



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



① $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ — степени входящие 2 в a, b, c соответственно.
 $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ — степени входящие 3 в a, b, c соответственно.
 $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ — степени входящие 5 в a, b, c соответственно.

1p $ab \equiv 2^8 3^{14} 5^{12} \equiv 2^8 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \quad (1)$

$bc \equiv 2^{12} 3^{20} 5^{17} \equiv 2^{12} \Rightarrow \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \quad (2)$

$ac \equiv 2^{14} 3^{21} 5^{39} \equiv 2^{14} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \quad (3)$

$\frac{(1)+(2)+(3)}{2} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

$\Rightarrow abc \equiv 2^{17}$, т.к. 2 входит в разложение на простые множители числа abc в степени $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c$.

2p $ab \equiv 2^8 3^{14} 5^{12} \equiv 3^{14} \Rightarrow \beta_a + \beta_b \geq 14 \quad (4)$

$bc \equiv 2^{12} 3^{20} 5^{17} \equiv 3^{20} \Rightarrow \beta_b + \beta_c \geq 20 \quad (5)$

$ac \equiv 2^{14} 3^{21} 5^{39} \equiv 3^{21} \Rightarrow \beta_a + \beta_c \geq 21 \quad (6)$

$\frac{(4)+(5)+(6)}{2} \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2}$

$\Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{56}{2} = 28 \Rightarrow abc \equiv 3^{28}$

3p $ab \equiv 2^8 3^{14} 5^{12} \equiv 5^{12} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \Leftrightarrow \gamma_a + \gamma_b = 12 + k, k \geq 0$

$bc \equiv 2^{12} 3^{20} 5^{17} \equiv 5^{17} \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \Rightarrow \gamma_b + \gamma_c = 17 + n, n \geq 0$

$ac \equiv 2^{14} 3^{21} 5^{39} \equiv 5^{39} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \Rightarrow \gamma_a + \gamma_c = 39 + m, m \geq 0$

$(\gamma_a + \gamma_b) + (\gamma_b + \gamma_c) \geq \gamma_a + \gamma_c \Rightarrow 12 + k + 17 + n \geq 39 + m \quad (7)$

~~Или~~ $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = \frac{2(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)}{2} = \frac{12+k+17+n+39+m}{2} \geq$

$\geq \frac{39+m+39+m}{2} = 39 + m \geq 39 \Rightarrow abc \equiv 5^{39}$

Первое из этих неравенств верно по отношению к (7).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4 (продолжение)

$$\begin{cases} abc = 2^{17} \\ abc = 3^{28} \\ abc = 5^{39} \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

$$(2^{17}, 3^{28}) = (2^{17}, 5^{39}) = (3^{28}, 5^{39}) = 1 \quad \text{Оценка: } 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Пример: Возьмём $a = 2^5 3^8 5^{17}$, $b = 2^3 3^6 5^0$,

$$c = 2^9 3^{14} 5^{22} \quad ab = 2^{5+3} 3^{8+6} 5^{17+0} = 2^8 3^{14} 5^{17} = 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc = 2^{3+9} 3^{6+14} 5^{22} = 2^{12} 3^{20} 5^{22} = 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac = 2^{5+9} 3^{8+14} 5^{17+22} = 2^{14} 3^{22} 5^{39} = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc = 2^{5+3+9} 3^{8+6+14} 5^{17+22} = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$$

Пример подходит.

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

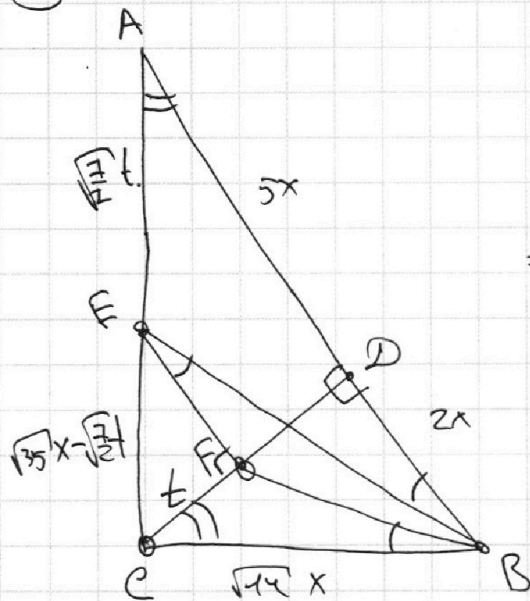
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2



$AD = 5x$, тогда $DB = 2x$,
 $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$
 по свойству высоты, опущенной
 к гипотенузе, $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} =$
 $= \sqrt{4x^2 + 10x^2} = \sqrt{14}x$ по теореме
 Пифагора, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} =$
 $= \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$ по теореме
 Пифагора.

По теореме об угле между
 хордой и касательной $\angle FEB =$
 $= \angle FBC$ при хорде FB и
 касательной CB. $EF \parallel AB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ABE = \angle FEB$ как
 накрест лежащие при параллель-
 ных. $\angle DCB = 90^\circ - \angle ACD =$

$= \angle CAD$, так как $\triangle AEB$, $\triangle ACD$ — прямоугольные
 треугольники. $\triangle CFB \sim \triangle AEB$ по углам
 $\angle FCB = \angle EAB$ и $\angle FBC = \angle EBA \Rightarrow$ если $CF = t$,

то $AE = t \cdot \frac{AB}{BC} = t \cdot \frac{7x}{\sqrt{14}x} = \sqrt{\frac{7}{2}}t$. $CE = AC - AE =$

$= \sqrt{35}x - \sqrt{\frac{7}{2}}t$ $EF \parallel AB \Rightarrow$ по теореме о пропорциональ-
 ных отрезках $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$ $\frac{\sqrt{35}x - \sqrt{\frac{7}{2}}t}{\sqrt{35}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x}$

$1 - \frac{t}{\sqrt{10}x} = \frac{t}{\sqrt{10}x} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{10}x}{2}$. $EF \parallel AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow S_{CEF} = S_{CAD} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 =$
 $= S_{CAD} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{10}x}\right)^2 = S_{CAD} \cdot \left(\frac{\sqrt{10}x}{2\sqrt{10}x}\right)^2 = \frac{S_{CAD}}{4}$.

$AD:DB = 5:2 \Rightarrow S_{CAD} = \frac{5}{7}S_{ABC}$. $S_{CEF} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4}S_{ABC}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$. Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ $\text{arcsin}(\cos x) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = f(x)$.
 Если $0 \leq x \leq \pi$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$.

Если $2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $0 \leq x - 2\pi k \leq \pi \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$.

Если $-\pi < x < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \frac{\pi}{2} + x$.

Если $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $-\pi < x - 2\pi k < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k)) = \frac{\pi}{2} + x - 2\pi k$.

$\text{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k)) = \pi - 2x \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k)) = \pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 8x = 4\pi + 20\pi k \\ -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 12x = -4\pi + 20\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ -\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \\ -1 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ 0 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

Ответ: $\left\{ -2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

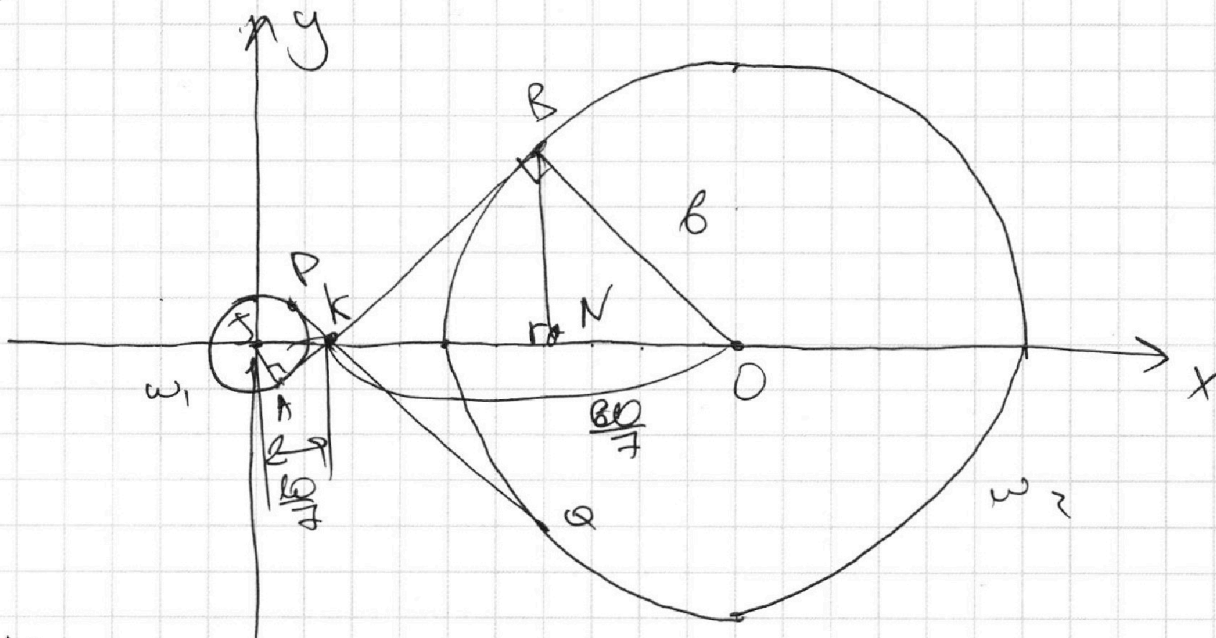


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \begin{cases} ax - 3y + cb = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2cy + 6c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{cb}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (2) \\ x^2 + (y - c)^2 = 6^2 \quad (3) \end{cases}$$

Уравнения (2) и (3) задают окружности ω_1 и ω_2 с радиусами 1 и 6 соответственно и центрами $(0; 0)$ и $(0; c)$ соответственно.



Нам интересно такое a , что существует прямая с наклоном $\frac{a}{3}$, пересекающая ω_1 и ω_2 в четырех точках (в ω_1 в двух и в ω_2 в двух), так как $\frac{cb}{3}$ мы можем варьировать.

Покажем, что наклон не превышает наклона касательной к ω_1 в точке A и не меньше наклона касательной к ω_2 в точке P . Остаточное утверждение можно доказать, увеличив A и B и понижая центр ω_2 .

$\angle ANM = \angle ONM \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

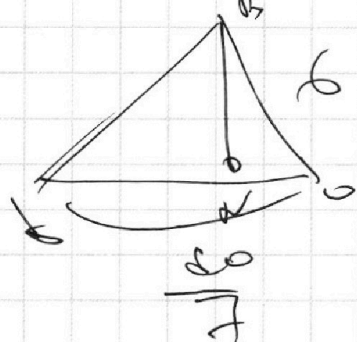
9

$$\Rightarrow JK : KO = JA : BO = 1 : 6$$

$$\Rightarrow KO = \frac{6}{7} \cdot JO$$

$$JO = \frac{60}{7}$$

$$KB = \sqrt{\left(\frac{60}{7}\right)^2 - 6^2} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$$



$$\Rightarrow \tan \angle BKO = \frac{a}{3} = \frac{7}{\sqrt{51}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{21}{\sqrt{51}}$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } \left[-\frac{21}{\sqrt{51}}; \frac{21}{\sqrt{51}} \right]$$

(наклоны PQ по модулю равны
наклонам AB)

$$K = PQ \cap AB$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$⑤ \quad a = \log_5 2x, \quad b = \log_5 y.$$

Первое равенство можно записать как

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Leftrightarrow 3a^5 - 9 = 4 - 9a \quad [a=0 \text{ не подходит}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a^5 + 9a - 13 = 0. \text{ Второе равенство можно записать}$$

$$\text{как } b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Leftrightarrow 3b^5 + 12 = -1 - 9b \quad [b=0 \text{ не подходит}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3b^5 + 9b + 13 = 0 \quad \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 & (1) \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) + (2) : 3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0$$

$$(a + b) \left(3 \underbrace{(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)} + 9 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$= \frac{a^5 + b^5}{a + b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)} > 0, \text{ т.к. } f(t) = t^5 - \text{возрастающая функция.}$$

$\Leftrightarrow a + b = 0$. Получается, $a + b$ может принимать только значение 0 $\Leftrightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0$ может принимать

только значение 0 $\Leftrightarrow 2xy$ может принимать

только значение $\frac{1}{2}$. $\Leftrightarrow xy$ может принимать

Ответ: $\frac{1}{2}$.

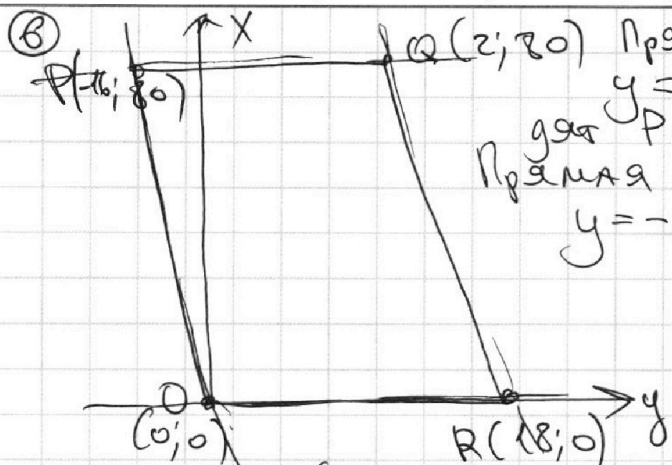
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Прямая PQ задается уравнением $y = -5x$, так как по условию подходит P и O : $80 = -5 \cdot (-16)$, $0 = -5 \cdot 0$.
Прямая QR задается уравнением $y = -5x + 90$, так как по условию подходит Q и R :
 $80 = -5 \cdot (2) + 90$,
 $0 = -5 \cdot (18) + 90$.

Полоса, образованная прямыми QR и PQ , задается системой неравенств

$$-5x \leq y \leq -5x + 90 \Leftrightarrow 0 \leq 5x + y \leq 90.$$

Горизонтальные прямые PQ и OR заданы уравнениями $y = 80$ и $y = 0$ соответственно.

Полоса, образованная прямыми PQ и OR , задается системой неравенств $0 \leq y \leq 80$.

$PQRO$ — пересечение двух полос, которое мы рассмотрим. Значит, точка (x, y) лежит в $PQRO$ тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} 0 \leq 5x + y \leq 90 & (1) \\ 0 \leq y \leq 80 \end{cases} \quad \cdot \quad 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$. Т.к. $x_2, y_2, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ и верно неравенство (1), возможны только следующие варианты:

$$\begin{aligned} 5x_1 + y_1 = 0, & \quad 5x_2 + y_2 = 45 \\ 5x_1 + y_1 = 1, & \quad 5x_2 + y_2 = 46 \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$5x_1 + y_1 = 45, \quad 5x_2 + y_2 = 90.$$

Возьмем общее: $5x_1 + y_1 = k$, $5x_2 + y_2 = k + 45$, $0 \leq k \leq 45$, $k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8 (продолжение)

$$5x_1 + y_1 = k \Leftrightarrow 5x_1 = k - y_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k - y_1}{5} \\ y_1 \equiv k \pmod{5} \\ 0 \leq y_1 \leq 80 \end{cases}$$

Для уравнения $5x_2 + y_2 = 45 + k$

аналогично.

Заметим, что $500 \leq y_1 \leq 5016$.
Поэтому для $k \not\equiv 5$ существует 17^2 y_1

таких, что $y_1 \equiv k \pmod{5}$, для $k \equiv 5$ существует 16^2 y_1 таких, что $y_1 \equiv k \pmod{5}$. Найдем кол-во y_1

таких, что $y_1 \equiv k \pmod{5}$, и таких, что y_2 , что

$y_2 \equiv 45 + k \pmod{5}$, однако, т.к. $k \equiv 45 + k \pmod{5}$.

Для $k \not\equiv 5$ получаем 17^2 пар (x_1, x_2) очевидно что получаются из y_1 и y_2 соответственно.

Для $k \equiv 5$ получаем 16^2 пар.

$500 \leq k \leq 509$, поэтому для ^{всех} $k \not\equiv 5$ кол-во

пар равно $10 \cdot 17^2$, для ^{всех} $k \equiv 5$ кол-во пар

равно $36 \cdot 16^2$. Всего: $36 \cdot 16^2 + 10 \cdot 17^2 =$

$= 12106$. Ответ: 12106.



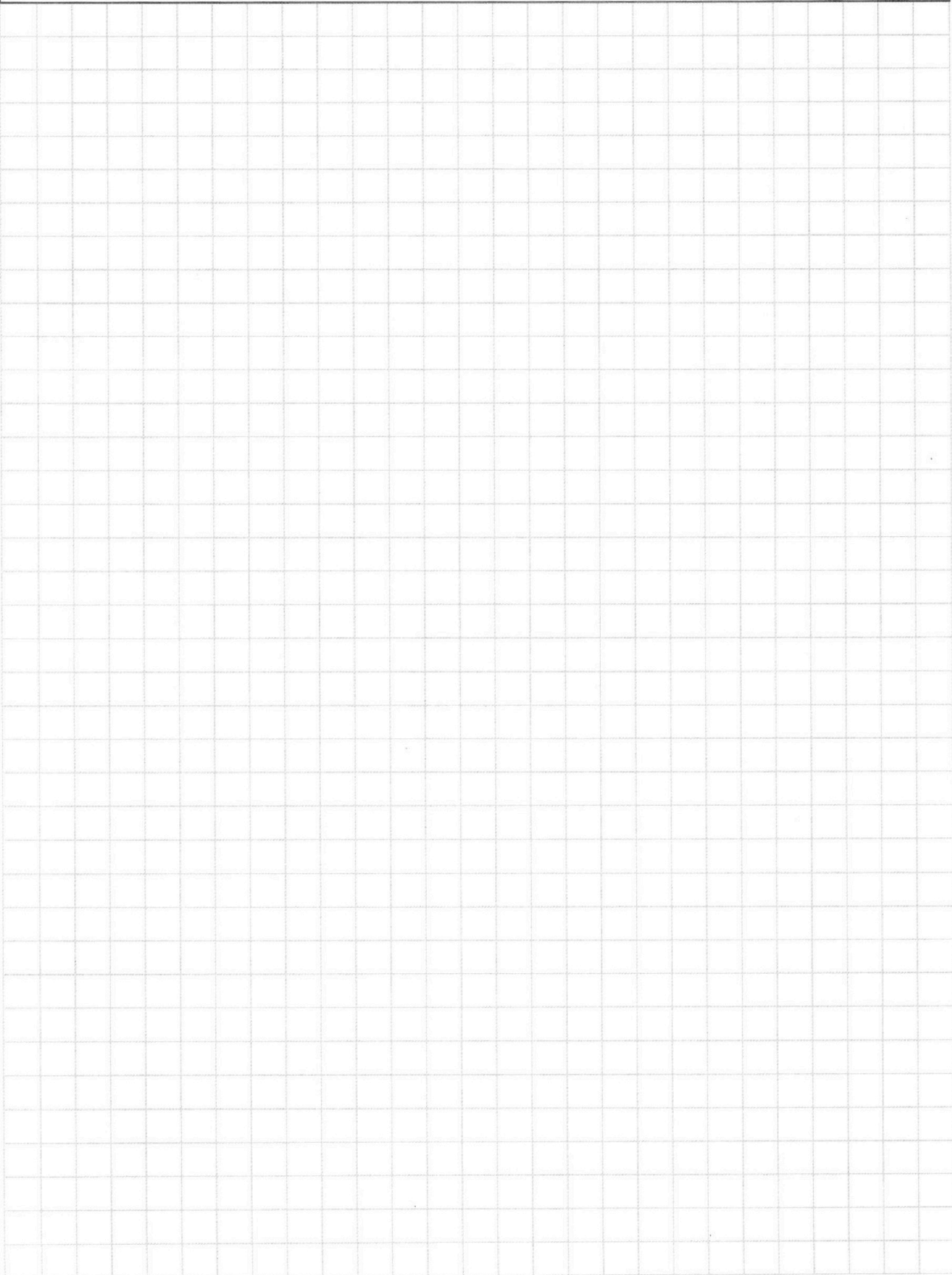
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on a grid background. It includes several diagrams and equations:

- Top left:** A square with a diagonal and a point on the diagonal. A right angle is marked at the intersection of the diagonal and a line from the top-left corner. Equations: $\frac{\sqrt{2}}{2} = f$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = f$, $f = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$.
- Top right:** A right-angled triangle with legs of length f and f , and hypotenuse $\sqrt{2}f$. Equation: $\frac{\sqrt{2}f}{\sqrt{2}} = f$.
- Middle left:** A large right-angled triangle with legs x and $\sqrt{2}x$, and hypotenuse $\sqrt{3}x$. Equation: $\frac{\sqrt{3}x}{f} = \frac{x \sqrt{3}}{\sqrt{2}x}$.
- Middle right:** A right-angled triangle with legs f and f , and hypotenuse $\sqrt{2}f$. Equation: $CD = \sqrt{2}x$.
- Bottom:** A large right-angled triangle with vertices A, B, and C. The right angle is at C. The hypotenuse is AB. A point D is on AC, and a point E is on BC. A line segment DE is drawn. Various segments are labeled with x and f . There are several right angle symbols. Equations: $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{f}$.

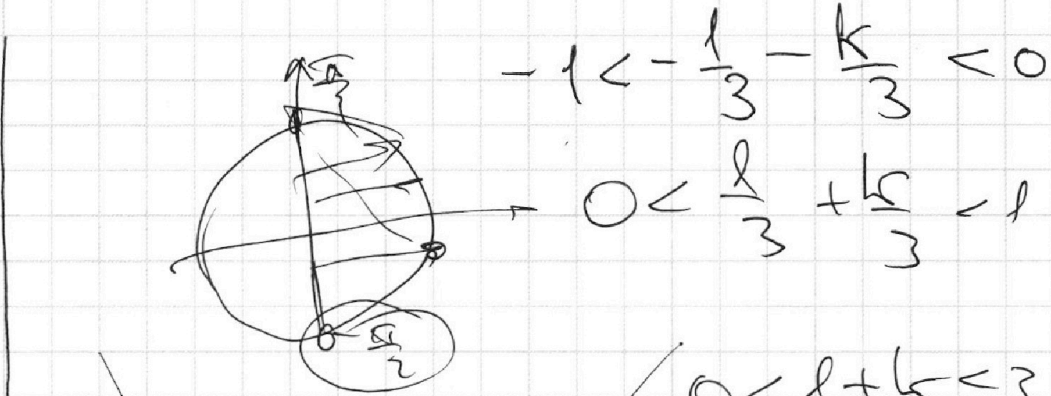
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

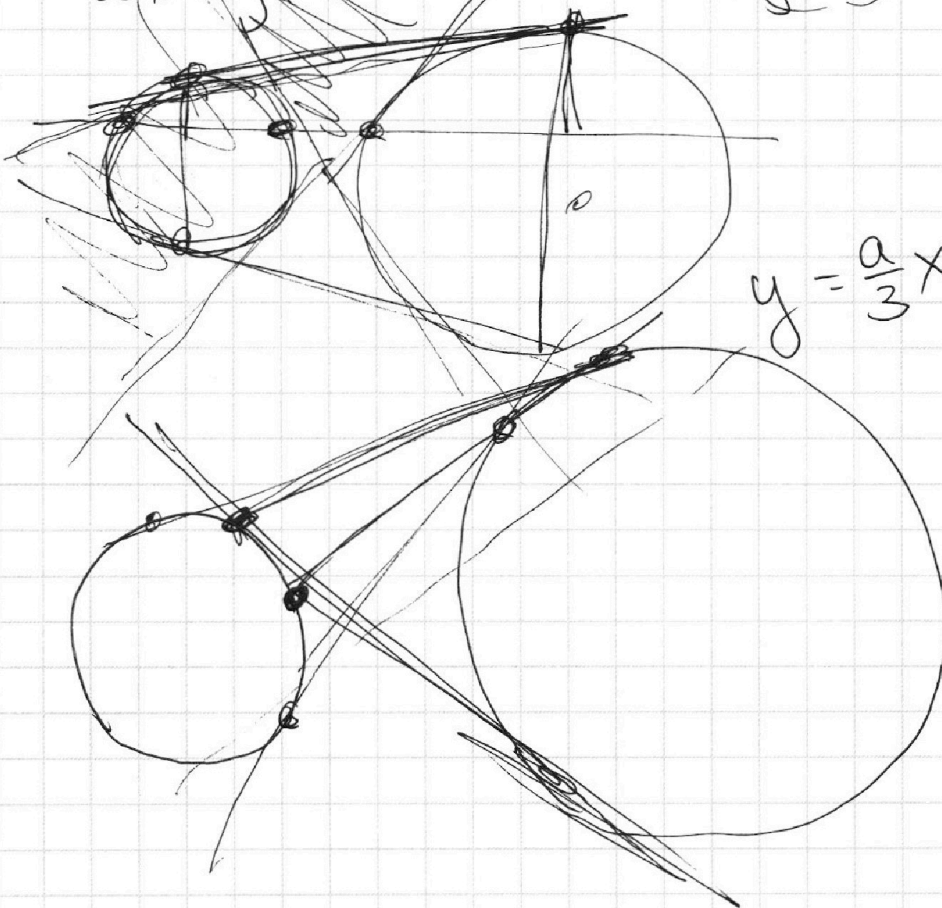
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax - by + c = 0$

$0 < l + k < 3$
 $-1 < k < 2$
 $0 < k < 2$
 $x^2 + (y-1)^2 = 6$



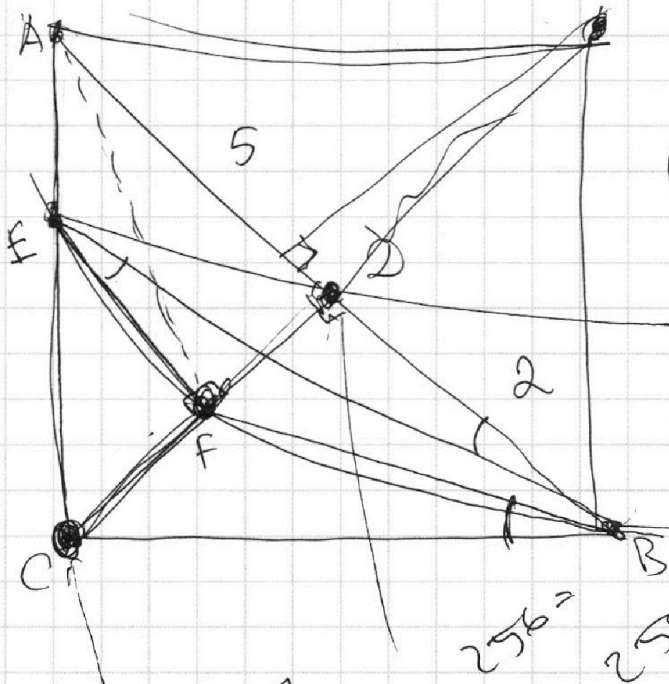
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

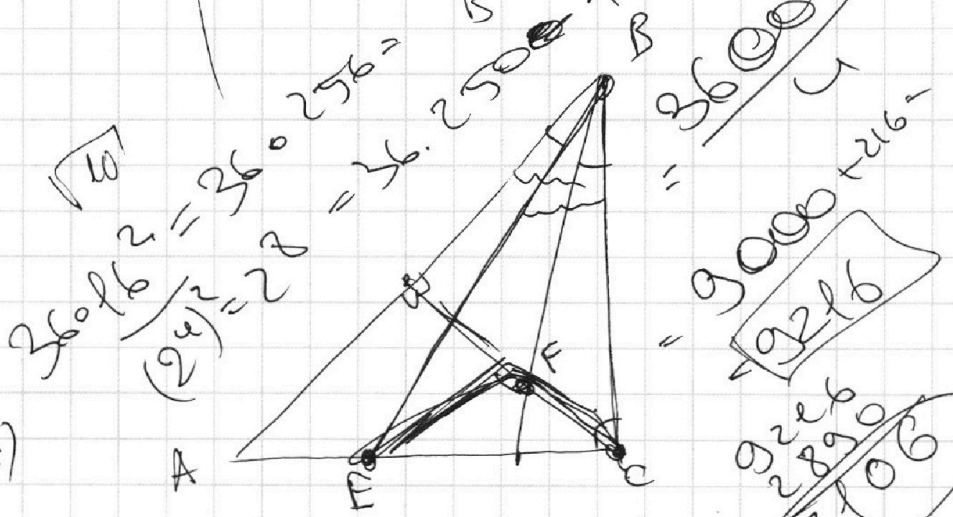


$$S_{ABC} = S_{CEF}$$

$$S_{APC} : S_{ABC} = \frac{5}{7}$$

$$6 \cdot 17^2 = 289 \cdot 6$$

2890



$$\sqrt{10} \cdot 2 = 2\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$\frac{2\sqrt{10}}{(2\sqrt{10})^2} = 28$$

$$= 36000 + 2160$$

$$= 38160$$

$$t = \log_5(2x)$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 30, 2 - 3$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$3t^5 - 3 - 4 + 9t = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$$

$$\frac{3b^5 + 12 - 1 + 9b}{3b} = 0$$

$$3b^5 + 12 - 1 + 9b = 0$$

$$3t^5 + 9t - 7 = 0$$

$$3 \cdot 7^4 + 9 = 1000$$

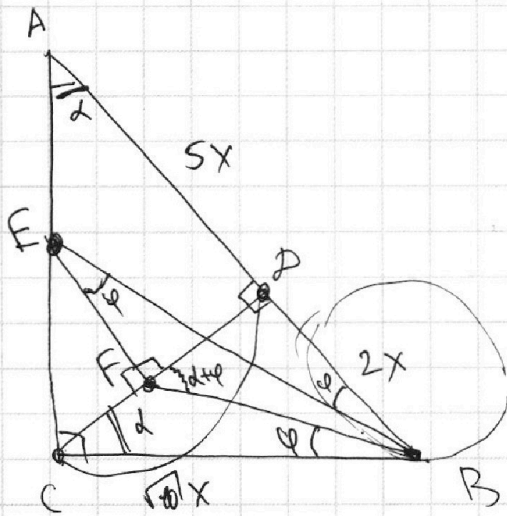
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

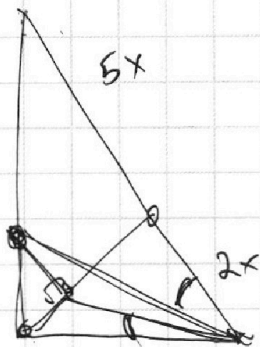
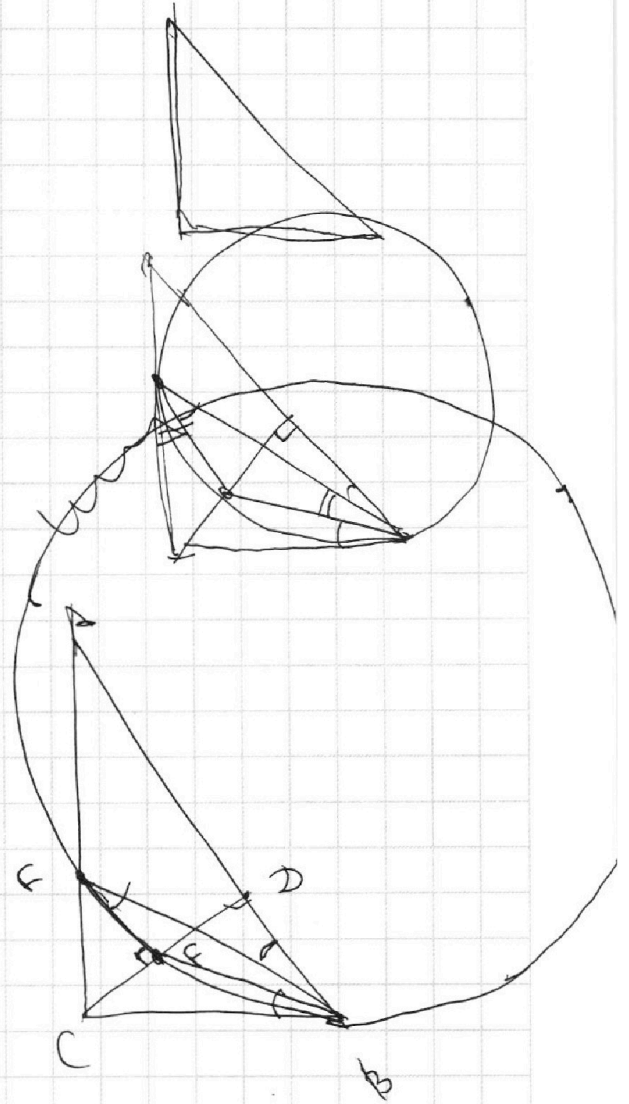
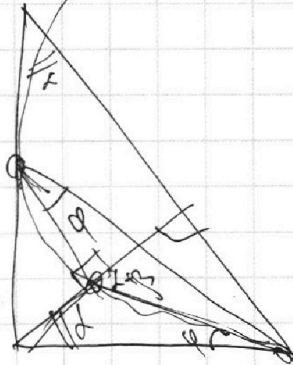
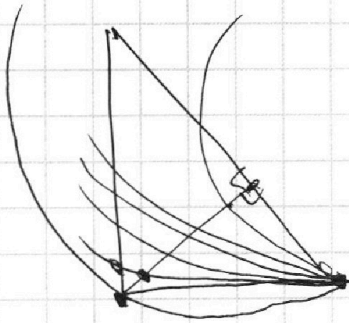
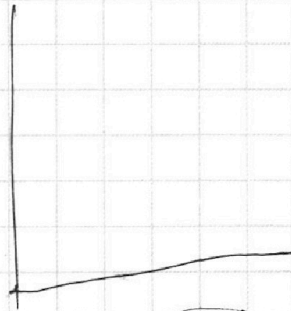
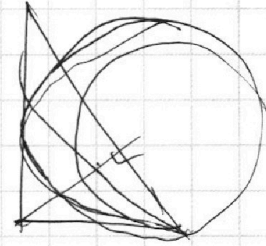
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180^\circ - \varphi - 90^\circ - \alpha + \varphi + \varphi + \varphi = 90^\circ - \alpha$$



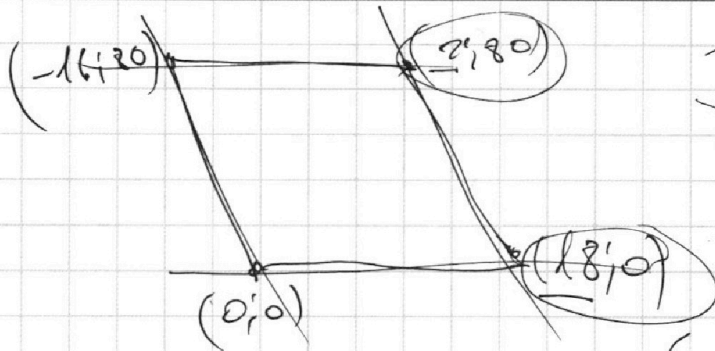
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



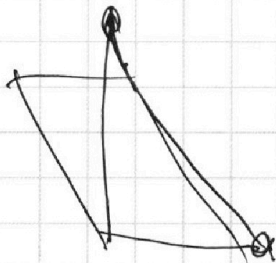
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ -5x \leq y \leq -5x + 90 \end{cases}$$

$$0 \leq 5x + y \leq 90$$

$$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$$

$$5x_1 + y_1 = 0, 5x_2 + y_2 = 45$$

$$5x_1 + y_1 = 45, 5x_2 + y_2 = 90$$



$$5x_1 + y_1 = k \quad 5x_1 = k - y_1$$

$$0 \leq k \leq \begin{cases} 5m \\ 5m + 4 \end{cases} \quad \boxed{y_1 \leq k} \quad \textcircled{16}$$

$$16^2 \cdot 36 + \frac{17^2 \cdot 10}{2890} =$$

$$= 3$$

$$\frac{36}{72}$$

$$36 \cdot 256 =$$

$$= \frac{36000}{4} + 216 =$$

$$2890 + 9216 = \boxed{12106}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

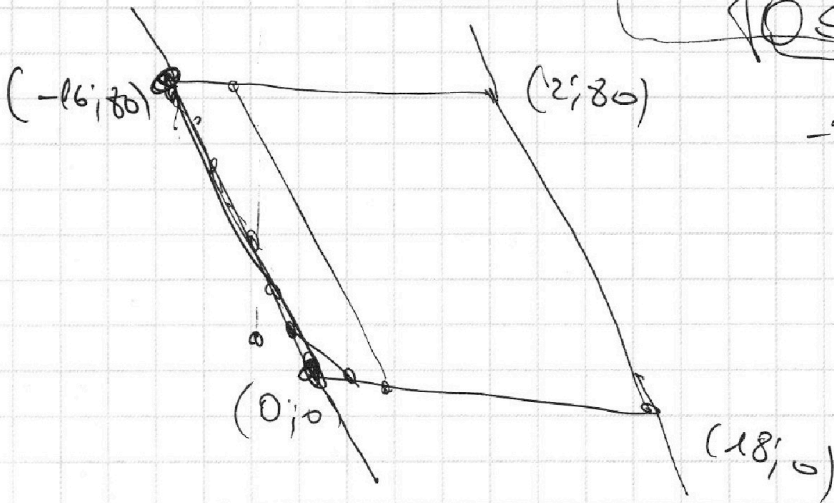
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$0 \leq x + 5y \leq 90$~~

$0 \leq 5x + y \leq 90$
 $0 \leq y \leq 80$



$-80 \leq 5x \leq 90$

$-16 \leq x \leq 18$

~~$(5x_1 + y_1) + 5x_2 =$~~

$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$

$5x_1 + y_1 = 0$

$x_1 = -16$

$0.5 \cdot 5 = 2.5$
 $5 \cdot 16 = 80$

$5x_2 + y_2 = 45$
 $0 \dots 80$

$5 \cdot 0$
 $5 \cdot 0 + 4$

$5 \cdot 15$
 $5 \cdot 15 + 4$
 $5 \cdot 15$

$2 \cdot (17 \cdot 0 - 17 \cdot 16) = 45$
 $16 \cdot 16$
 45
 90

$5x_1$

$5 \cdot 0$
 $5 \cdot 0 + 4$

$5 \cdot 0 + 4$

$17 \cdot 16$
 $16 \cdot 16$
 $16 \cdot 16$

$(17 \cdot 16 + 4 \cdot 16 \cdot 16) + 17 \cdot 16$
 $5 \cdot 8 +$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

~~$(a+b) = ? \quad a+b = \log_5(2xy)$~~

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) - 2 = 0$$

$$(a+b) \left(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9 \right) =$$

$$3a^5 - 9 = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

$$(a+b) \left(\frac{3a^4 - 3a^3}{3(a^4 - a^3b + \dots + b^4) + 9} \right) = 0$$

$\log_5 2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -3$$

$$a^2b^2 - ab(a^2 + b^2)$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 &= ab(a^4 + b^4) \\ &= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

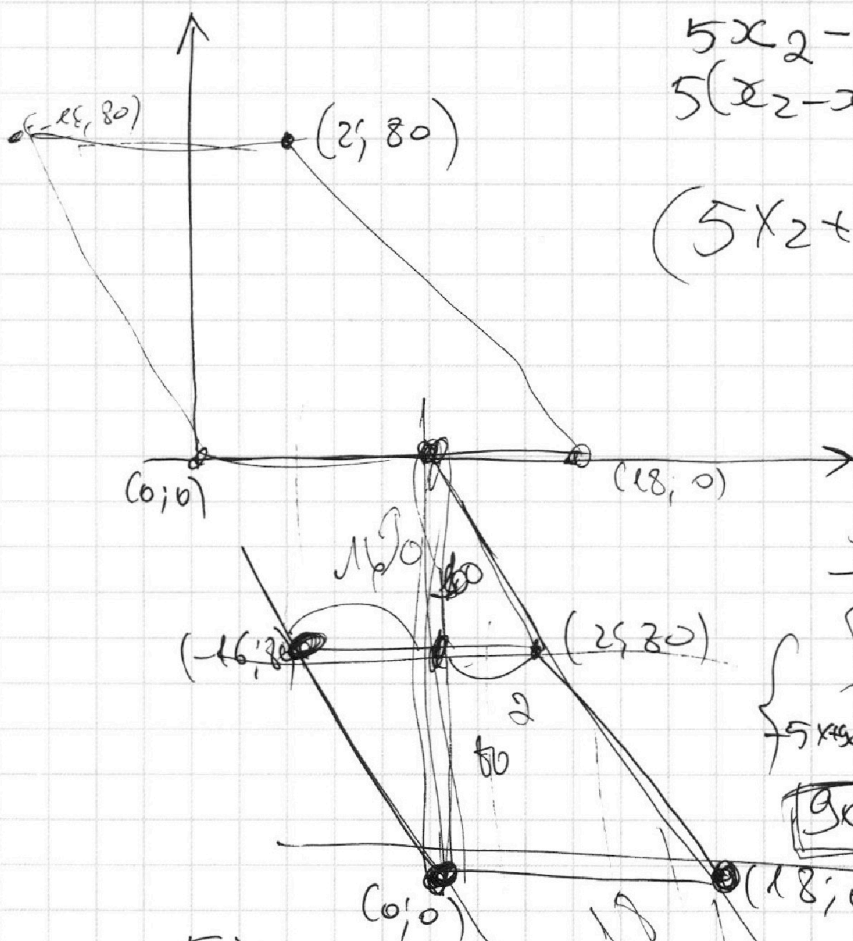
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~3a~~ $a^4 - ab + ab^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1$ $ab(a^4 + b^4)$

$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = \frac{a^5 - (-b)^5}{a - (-b)}$



$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$
 $5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$

$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$

~~$0 \leq x \leq 80$~~
 $0 \leq y \leq 80$
 $5x \leq 90, y \geq -5x$
 $90 \geq x + 5y \geq 0$

$y = -5x$

$y \geq -5x$

$\frac{f}{90} + \frac{x}{18} = f$

$y = -5x + 90$

$f(t+90)$
 $\frac{t}{f+8} + \frac{t}{9}$

$5t = t + 80$
 $t = 20$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \beta_a + \beta_b \geq 14 \\ \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \end{cases}$$

$$\alpha_a + \alpha_c \geq 8$$

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \\ \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_a - \alpha_c = -4 \\ \alpha_a + \alpha_c = 14 \end{cases}$$

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

$$\beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2} \geq \frac{56}{2} = 28$$

$$\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq \frac{12+17+39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} = 3^{27} \cdot 5^{17} \cdot 10^{17}$$

$$\begin{cases} \beta_a + \beta_b = 14 \\ \beta_b + \beta_c = 20 \\ \beta_a + \beta_c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_a - \beta_c = -6 \\ \beta_a + \beta_c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_a = 8 \\ \beta_c = 14 \\ \beta_b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b = 12 \\ \gamma_b + \gamma_c = 17 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a - \gamma_c = -5 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a = 17 \\ \gamma_c = 22 \\ \gamma_b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35 \\ 29 \end{cases}$$

$$\gamma_a + \gamma_c \geq 39$$

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b = 12 \\ \gamma_b + \gamma_c = 17 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_a - \gamma_c = -3 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2¹⁷ 3²⁸

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 12 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ x_a + x_c \geq 39 \end{cases}$$

$$39 \leq x_a + x_c \leq (x_a + x_b) + (x_b + x_c)$$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 12 + k \\ x_b + x_c = 17 + n \\ x_a + x_c = 39 + m \end{cases}$$

$$12 + k + 17 + n \geq 39 + m$$

$$k + n - m \geq 10$$

$$k + n \geq 10 + m$$

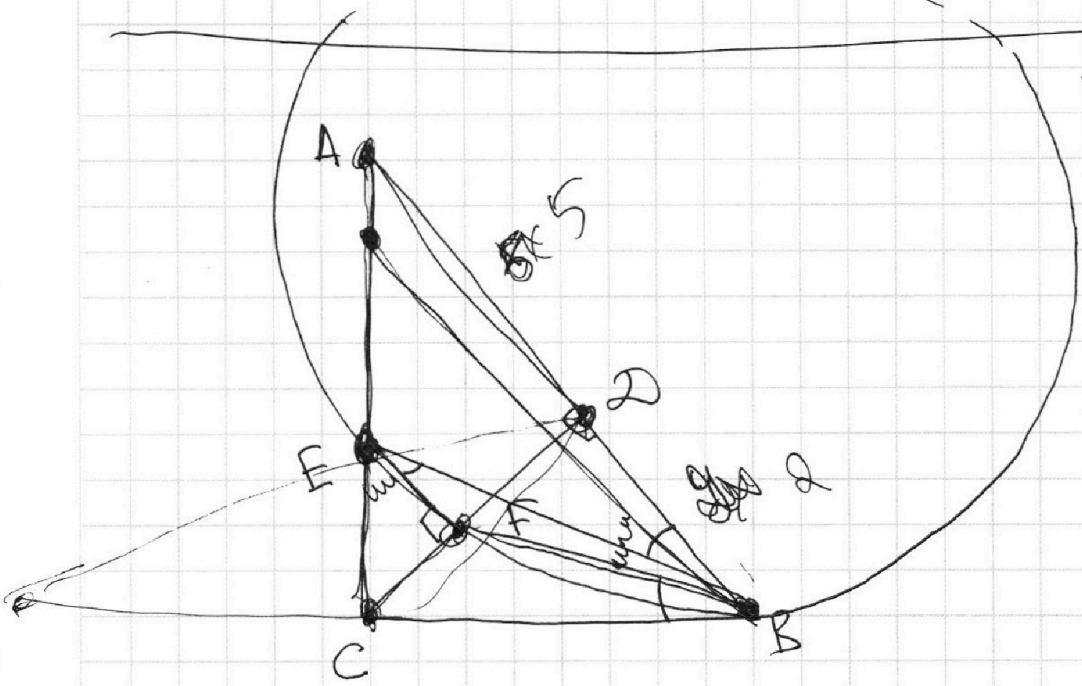
$$68 + k + n + m \geq 78 + 2m \Rightarrow 78$$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 17 \\ x_b + x_c = 22 \\ x_a + x_c = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_b = 8 \\ x_a = 17 \\ x_c = 22 \end{cases}$$

39

$$x/g = 5/2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

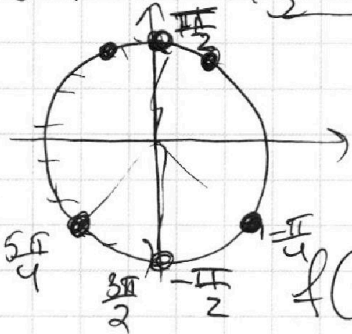
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\forall x \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$
 $\forall x \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \leq x \leq \pi$



$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$

$-\pi \leq -x \leq 0$

$0 \leq x \leq \pi$

$f(x) = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) = \pi - \frac{\pi}{2} + x = \boxed{x + \frac{\pi}{2}}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2}$

$0 < -x < \pi$

$\boxed{-\pi < x < 0}$

$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k$
 $0 \leq x \leq 2\pi k \leq \pi$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k$

$\pi + 5\pi k \leq 2\pi + 4\pi k$
 $k \leq 1$

$-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$

$\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$

$-1, 5k = 1$

$\boxed{2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k}$

$f(x) = f(x - 2\pi k) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$f(x) = \boxed{x + \frac{\pi}{2} - 2\pi k}, \quad \boxed{-\pi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi k}$

$\forall (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = \pi - 2x$

$5\pi - 6x + 20\pi k = \pi - 2x$

$8x = 4\pi + 20\pi k$

$x = -$

$\boxed{k \geq -1}$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$4\pi k \leq \pi + 5\pi k$

$-\pi + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \Leftrightarrow \boxed{4\pi k \leq \pi + 5\pi k}$

$5k \leq 1 \quad \boxed{k \leq 0}$

$\pi + 5\pi k \leq 2\pi + 4\pi k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$$
$$8x = 4\pi + 20\pi k$$

$$5\pi - (0x + 20\pi k) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi + 20\pi k$$

$$2\pi k \leq \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq \pi + 2\pi k$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq \pi + \pi k \leq 2\pi$$
$$-1 \leq k \leq 1$$

$$-\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} < 0$$

$$-3 < -1 - k < 0$$

$$-2 < -k < 1$$

$$-1 < k < 2$$

$$0 \leq k < 1$$

$$\frac{\pi(l + 5k)}{2}$$

$$-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}(5k - l)$$

$$-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$