;42)$. The vector \vec{OQ} is labeled $(x; y; z)$.

System of Inequalities:

$$\begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq -3x + 60 \\ y \leq 42 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Geometric Diagrams:

- A pyramid with vertices A, B, C and a point S on its surface. The base is a triangle with sides $15, 15, 12$.
- A rectangular prism with vertices A, B, C and a point S on its surface. The base is a triangle with sides $15, 15, 12$.
- A diagram showing the projection of the pyramid onto the xy -plane, with vertices A, B, C and a point S .

Calculations:

- $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$
- $(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$
- $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow 3x_2 - 3x_1 = 33 - y_2 + y_1$
- $61 \cdot y_2 = 3x_2 + 44$
- $y_2 = \frac{3x_2 + 44}{61}$
- $\frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{6}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{6}{2} \sin \theta = \frac{549}{4}$
- $2 \cdot 3x \cdot \frac{6}{2} \sin \theta = 60 \Rightarrow \frac{3 \sqrt{2} \cdot 3x \cdot 6}{2} = \sin \theta = \frac{30}{xy}$
- $\sin \theta = \frac{15}{xy}$
- $\frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 3x \cdot 6 \cdot \sin \theta = \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 3x \cdot 6 \cdot \frac{15}{xy}$
- $\frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 3x \cdot 6 \cdot \frac{15}{xy} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 3x \cdot 6 \cdot \frac{15}{xy}$
- $\frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 3x \cdot 6 \cdot \frac{15}{xy} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot 3x \cdot 6 \cdot \frac{15}{xy}$

Final Answer: 875 (circled)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x - \log_3 x^5 + 8 = 0$$

$$(\log_3 x)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$2 \cdot (\log_3 x)^5 + 16 \log_3 x + 7 = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

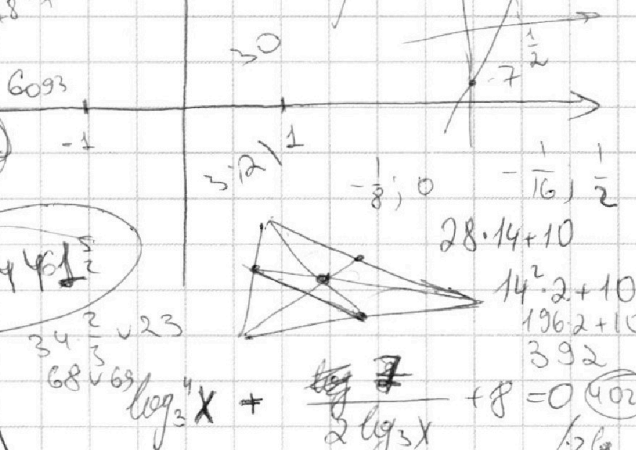
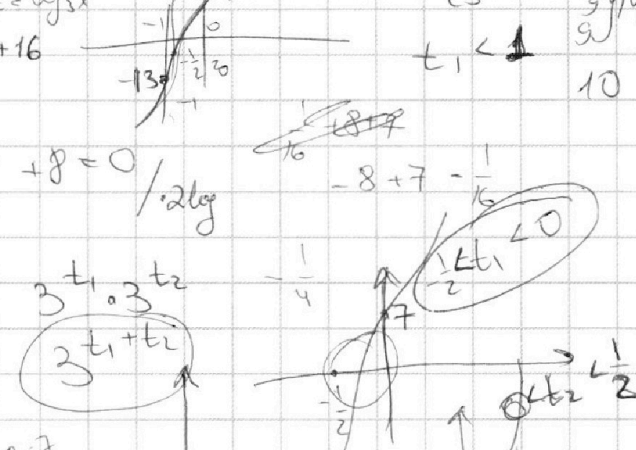
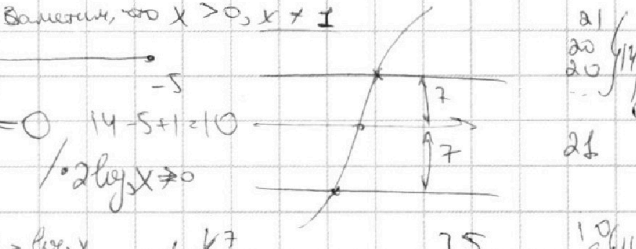
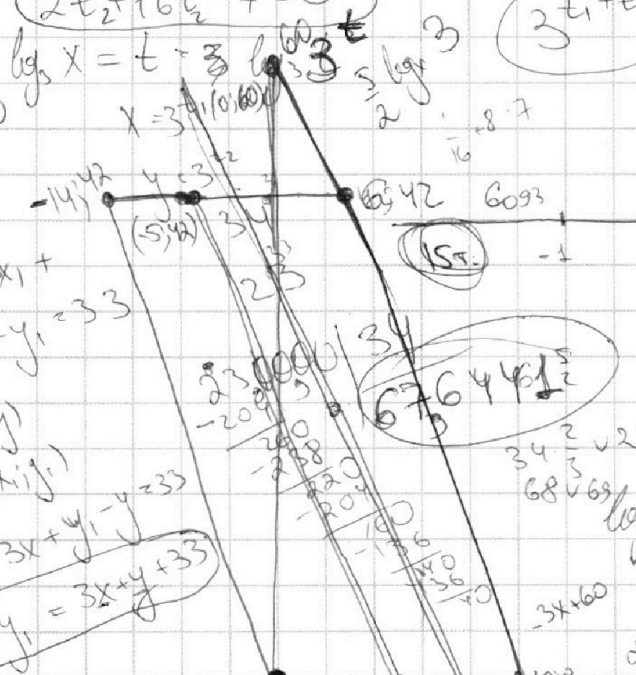
$$\log_3^5(3y) + \frac{2}{\log_3 3y} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 3y} + 8 = 0$$

$$2 \log_3^5(3y) + 16 \log_3(3y) - 7 = 0$$

$$2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0$$

$$3x + y \leq 60$$

$$y \leq -3x + 60$$



$$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} + 8 = 0$$

$$2 \cdot (\log_3 x)^5 + 16 (\log_3 x) + 7 = 0$$

$$2t_1^5 + 16t_1 + 7 = 0$$

$$2t_2^5 + 16t_2 - 7 = 0$$

$$(t_1 + t_2)(t_1^4 - t_1^3 t_2 + t_1^2 t_2^2 - t_1 t_2^3 + t_2^4) + 8(t_1 + t_2) = 0$$

$$y_1 \leq 27$$

$$y_2 \leq -3x_1 + 27$$

$$y_2 = 3 + y_1 + 3x_1$$

$$3x_1 + y_2 + 3x_2 \leq 27$$

$$y_1 \leq 27$$

$$y_2 \leq -3x_1 + 27$$

$$3015$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

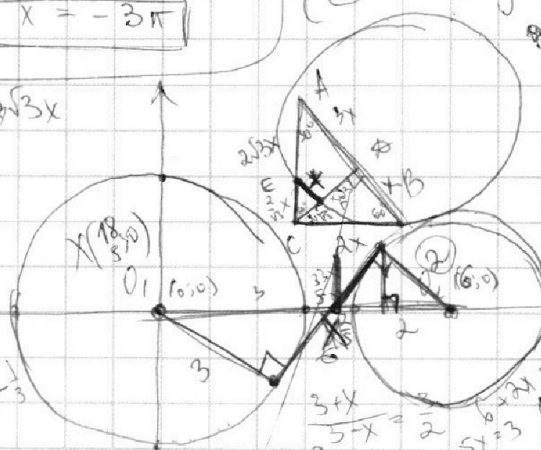
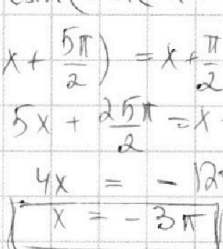
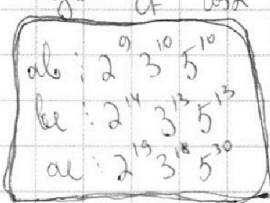
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a: 2^9$ $(x+y+z)_{\min} = ?$
 $b: 2^{10}$ $x+y \geq 9$ $CB^2 = CE \cdot CA$ $CF \cdot CD = CE \cdot CA$ $\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA}$
 $c: 2^{10}$ $x+z \geq 14$ $\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CD}$ $CE \cdot CA = BC^2$ $CE \cdot CA = BC^2$
 $S_1 = \frac{9+14+19}{2} = 16$ $\frac{BC^2}{CA^2} = \frac{CF}{CD}$ $\frac{BC^2}{CA^2} = \frac{CF}{CD}$ $\frac{BC^2}{CA^2} = \frac{CF}{CD}$
 $S_2 = \frac{10+13+20}{2} = 21.5$ $AC \cdot CB = \frac{1}{2} AC \cdot CB$ $S_{CEP} = \frac{1}{2} CF \cdot EF$ $\frac{AC \cdot CB}{CF \cdot EF} = \frac{AC \cdot CB}{BC^2}$
 $S_3 = \frac{10+13+20}{2} = 21.5$ $\frac{AC \cdot CB}{CF \cdot EF} = \frac{AC \cdot CB}{BC^2}$ $\frac{AC \cdot CB}{CF \cdot EF} = \frac{AC \cdot CB}{BC^2}$
 $\frac{AC}{CF} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{AC}{CF \sin \alpha}$ $EF^2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = E$ EI
 $AC \cdot CE = KC^2$ $AC = \frac{BC^2}{CE}$
 $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ $\arcsin x = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = x$ $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$
 $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$ $5 \arcsin(\cos(x + \frac{\pi}{2})) = -3\pi + \frac{\pi}{2}$ $\sin x < 0$
 $\arcsin(-\sin(x + \frac{\pi}{2})) = -3\pi + \frac{\pi}{2}$ $\cos(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x$
 $5 \arcsin(\sin(x + \frac{5\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$ $\sin(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$
 $5(x + \frac{5\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$ $4x = -12\pi$ $x = -3\pi$



$29x^2 = CE = 2\sqrt{3}x$
 $CE = \frac{2}{\sqrt{3}}x$
 $\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CA}$
 $\frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{CF}{CA}$
 $CF = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

$|36| < 3\sqrt{a^2+4}$ $96^2 < 9a^2 + 36$ - можно выбрать b (так как $b = a^2 + 9a^2 < 9a^2 + 36 \Rightarrow a > \sqrt{36-10} = \sqrt{26}$)
 $|16a-36| < 2\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow 36a^2 + 96^2 - 36ab < 4a^2 + 16 \Leftrightarrow 32a^2 - 36ab + 96^2 + 16 < 0$
 $D = (36a)^2 + 36 \cdot (16 - 32a^2) < 0$ $2y = 28 \cdot 9 \cdot b^2 - 36a \cdot b - (16 - 32a^2) < 0$
 $1296a^2 + 576 - 1182a^2 \geq 0$ $108a^2 + 576 \geq 0$

12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -3\pi$$

$$-5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{9}$$

$$5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$-5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$6x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\sin(x + \frac{5\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{5\pi}{2} - \cos x \sin \frac{5\pi}{2} = -\cos x$$

$$\sin(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{3\pi}{2} + \cos x \sin \frac{3\pi}{2} = -\cos x$$

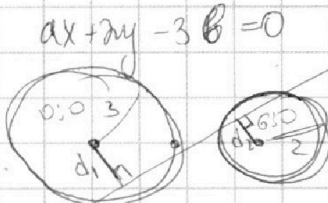
$$-5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$$

$$\sin x \cos \frac{3\pi}{2} + \cos x \sin \frac{3\pi}{2} = -\cos x$$

$$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = 8\pi \Rightarrow x = 2\pi$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



$$d_1 = \frac{|a \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} = \frac{3|b|}{\sqrt{a^2 + 4}} < 3$$

$$d_2 = \frac{|a \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 3b|}{\sqrt{a^2 + 4}} < 2$$

$$|b| < \sqrt{a^2 + 4}$$

$$b^2 \leq a^2 + 4$$

$$y = -\frac{a}{2}x - \frac{3}{2}b$$

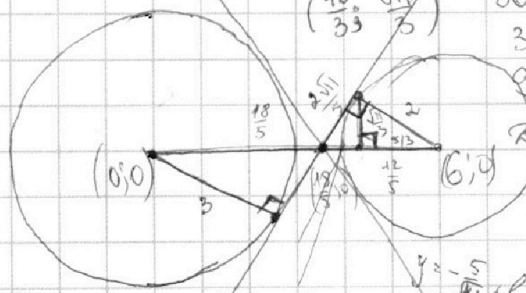
$$-\frac{a}{2} \in [0; \frac{5}{\sqrt{11}}]$$

$$-\frac{a}{2} \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; 0]$$

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} < a < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$



$$36a^2 + 9b^2 - 36ab < 4a^2 + 16$$

$$32a^2 - 36ab + 9b^2 - 16 < 0$$

$$9 \cdot b^2 - 6 \cdot 36a + 32a^2 - 16 < 0$$

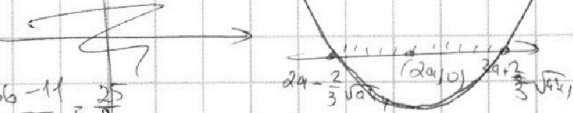
$$D = (36a)^2 - 36(32a^2 - 16) + 36a \cdot 36a - 36a \cdot 32a + 36 \cdot 16 = 36a^2 - 4a + 36 \cdot 16 = 36 \cdot 4(a^2 + 4)$$

$$b_{1,2} = \frac{36a \pm 12\sqrt{a^2 + 4}}{18} = 2a \pm \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + 4}$$

$$\frac{144}{25} - \frac{100}{25} = \frac{44}{25} = \frac{4}{25} \cdot 11$$

$$h = ab = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

$$k = b_0 = \frac{\sqrt{11} - 0}{\frac{10}{3} - \frac{18}{5}} = \frac{5\sqrt{11}}{65 - 54} = 5\sqrt{11}$$



$$4 - \frac{11}{9} = \frac{36 - 11}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{11} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

